中学数理化读物

数学习题集

（解析几何部分）

北京出版社

中学数理化读物

数 学 习 题 集

（解析几何部分）

《数学习题集》编写组

北 京 出 版 社

中学数理化读物
数学习题集
（解析几何部分）
《数学习题集》编写组
*
北京出版社出版
北京市新华书店发行
北京印刷二厂印刷
*
787×1092毫米 32开本 3.625印张 70,000字
1979年7月第1版 1979年7月第1次印刷
印数 1—150,000
书号：7071·603 定价：0.27元

编辑说明

为了帮助广大青年和在校学生学习中学数理化基础知识，我们编辑了《中学数理化读物》。

这套读物包括供工农兵、青年和学生自学、复习的参考资料以及习题集等不同种类的数学、物理、化学等方面的书籍。

在编写时，注意从实际出发，参照了中学教学大纲，力求比较系统地叙述数理化的基础知识。我们希望通过学习这套读物，有助于广大青年进一步学好自然科学基础理论，为向工业、农业、科学和国防现代化进军打下一定的基础。

由于我们水平有限，又缺乏编辑这类读物的经验，缺点和错误在所难免，恳切希望广大读者批评指正。

目　　录

一、坐标系、曲线和方程

例 1. 设P是A、B、C三点所在直线上的任意一点，求证 $PA^2\times BC+PB^2\times CA+PC^2\times AB+BC\times CA\times AB=0$.（图 1）

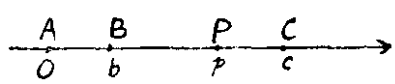


图 1

证明： 取A、B、C所在直线为坐标轴，A为原点．设B、C、P点的坐标分别为b、c、p．

根据有向线段数量公式，

$$PA=-p,\quad PB=b-p,\quad PC=c-p,$$

$$BC=c-b,\quad CA=-c,\quad AB=b.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad & PA^2\times BC+PB^2\times CA+PC^2\times AB\\ & +BC\times CA\times AB\\ =\,& p^2(c-b)+(b-p)^2(-c)+(c-p)^2b+(c-b)(-c)b\\ =\,& cp^2-bp^2-b^2c-cp^2+2bcp+c^2b+bp^2\\ & -2bcp-bc^2+b^2c\\ =\,& 0.\end{aligned}$$

例 2. 如图 2，$ABCDEF$是边长为 2 的正六边形．

（1）如果取其中心为坐标原点，一条对角线DA为x轴建立平面直角坐标系，试写出

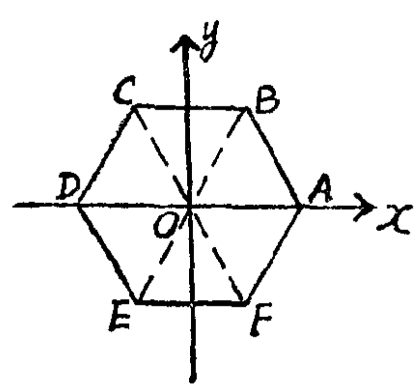


图 2

六个顶点的坐标；

(2) 如果以其中心为极点，OA 为极轴建立极坐标系，试写出六个顶点的极坐标；

(3) 在题(2)所建立的极坐标系中，坐标分别为$\left(-2, -\frac{\pi}{3}\right)$，$\left(-2, \frac{4}{3}\pi\right)$，$(-2, -\pi)$，$\left(-2, \frac{2}{3}\pi\right)$的点各表示图 2 中哪些点的坐标？

解：(1) 在平面直角坐标系中，各顶点坐标如下：

$A(2,0)$，$B(1,\sqrt{3})$，$C(-1,\sqrt{3})$，$D(-2, 0)$，$E(-1, -\sqrt{3})$，$F(1,-\sqrt{3})$.

(2) 在极坐标系中，各顶点的坐标如下：$A(2, 0)$，$B\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$，$C\left(2,\frac{2}{3}\pi\right)$，$D(2, \pi)$，$E\left(2,\frac{4}{3}\pi\right)$，$F\left(2,\frac{5}{3}\pi\right)$.

(3) $\left(-2,-\frac{\pi}{3}\right)$是 C 点的极坐标，$\left(-2,\frac{4}{3}\pi\right)$是 B 点的极坐标，$(-2, -\pi)$是 A 点的极坐标，$\left(-2,\frac{2}{3}\pi\right)$是 F 点的极坐标。

例 3. 已知点 $A(5, -8)$，$B(-3, 6)$，延长 AB 至 P，使得 $|PB|=\frac{1}{2}|AB|$. 求 P 点的坐标。(图 3)

解：设 P 点坐标为(x, y)，

$$\because \quad \lambda=\frac{BP}{PA}=-\frac{1}{3},$$

$$\therefore \quad x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=\frac{-3+\left(-\frac{1}{3}\right)\times 5}{1+\left(-\frac{1}{3}\right)}=-7,$$

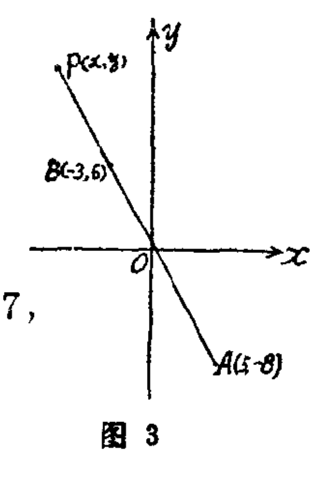


图 3

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\frac{6+\left(-\frac{1}{3}\right)(-8)}{1+\left(-\frac{1}{3}\right)}=13.$$

$\therefore$ P 点坐标是$(-7,\ 13)$.

例 4. 求以 $A(-16,\ 0)$、$B(9,\ 0)$、$C(0,\ 12)$ 为顶点的三角形 ABC 的$\angle C$ 平分线 CD 之长.

解：坐标系图形如图 4 所示．由两点距离公式求得

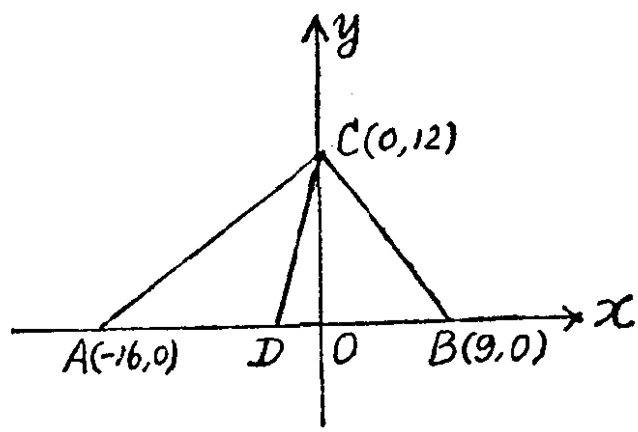


图 4

$$|AC|=\sqrt{16^2+12^2}=20,$$

$$|CB|=\sqrt{(-9)^2+12^2}=15,$$

$$\therefore\quad \lambda=\frac{20}{15}=\frac{4}{3}.$$

注．由初等几何学知道，从三角形任一顶点所引的内角平分线将该顶点对边划分为与两邻边成比例的两部分．

设 D 点坐标为$(x,0)$，由定比分点公式得

$$x=\frac{(-16)+\frac{4}{3}\times 9}{1+\frac{4}{3}}=-\frac{12}{7}.$$

∴ D 点坐标为$\left(-\frac{12}{7}, 0\right)$.

由两点距离公式得

$$|CD|=\sqrt{\left(\frac{12}{7}\right)^2+12^2}=\frac{60}{7}\sqrt{2}.$$

$$\therefore \quad CD \text{ 长为} \frac{60}{7}\sqrt{2}.$$

例 5. 用解析法证明直径上的圆周角是直角.

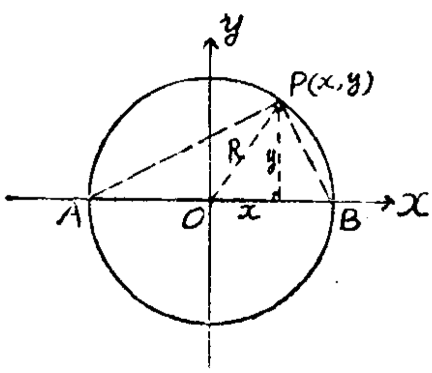


图 5

证明：建立坐标系如图5. A 点坐标为 $(-R, 0)$, B 点坐标为 $(R, 0)$, P 点坐标设为 (x, y).

设直线 AP 的斜率为k_{AP}，直线 BP 的斜率为 k_{BP}, 则

$$k_{AP}=\frac{y}{x-(-R)}=\frac{y}{x+R}, \quad k_{BP}=\frac{y}{x-R}.$$

因 P 点在圆周上，所以 $y^2=R^2-x^2$,

$$\therefore \quad k_{AP}\times k_{BP}=\frac{y}{x+R}\times\frac{y}{x-R}=\frac{y^2}{x^2-R^2}$$

$$=\frac{y^2}{-(R^2-x^2)}=\frac{y^2}{-y^2}=-1.$$

$\therefore\quad AP\perp BP$，即$\angle APB=90°$.

例 6. 描绘方程 $y^2-4x^2-2y-3=0$ 的曲线图形。

解：第一步，分析讨论：

（1）把 x 换成 $-x$，方程不变，可知曲线关于 y 轴对称。

（2）解方程 $y^2-4x^2-2y-3=0$. 先以 y 表示 x，得

$$x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{(y-3)(y+1)},$$

由于$(y-3)(y+1)\geqslant 0$，可知 $y\geqslant 3$ 和 $y\leqslant -1$；

再以 x 表示 y，得 $y=1\pm 2\sqrt{1+x^2}$，由于 $1+x^2>0$，可知 x 取任意实数值。

综合上述，当 x 取任意实数值时，y 只能在大于等于 3 或小于等于 -1 的范围内取值。

第二步，算出一些特殊点的值，列表如下：

x	0	± 1	± 2	± 3
y	3，-1	3.8，-1.8	5.5，-3.4	7.3，-5.3

第三步，在直角坐标系中，标出表中各对坐标值的对应点，将这些点连接成光滑的曲线；并注意到曲线关于 y 轴对称，就得到曲线的图形（图 6）。

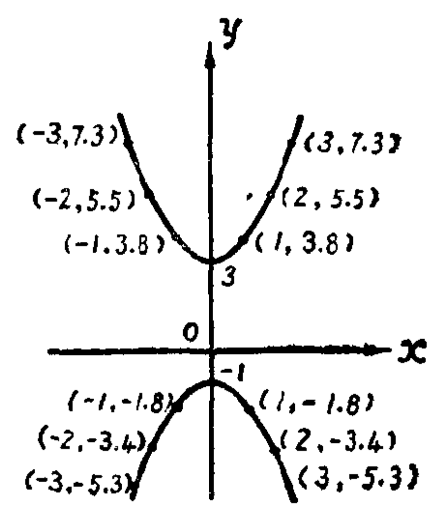


图 6

例 7.（1）化直角坐标方程 $x^2+y^2-2ax=0$ 为极坐标方程；

(2) 化极坐标方程 $\rho=\dfrac{a}{1-\sin\theta}$ 为直角坐标方程。

解：(1) 将 $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$ 代入

$$x^2+y^2-2ax=0,$$

得 $$\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta-2a\rho\cos\theta=0,$$

即 $$\rho=2a\cos\theta.$$

(2) $\rho=\dfrac{a}{1-\sin\theta}$,

整理得 $$\rho=a+\rho\sin\theta.$$

由 $\rho^2=x^2+y^2$, $y=\rho\sin\theta$ 得

$$\sqrt{x^2+y^2}=a+y,$$

即 $$x^2+y^2=a^2+2ay+y^2,$$

或写作 $$y=\frac{x^2}{2a}-\frac{a}{2}.$$

例 8. 一条线段 AB 的长等于 $2a$，其端点 A 和 B 分别在 x 轴和 y 轴上滑动，求 AB 中点 P 的轨迹方程。(图 7)

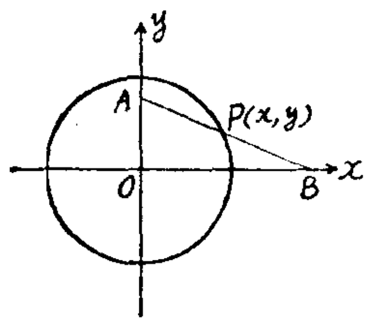


图 7

解：设动线段 AB 中点为 $P(x,y)$，则

$$|AO|=2y, \; |BO|=2x.$$

由勾股定理知

$$(2x)^2+(2y)^2=(2a)^2,$$

即 $$x^2+y^2=a^2.$$

可知 AB 中点 P 的轨迹方程为 $x^2+y^2=a^2$，也就是以原

点为圆心，a 为半径的圆.

现在来证明方程 $x^2+y^2=a^2$ 确是 AB 中点 P 的轨迹：

(1) 适合于所给条件的点都在圆 $x^2+y^2=a^2$ 上. 由上述分析可知此结论是正确的；

(2) 满足 $x^2+y^2=a^2$ 的点都适合于所给的 P 点的条件.

在圆 $x^2+y^2=a^2$ 上任取一点 $P_0(x_0, y_0)$, 在 y 轴上取截距为 $2y_0$ 的点 A, 连 AP_0 并延长交 x 轴于 B. 易知 $OB=2x_0$. 由中点坐标公式可知 P_0 恰为 AB 的中点. 而

$$AB^2=AO^2+BO^2=(2x_0)^2+(2y_0)^2=(2a)^2,$$

$$\therefore \quad |AB|=2a.$$

即 P_0 正好是一条长 $2a$, 端点分别在 x 轴、y 轴上滑动的线段的中点.

注："一条曲线是适合于某种条件的点的轨迹"，所指的是：

(1) 曲线上所有的点都适合于这个条件；

(2) 适合于这个条件的所有的点，都在这条曲线上.

(1) 叫做纯粹性，(2) 叫做完备性. 在轨迹问题中，对这两方面都要进行证明，不能只证一方面. 本书后面的例题中凡求轨迹方程的问题，只推求出了方程，而将关于纯粹性、完备性的证明留给读者自己完成.

练 习 一

1. 求下列各点关于 x 轴对称的点的坐标：

$A(2,\ 3)$, $B(-3,\ 2)$, $C(0,\ \sqrt{5})$, $D\left(\frac{1}{3},\ -2\right)$, $E(-3, -5)$, $F(a, b)$.

2. 求下列各点关于原点对称的点的坐标：

$A(2,\ 3)$, $B(-4,\ 2)$, $C(0,\ \sqrt{2})$, $D(-4,\ 4)$,

$E(5, -3)$，$F(a, b)$.

3．求下列各点关于第二象限角平分线对称的点的坐标：

$A(3, 5)$，$B(-4, 3)$，$C(7, -2)$，$D(-3, 0)$，$E(a, b)$.

4．设点 B、D、C 分别关于 y 轴、x 轴及原点与 $A(a, b)$ 对称，写出 B、C、D 点的坐标，并说明 $ABCD$ 是什么样的图形.

5．求与 x 轴的距离和到 $A(-4, 2)$ 的距离都是 10 的点的坐标.

6．求下列两点间的距离：

(1) $A(3, 1)$ 与 $B(-1, -2)$，

(2) $M(3\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 与 $N(\sqrt{2}, -\sqrt{3})$，

(3) $P(a\cos\varphi, 0)$ 与 $Q(0, a\sin\varphi)$，

(4) $U(a+b, a+c)$ 与 $V(c+a, a-b)$.

7．求以 $A(3, 2)$、$B(-1, -1)$、$C(11, -6)$ 为顶点的三角形的周长.

8．用下列每组的三个点为顶点画三角形．其中哪些是任意三角形，等腰三角形，等边三角形，直角三角形，等腰直角三角形？

(1) $A(1, 1)$，$B(-1, -1)$，$C(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$；

(2) $D(3, 4)$，$E(-2, -1)$，$F(4, 1)$；

(3) $K(5, 1)$，$L(2, -2)$，$M(2.5, 0.5)$；

(4) $M(1, -4)$，$N(2, 5)$，$P(4, -3)$；

(5) $U(-2, 1)$，$V(6, 1)$，$W(2, 5)$.

9．已知点 $P(2, 2)$，$Q(5, -2)$．在 x 轴上求一点 M，

使得$\angle PMQ=90°$。

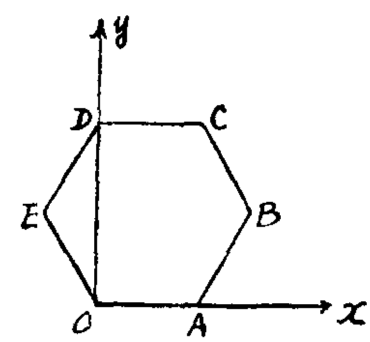
10. 已知三角形的两个顶点为$A(3, 7)$、$B(-2, 5)$，求第三个顶点C，使AC的中点在x轴上，BC的中点在y轴上。

习　题　一

11. 将边长为2的正六边形如图所示放在直角坐标系中。

    (1) 试写出各顶点的直角坐标。

    (2) 若以顶点O为极点，OA为极轴建立极坐标系，试写出各顶点的极坐标。



（第11题）

12. 已知A、B、C为数轴上三点，A点的坐标是a，B点的坐标是b，且$AC=0.618\,AB$，求C点的坐标。

13. 依下述条件所确定的点$M(x, y)$在哪个象限？

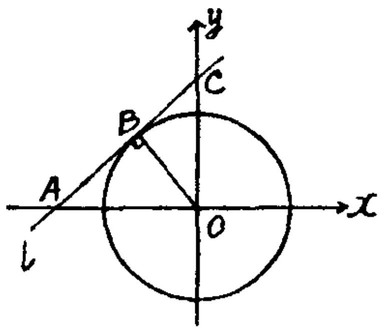
    (1) $xy>0$，(2) $x+y>0$，(3) $y-x<0$，

    (4) $x+y=0$，(5) $x-y=0$，(6) $2xy<0$，

    (7) $x^2+y^2=0$，(8) $x^2-y^2=0$.

14. 已知$\triangle ABC$三边AB、BC、CA的中点坐标依次为$P(3, -2)$，$Q(1, 6)$，$R(-4, 2)$，求三角形顶点坐标。

15. 如图，$\odot O$的中心为坐标原点，半径等于3. 直线l与$\odot O$切于B点，交x轴于A，交y轴于C；$\angle AOB$



（第 15 题）

$=60°$. 求 A、B、C 三点的坐标。

16. 求满足下列条件的点的坐标：
    (1) 在横轴上找一点，它到 $N(-1, 5)$ 的距离是 10；
    (2) 在纵轴上找一点，它到 $A(4, -6)$ 的距离是 5；
    (3) 在第一象限与第三象限的角平分线上找一点，它到 $M(-2,0)$ 的距离是 10。
17. 已知 $A(-1, 6)$，$B(4, 3)$，求 AB 的三等分点的坐标。
18. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点的坐标为 $A(3, -2)$，$B(5, 2)$，$C(-1, 4)$，求三条中线的长。
19. 求证直角三角形斜边中点到三个顶点的距离相等。
20. 求证矩形对角线相等。
21. 求证三角形的三条中线交于一点，这点到顶点的距离是它到对边中点距离的二倍。
22. 求证：对于任意实数 x_1, x_2, y_1, y_2，以下关系
$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \leqslant \sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}$$
都成立。
23. 求证任意四边形四边中点的依次连线组成一个平行四边形。
24. 求证正三角形外接圆上任一点到三顶点距离的平方和为常量。

25. 动点 $P(x, y)$到定点 $A(12, 16)$的距离等于到点 $B(3, 4)$的距离的 2 倍，求它的轨迹方程.

26. 求定点 $Q(8, 6)$与圆 $x^2+y^2=4$ 上的点所连线段的中点的轨迹方程.

27. 设 x_1, x_2, x_3 两两不等，求证三点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$共线的充分必要条件是

$$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{y_2-y_3}{x_2-x_3}.$$

28. 如果方程为 $f_1(x, y)=0$ 和 $f_2(x, y)=0$ 的两条曲线都经过 $P(x_0, y_0)$ 点，证明方程是 $f_1(x, y)+\lambda f_2(x, y)=0$ 的曲线也经过 P 点，其中 λ 是任意实数.

29. 极坐标系中两点 $M_1(\rho_1, \varphi_1)$和 $M_2(\rho_2, \varphi_2)$, 求证两点距离公式：

$$|M_1M_2|=\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

30. (1) 求下列曲线的极坐标方程：

① 经过 $P\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$且垂直于极轴的直线；

② 经过 $\theta\left(3, \frac{\pi}{3}\right)$且平行于极轴的直线；

③ 圆心在极点，半径是 $\sqrt{5}$ 的圆；

④ 圆心在 $A\left(r, \frac{\pi}{2}\right)$，直径是 $2r$ 的圆；

⑤ 过 $M(3, 0)$点，且与极轴成 45°角的直线.

(2) 化下列曲线的极坐标方程为直角坐标方程：

① $\rho^2=a^2\sin 2\theta$, ② $\rho=2\sin\theta+3\cos\theta$,

③ $\rho=\sin\theta$, ④ $\rho=\frac{1}{\cos\theta-2\sin\theta}$, ⑤ $\rho\cos\theta=2$.

(3) 化下列直角坐标方程为极坐标方程：

① $x^2+y^2=ax-\sqrt{x^2+y^2}$，② $xy=\frac{1}{2}$，

③ $x^2-y^2=a^2$，④ $x^2+(y+3)^2=9$.