# 线性代数

# 线 性 代 数

王湘浩
杨荫华 编

華中工學院出版社

## 内 容 简 介

本书用较短的篇幅介绍了线性代数的基本内容，可作为大学理工科各系学生一学期讲授完的教材．其特点是较早讲授了矩阵的运算，并用不变量和标准形式统一的观点来讨论矩阵的各种变换，在处理问题时，多采用矩阵，因而能使学生较系统地掌握本课程，本书文字流畅通顺，论证严谨，叙述简洁，通俗易懂，还可供理工科大学师生，工程技术人员以及数学爱好者阅读。


**线 性 代 数**

王湘浩　杨荫华　编

责任编辑　李立鹏

*

华中工学院出版社出版

（武昌喻家山）

湖北省新华书店发行

华中工学院出版社印刷厂印刷

*

开本：787×1092 1/32　印张：5.25　字数：119,000

1985年2月第一版　　1985年2月第一次印刷

印数：1－7,000

书号：13255—029　　　定价：1.15元

# 目　录

# 第一章 消去法及矩阵

## §1 线性方程组及消元法

线性方程组就是一次方程组。我们在中学代数里所学的线性方程组一般总是有唯一解。其实，各种问题中出现的线性方程组并不一定有解，有解也不一定唯一。例如，在平面解析几何中，讨论两条直线

$$a_1x+b_1y=c_1,$$
$$a_2x+b_2y=c_2$$

的相互关系需要考虑方程组

$$\left.\begin{aligned}a_1x+b_1y=c_1,\\ a_2x+b_2y=c_2\end{aligned}\right\}$$

的解。方程组若有唯一解，则二直线相交于一点；若无解，则二直线平行；若有无穷多解，则二直线重合。

这里，我们将要讨论普遍的线性方程组：

$$\left.\begin{aligned}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m,\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

其中 $x_1$，$x_2,\cdots,x_n$ 表示未知数，$a_{11}$ 等等和 $b_1$ 等等为已知数，方程个数 $m$ 和未知数个数 $n$ 不一定相等。这样一个方程组当然不一定有唯一解。

**定义1** $n$ 元数列

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \tag{2}$$

说是方程组（1）的一个**解**，如果，分别以 $a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_n$ 代替 $x_1$，$x_2$，$\cdots$，$x_n$，（1）中各式都真正成为等式。解方程组（1）就是求出（1）的所有的解。

**定义2** 设有另一方程组

$$\left.\begin{array}{l} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n = d_1, \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{p1}x_1 + c_{p2}x_2 + \cdots + c_{pn}x_n = d_p, \end{array}\right\} \tag{3}$$

其所含未知数和（1）相同。方程组（1）和（3）说是**等价**，如果（1）的任意解必是（3）的解，（3）的任意解也必是(1)的解。

设甲，乙等代表方程，$a$，$\lambda$ 等代表常数。以 $a$ 乘甲意思就是说以 $a$ 乘方程甲的两边，所得的方程说是甲的 $a$ 倍。把乙加于甲意思就是说把乙的两边对应地加到方程甲的两边。把乙减于甲意思就是说在方程甲的两边对应地减去乙的两边。

下面证明一个命题。我们所说的命题也就是定理。值得加以强调的定理我们才称为定理，比较一般或比较明显的定理就称为命题。

**命题** 对方程组作下列变换所得的方程组和原方程组等价：

1）以 $a \neq 0$ 乘方程组中的某个方程。

2）把方程组中某个方程的 $\lambda$ 倍加于另一方程。

**证：**设以 $a \neq 0$ 乘（1）中的某个方程。由于方程组中方程的次序是任意的，不妨设这个方程是第一个方程。这样，新方程组就是

$$\left.\begin{array}{l} aa_{11}x_1+aa_{12}x_2+\cdots+aa_{1n}x_n=ab_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{array}\right\} \quad (4$$

以 $\alpha_1$，$\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 分别代替 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，(1) 和 (4)分别成为

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2+\cdots+a_{1n}\alpha_n=b_1, \\ a_{21}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+\cdots+a_{2n}\alpha_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\alpha_1+a_{m2}\alpha_2+\cdots+a_{mn}\alpha_n=b_m, \end{array}\right\} \quad (5)$$

$$\left.\begin{array}{l} aa_{11}\alpha_1+aa_{12}\alpha_2+\cdots+aa_{1n}\alpha_n=ab_1, \\ a_{21}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+\cdots+a_{2n}\alpha_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\alpha_1+a_{m2}\alpha_2+\cdots+a_{mn}\alpha_n=b_m. \end{array}\right\} \quad (6)$$

若 $n$ 元数列 (2) 是 (1) 的解，则 (5) 成立，因而 (6) 成立，所以 (2) 是 (4) 的解。若 (2) 是 (4) 的解，则 (6) 成立，因而 (5) 成立，所以 (2) 是 (1) 的解。因之，(4) 和 (1) 等价。

今设将 (1) 中某个方程的 $\lambda$ 倍加于另一个方程，不妨设是将第二个方程的 $\lambda$ 倍加于第一个方程。这样得到的新方程组是

$$\left.\begin{array}{r} (a_{11}+\lambda a_{21})x_1+(a_{12}+\lambda a_{22})x_2+\cdots+(a_{1n}+\lambda a_{2n})x_n=b_1+\lambda b_2, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{array}\right\}$$

(7)

以 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 分别代替 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，（7）成为

$$\left.\begin{aligned}(a_{11}+\lambda a_{21})a_1+(a_{12}+\lambda a_{22})a_2+\cdots+(a_{1n}+\lambda a_{2n})a_n&=b_1+\lambda b_2,\\ a_{21}a_1+a_{22}a_2+\cdots+a_{2n}a_n&=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\\ a_{m1}a_1+a_{m2}a_2+\cdots+a_{mn}a_n&=b_m.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$n$ 元数列（2）是（1）的解当且仅当（5）成立，是（7）的解当且仅当（8）成立。但(5)和（8）可互推，所以（2）是（1）的解当且仅当是（7）的解，因而（7）和（1）等价。

用消元法解线性方程组就是利用上述命题中的两种变换逐步消去未知数而得到一系列较简形式的等价方程组，最后便可以求出方程组所有的解。

**例1** 解下列方程组：

$$\left.\begin{aligned}2x-y+3z+2w&=0,\\ 9x-y+14z+2w&=1,\\ 3x+2y+5z-4w&=1,\\ 4x+5y+7z-10w&=2.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

**解** 把第一方程的 2 倍减于第四方程，第三方程的 3 倍减于第二方程，第一方程的 3 倍减于第三方程的 2 倍，这样就得到下列等价的方程组：

$$\left.\begin{aligned}2x-y+3z+2w&=0,\\ -7y-z+14w&=-2,\\ 7y+z-14w&=2,\\ 7y+z-14w&=2.\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

在（10）中，把第二方程加于第三方程和第四方程，并减于

第一方程的7倍，这样就得到下列等价的方程组：

$$\left.\begin{aligned} 14x+22z&=2,\\ -7y-z+14w&=-2,\\ 0&=0,\\ 0&=0. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

（11）的最后两个方程显然可以删去。由前两个方程解出$x$，$y$得

$$\left.\begin{aligned} x&=-\frac{11}{7}z+\frac{1}{7},\\ y&=-\frac{1}{7}z+2w+\frac{2}{7}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

(12)等价于原方程组（9），取$z$为任意数$s$，$w$为任意数$t$，代入(12)得

$$\left.\begin{aligned} x&=-\frac{11}{7}s+\frac{1}{7},\\ y&=-\frac{1}{7}s+2t+\frac{2}{7}. \end{aligned}\right\}$$

这样就得到一个解

$$\left(-\frac{11}{7}s+\frac{1}{7},\ -\frac{1}{7}s+2t+\frac{2}{7},\ s,\ t\right). \tag{13}$$

反之，设$(q,\ r,\ s,\ t)$是任意解。代入（12）得

$$\left.\begin{aligned} q&=-\frac{11}{7}s+\frac{1}{7},\\ r&=-\frac{1}{7}s+2t+\frac{2}{7}. \end{aligned}\right\}$$

因而任意解也必然可以写成（13）的形式。所以，（13）是原方程组的**普遍解**，从而我们便求出了原方程组的所有的解。因为任意取$s$，$t$代入（13）便得到一个特殊解，可见原方程组（9）有无穷多个解。（13）是原方程组的普遍解这一事实也可以表示如下：

$$\left.\begin{aligned}
x &= -\frac{11}{7}s+\frac{1}{7},\\
y &= -\frac{1}{7}s+2t+\frac{2}{7},\\
z &= s,\\
w &= t.
\end{aligned}\right\}$$

**例2** 解下列方程组

$$\left.\begin{aligned}
3x+2y-z+2w&=1,\\
x-3y+2z-4w&=-2,\\
5x-4y+3z-6w&=3.
\end{aligned}\right\}\qquad(14)$$

**解** 把第二方程的 3 倍和 5 倍分别减于第一和第三方程得等价的方程组

$$\left.\begin{aligned}
11y-7z+14w&=7,\\
x-3y+2z-4w&=-2,\\
11y-7z+14w&=13.
\end{aligned}\right\}\qquad(15)$$

在（15）中，把第一方程减于第三方程得等价的方程组

$$\left.\begin{aligned}
11y-7z+14w&=7,\\
x-3y+2z-4w&=-2,\\
0&=6.
\end{aligned}\right\}\qquad(16)$$

由于(16)的最后一式不能满足，所以原方程组(14)无解。我们断定了（14）无解也就是求出了（14）的所有的解。

## 习　　题

解下列线性方程组

1. $$\left.\begin{aligned}
7x+3y&=2,\\
x-2y&=-3,\\
4x+9y&=11.
\end{aligned}\right\}$$

2.
$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=4,\\ 2x+y-z&=2,\\ 3x+2y\quad&=1. \end{aligned}\right\}$$

3.
$$\left.\begin{aligned} x_1-2x_2+x_3+x_4&=2,\\ -2x_1+4x_2-2x_3+3x_4&=1,\\ 5x_1-10x_2+5x_3+2x_4&=7. \end{aligned}\right\}$$

## §2　分离系数法

试看下列线性方程组：

$$\left.\begin{aligned} 2x_1-3x_2+x_3\qquad\quad&=5,\\ -5x_1+x_2\qquad\quad-4x_4&=0,\\ x_1+2x_2+2x_3-3x_4&=-1. \end{aligned}\right\}\tag{1}$$

把未知数 $x_1$，$x_2,x_3,x_4$ 的系数按它们在（1）中的位置加以排列，我们得到下面的一个“表”：

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0\\ -5 & 1 & 0 & -4\\ 1 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.\tag{2}$$

如果再把常数项 5，0，-1 按它们在（1）中的位置填在（2）的最末一列，便有下面的“表”：

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 & 5\\ -5 & 1 & 0 & -4 & 0\\ 1 & 2 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

这样的表称为**矩阵**。

**定义1**　$m\times n$ 个数 $a_{ij}$（$i=1,2,\cdots,m$，$j=1,2,\cdots,n$）排成的矩形表

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

叫做一个 $m$ 行 $n$ 列的**矩阵**.横的各排称为矩阵的**行**,纵的各排则称为**列**。$a_{ij}$ 称为矩阵 $A$ 的第 $i$ 行第 $j$ 列的**元素**。通常用大写字母 $A$, $B$,…代表矩阵,例如上面的矩阵记为 $A$ 或 $A_{mn}$。上述矩阵又可记为 $(a_{ij})$ 或 $(a_{ij})_{mn}$。如果 $m=n$,则矩阵 $A$ 称为 **$n$ 阶正方矩阵**或 **$n$ 阶矩阵**。

**定义2** 试看线性方程组

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{array}\right\} \quad (3)$$

矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \quad (4)$$

分别称为方程组(3)的**系数矩阵**和**增广矩阵**。

增广矩阵可以看作是方程组的简便写法。用上节所说的方法解方程组可以较简便地就增广矩阵来进行简化而不必每次写

出方程。以 $a\neq 0$ 乘某个方程等于以 $a$ 乘增广矩阵的一行，把方程乙的 $\lambda$ 倍加于方程甲等于把增广矩阵某行的 $\lambda$ 倍加于另一行。用这两种变换来变化方程组的增广矩阵，所得到的矩阵代表等价的方程组。此外，我们还可以颠倒各行的次序或颠倒前 $n$ 列的次序，这等于颠倒各方程式的次序和颠倒未知数的次序。我们把未知数 $x_1$, $x_2,\cdots,x_n$ 写在各自的系数列的顶端如下：

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

颠倒各列的次序时连同顶端的未知数一起颠倒，这样在颠倒了各列的次序后，我们仍然知道哪一列是哪个未知数的系数。

现在我们就来看利用上述几种变换可以把增广矩阵（4）化简成什么形式，从而看出线性方程组的解究竟有哪些可能情形。

若（4）中所有 $a_{ij}=0$，则不必再化简。设 $a_{ij}$ 不都是 0。颠倒前 $n$ 列的次序可使第一列有非 0 元素。若 $a$, $b$ 是第一列中的两个非 0 元素，把含 $a$ 的那一行的 $-a^{-1}b$ 倍加于含 $b$ 的那一行则 $b$ 化为 0。这样做下去可使第一列恰含一个非 0 元素，比如 $c$。以 $c^{-1}$ 乘含 $c$ 的那一行而后颠倒各行的次序，则矩阵可以化为下面的形式：

$$\begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * & c_1 \\ 0 & & & & c_2 \\ \vdots & & A_1 & & \vdots \\ 0 & & & & c_m \end{pmatrix}. \tag{5}$$

若 $A_1$ 中的元素都是 0，则不必再化. 否则颠倒第 2 到第 $n$ 列的次序可使 $A_1$ 的第一列有非 0 元素，因而仿上可将矩阵（5）化为下面的形式：

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & 1 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & & & & * \\ \vdots & \vdots & & A_2 & & \vdots \\ 0 & 0 & & & & * \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

把第二行的适当的倍数加到第一行，（6）又可以化为下面的形式：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 1 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & & & & * \\ \vdots & \vdots & & A_2 & & \vdots \\ 0 & 0 & & & & * \end{pmatrix}.$$

如此类推，最后便把增广矩阵（4）化为下面的形式：

$$\begin{array}{ccccccc} y_1 & y_2 & \cdots & y_r & y_{r+1} & \cdots & y_n \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & c_{rr+1} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ \vdots & & & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & d_m \end{pmatrix}, \qquad (7)$$

其中 $r\geqslant 0, r\leqslant m, r\leqslant n$. 顶端的 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是随着各列的颠倒而颠倒次序后的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$. 与(7)对应的方程组为

$$
\left.\begin{aligned}
y_1+c_{1r+1}y_{r+1}+\cdots+c_{1n}y_n&=d_1,\\
y_2+c_{2r+1}y_{r+1}+\cdots+c_{2n}y_n&=d_2,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\\
y_r+c_{rr+1}y_{r+1}+\cdots+c_{rn}y_n&=d_r,\\
0&=d_{r+1},\\
&\cdots\cdots,\\
0&=d_m.
\end{aligned}\right\}\tag{8}
$$

这样，我们便可以就方程组（8）来看方程组（3）的解的情况。今作如下的讨论：

1° 若$r<m$，而$d_{r+1},\cdots,d_m$不全为0，则方程组（8）无解。事实上，对任何一组$y_1,\cdots,y_n$的值，（8）中最后$m-r$个等式有的不可能成立。即(8）无解，故(3)亦无解。

2° 若$r=m$或$r<m$而$d_{r+1},\cdots,d_m$全为0，则（8）或根本没有$0=d_{r+1},\cdots,0=d_m$这些式子，或这些式子成为$0=0,\cdots,0=0$因而可以删去。在这种情形下又分两种情形：

1）当$r=n$时，方程组（8）成为

$$
\left.\begin{aligned}
y_1&=d_1,\\
y_2&=d_2,\\
\cdots&\cdots\\
y_n&=d_n,
\end{aligned}\right\}
$$

因而（8）有唯一解（$d_1$，$d_2,\cdots,d_n$）。只要把$d_1$，$d_2,\cdots,d_n$的次序适当地加以排列，我们便得到（3）的唯一解。

2）当$r<n$时，任取$y_{r+1},\cdots,y_n$的一组值$t_1,\cdots,t_{n-r}$，代入（8）即可解出$y_1$，$y_2,\cdots,y_r$的对应的值，因而便得到（8）的一个解：

$$
\left.\begin{aligned}
y_1 &= d_1 - c_{1r+1}t_1 \quad \cdots - c_{1n}t_{n-r},\\
y_2 &= d_2 - c_{2r+1}t_1 - \cdots - c_{2n}t_{n-r},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
y_r &= d_r - c_{rr+1}t_1 - \cdots - c_{rn}t_{n-r},\\
y_{r+1} &= t_1,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
y_n &= t_{n-r}.
\end{aligned}\right\}\qquad (9)
$$

设 $(s_1,\cdots,s_r,\ t_1,\cdots,t_{n-r})$ 是（8）的任意解。代入(8)而解出 $s_1,\cdots,s_r$ 便看到 $s_1,\cdots,s_r$ 可以表为（9）的前 $r$ 式右边的形式。因之，（9）表示（8）的，从而也表示（3）的普遍解。我们看到，在这一情形下，（3）有无穷多个解。

**定义3** 常数项都是 0 的方程组

$$
\left.\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0,\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0.
\end{aligned}\right\}\qquad (10)
$$

称为**齐次方程组**。设有非齐次方程组，如（1），把所有常数项换为 0 所得的齐次方程组，如（10），称为对应于原方程组的齐次方程组。

显然，$(0,\cdots,0)$ 必是齐次方程组的解，这个解称为齐次方程组的**零解**或**平凡解**。

**定理1** 若齐次方程组中方程的个数小于未知数的个数，则齐次方程组必有非零解。

**证** 试看齐次方程组（10）。这个方程组的增广矩阵最末一列的元素都是0。用前面的方法化简此增广矩阵所得的方程组（8）中的 $d_1,\cdots,d_m$ 自然也都是 0。因为 $r\leqslant m$ 而题设 $m<n$，