

函数论与泛函 分析初步 下册

[苏] A.H.柯尔莫果洛夫 C.B.佛明 著

段虞荣 郭思旭 郑洪深 译

高等教育出版社

函数论与泛函分析初步

下 册

【苏】A.H. 柯尔莫果洛夫 C.B. 佛明 著

段虞荣 郭思旭 郑洪深 译

591114/2

高等教育出版社

(京) 112号

内 容 提 要

本书的内容包括勒贝格不定积分,微分论,可和函数空间,三角级数,傅里叶变换,线性积分方程,线性空间微分学概要以及附录的巴拿赫代数等,可供高等学校数学专业的师生参考.

函数论与泛函分析初步

下 册

[苏] A. H. 柯尔莫果洛夫 C. B. 佛明 著

段虞荣 郭恩旭 郑洪深 译

*

高等教育出版社出版

新华书店总店北京科技发行所发行

民族印刷厂印装

*

开本 850×1 168 1/32 印张 9.75 字数 230 000

1992 年 5 月第 1 版 1992 年 5 月第 1 次印刷

印数 0001—2 090

ISBN7-04-002989-8/O·935

定价 6.00 元

目 录

第六章 勒贝格不定积分, 微分论	1
§ 1. 单调函数, 积分对上限的可微性.....	2
1. 单调函数的基本性质(2), 2. 单调函数的可微性(6),	
3. 积分对上限求导数(14).	
§ 2. 有界变差函数.....	15
§ 3. 勒贝格不定积分的导数.....	21
§ 4. 用函数的导数求原函数, 绝对连续函数.....	23
§ 5. 作为集函数的勒贝格积分, 拉东-尼柯迪姆 (Radon-Nikodým) 定理.....	34
1. 荷, 汉恩分解和约当分解(34), 2. 荷的基本类型(37),	
3. 绝对连续荷, 拉东-尼柯迪姆定理(38),	
§ 6. 斯蒂尔吉斯(Stieltjes)积分.....	42
1. 斯蒂尔吉斯测度(42), 2. 勒贝格-斯蒂尔吉斯积分(44), 3.	
勒贝格-斯蒂尔吉斯积分在概率论中的某些应用(46), 4. 黎曼-斯蒂尔	
吉斯(Riemann-Stieltjes)积分(48), 5. 斯蒂尔吉斯积分号下取极	
限(53), 6. 连续函数空间中线性连续泛函的一般形式(56).	
第七章 可和函数空间	62
§ 1. 空间 L_1	62
1. 空间 L_1 的定义与基本性质(62), 2. L_1 中处处稠密的集合(64),	
§ 2. 空间 L_2	68
1. 定义与基本性质(68), 2. 无穷测度的情形(72), 3. 在 L_2 中	
处处稠密的集合, 同构定理(74), 4. 复空间 L_2 (75), 5. 均方收敛及	
它与其他类型的泛函序列收敛性的联系(75),	
§ 3. L_2 中的正交函数系, 按正交系展开的级数.....	78
1. 三角函数系, 傅里叶三角级数(78), 2. 在闭区 $[0, \pi]$ 上的三角函	
数系(81), 3. 复形式的傅里叶级数(82), 4. 勒让德(Legendre)多项式	
(84), 5. 乘积正交系, 多重傅里叶级数(87), 6. 关于给定权正交的多项	

式(89). 7. 空间 $L_2(-\infty, \infty)$ 与 $L_2(0, \infty)$ 中的正交基(90). 8. 关于离散权的正交多项式(92). 9. 哈尔(Haar)系与拉捷马赫尔-乌尔什(Rademacher-Walsh)系(94).

第八章 三角级数. 傅里叶变换.....97

§ 1. 傅里叶级数收敛的条件.....97

1. 傅里叶级数在一点收敛的充分条件(97). 2. 傅里叶级数一致收敛的条件(104).

§ 2. 费耶尔(Fejér)定理.....107

1. 费耶尔定理(107). 2. 三角函数系的完备性. 维尔斯特拉斯定理(110). 3. 空间 L_1 中的费耶尔定理(111).

§ 3. 傅里叶积分.....112

1. 基本定理(112). 2. 复形式的傅里叶积分(115).

§ 4. 傅里叶变换, 它的性质与应用.....115

1. 傅里叶变换与反演公式(115). 2. 傅里叶变换的基本性质(120). 3. 埃尔米特函数与拉盖尔函数的完备性(123). 4. 快速下降无穷次可微函数的傅里叶变换(124). 5. 傅里叶变换与函数的卷积(125). 6. 用傅里叶变换解热传导方程(126). 7. 多元函数的傅里叶变换(128).

§ 5. 空间 $L_2(-\infty, \infty)$ 中的傅里叶变换.....131

1. 布兰舍列尔(Plancher)定理(131). 2. 埃尔米特函数(135).

§ 6. 拉普拉斯(Laplace)变换.....138

1. 拉普拉斯变换的定义与基本性质(138). 2. 拉普拉斯变换对解微分方程的应用(算子法)(140).

§ 7. 傅里叶-斯蒂尔吉斯变换.....142

1. 傅里叶-斯蒂尔吉斯变换的定义(142). 2. 傅里叶-斯蒂尔吉斯变换在概率论中的应用(144).

§ 8. 广义函数的傅里叶变换.....146

第九章 线性积分方程.....150

§ 1. 基本定义, 导致积分方程的某些问题.....150

1. 积分方程的类型(150). 2. 导致积分方程的问题的一些例子(151).

§ 2. 弗雷德霍姆积分方程.....154

1. 弗雷德霍姆积分算子(154). 2. 含对称核的方程(158). 3. 弗雷德霍姆定理. 退化核情形(160). 4. 含任意核的方程的弗雷德霍姆定理(162).

5. 伏尔泰拉方程(168). 6. 第一类积分方程(168).	
§ 3. 含参数的积分方程. 弗雷德霍姆法.....	169
1. H 里紧算子的谱(169). 2. 以 λ 的幂级数形式求解. 弗雷德霍姆行列式(171).	
第十章 线性空间微分学概要	176
§ 1. 线性空间中的微分法.....	176
1. 强微分(弗里歇(Fréchet)微分)(176). 2. 弱微分(嘎多(Gateaux)微分)(178). 3. 有限增量公式(179). 4. 弱可微性与强可微性之间的关系(180). 5. 可微泛函(181). 6. 抽象函数(182). 7. 积分(182). 8. 高阶导数(185). 9. 高阶微分(188). 10. 泰勒(Taylor)公式(188).	
§ 2. 隐函数定理及其某些应用.....	189
1. 隐函数定理(189). 2. 微分方程解对初始数据的依赖性定理(193).	
3. 切流形. 刘斯切尔尼克(Люстерник)定理(194).	
§ 3. 极值问题.....	198
1. 极值的必要条件(198). 2. 二阶微分. 泛函极值的充分条件(202).	
3. 有约束的极值问题(204).	
§ 4. 牛顿(Newton)法.....	207
附录 巴拿赫代数	212
§ 1. 巴拿赫代数的定义与一些例子.....	212
1. 巴拿赫代数, 巴拿赫代数的同构(212). 2. 巴拿赫代数的一些例子(214). 3. 极大理想(216).	
§ 2. 谱和预解式.....	218
1. 定义与例子(218). 2. 谱的性质(219). 3. 谱半径定理(222).	
§ 3. 几个辅助结果.....	223
1. 商代数定理(223). 2. 三个引理(224).	
§ 4. 基本定理.....	225
1. 线性连续可乘泛函与极大理想(225). 2. 集 \mathcal{M} 中的拓扑. 基本定理(228). 3. 维纳(Wiener)定理; 习题(231).	
文献	237
各章的有关文献	241
索引	242

第六章 勒贝格不定积分. 微分论

在这一章里, 我们主要研究定义在直线上的函数的勒贝格积分. 假定按其取积分的测度, 是通常的线性勒贝格测度.

如果 f 是定义在具有测度 μ 的可测空间 X 上的可和函数, 那么, 对每一个可测集 $A \subset X$, 积分

$$\int_A f(x) d\mu \quad (*)$$

存在; 而对于固定的 f , 积分 $(*)$ 是集函数, 它对于所有的可测子集 $A \subset X$ 有定义. 这样的积分称为勒贝格不定积分. 特别空间 X 可以是数轴上的闭区间. 这时, 如果 A 也是某一闭区间, 那么积分 $(*)$ 将是点对——线段 A 之端点的函数, 我们将假定, 在这种情形下测度 μ 就是通常的勒贝格测度, 并将 $d\mu$ 写成 dt . 在固定积分区间的一个端点(比方说左端点)之后, 我们就可以作为单变量 x 的函数来研究闭区间 $[a, x]$ 上的积分 $\int_a^x f(t) dt$ 的性质. 这个问题引导我们去讨论定义在直线上的某些重要函数类. 在 § 5, 将阐明, 把固定的函数 f 之勒贝格积分作为集函数而进行研究的一般问题.

由分析学初等课程知, 下面两个基本等式揭示出微分运算与积分运算之间的联系: 如果 f 是连续函数, 而 F 是有连续导数的函数, 那么

$$1) \quad \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x),$$

$$2) \quad \int_a^b F'(t) dt = F(b) - F(a).$$

试问:等式1)对于勒贝格意义下的可和函数是否成立?满足等式2)的函数类是怎样的(可能更广泛的)?

本章下面几节就研究这些问题.

§1. 单调函数. 积分对上限的可微性

1. 单调函数的基本性质 我们从下面明显但是重要的注解:如果函数 f 是非负的,则 $\Phi(x)$ 是单调非递减函数开始,研究作为上限的函数的勒贝格积分

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (1)$$

的性质. 其次,每一个可和函数是两个非负的可和函数之差:

$$f(t) = f_+(t) - f_-(t). \quad (2)$$

因此积分(1)可分解成两个单调非递减函数之差. 从而,作为上限的函数的勒贝格积分的研究,可以化为同一类型的单调函数的研究. 单调函数(不管它们的来源如何)具有一系列既简单又重要的性质. 我们现在对这些性质加以阐述.

让我们回忆某些概念. 只要没有相反的声明,我们将处处讨论那些给定在某一闭区间上的函数.

函数 f 称为单调非递减的,倘若从 $x_1 \leq x_2$ 推出

$$f(x_1) \leq f(x_2);$$

类似地定义单调非递增函数.

设 f 是直线上的任意函数,极限^①

$$\lim_{h \rightarrow 0+} f(x_0 + h)$$

(如果它存在),称为函数 f 在点 x_0 的右极限,并用 $f(x_0+0)$ 表示. 类似地定义函数 f 在点 x_0 的左极限 $f(x_0-0)$. 显然,等式

① 符号 $h \rightarrow 0+$ 表示 h 趋于零时仅取正值.

$f(x_0+0) = f(x_0-0)$ 表示函数 f 在点 x_0 或者连续, 或者具有可去间断点. 这两个极限存在但彼此不相等的点称为**第一类间断点**, 而差 $f(x_0+0) - f(x_0-0)$ 称为函数 f 在该点的**跃度**.

如果 $f(x_0) = f(x_0-0)$, 那么 f 称为在点 x_0 **左连续**, 而如果 $f(x_0) = f(x_0+0)$, 那么 f 称为在该点**右连续**.

我们来揭示单调函数的一些基本性质. 为明确计, 我们将只讨论单调非递减函数, 显然下面所说的一切可以自动移植到单调非递增函数.

1. 每一个在 $[a, b]$ 上单调非递减的函数 f 可测并且有界, 从而可和.

事实上, 根据单调性的定义, 对于任意 $x \in [a, b]$, 有

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b).$$

其次, 对于任何常数 c , 集

$$A_c = \{x: f(x) < c\}$$

或者是闭区间, 或者是半开区间(或者是空集). 事实上, 设使 $f(x) < c$ 的点存在, 又设 d 是这些 x 的上确界. 于是 A_c 或者是闭区间 $[a, d]$ 或者是半开区间 $[a, d)$.

2. 单调函数只可能有第一类间断.

事实上, 设 x_0 是 $[a, b]$ 上的任意点, 而 $x_n \rightarrow x_0$, 并且 $x_n < x_0$. 于是序列 $\{f(x_n)\}$ 有下界和上界 [例如函数值 $f(a)$ 和 $f(b)$ 分别是下界和上界]. 从而, 它至少有一个极限点. 但任何这样的序列若有若干个极限点显然就会与函数 f 的单调性相矛盾. 这样一来, $f(x_0-0)$ 就存在. 类似地可以确立 $f(x_0+0)$ 的存在性.

单调函数不一定是连续的. 但是下面的结论是正确的.

3. 单调函数之间断点的集合最多是可数的.

事实上, 在闭区间 $[a, b]$ 上的单调函数 f 的任何有限个跃度之和不超过 $f(b) - f(a)$. 从而, 对于任意 n , 其跃度值大于 $1/n$ 的个

数是有限的. 对所有的 $n=1, 2, \dots$ 求和, 可见跃度的总数是有限的或可数的.

在单调函数中间最简单的是所谓阶跃函数. 它们可用下述方法来构造. 设在区间 $[a, b]$ 上给定了有限个或可数个

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

又设它们之中的每一个与正数 h_n 建立了对应关系, 并且 $\sum_n h_n <$

∞ . 我们在 $[a, b]$ 上定义函数 f , 令

$$f(x) = \sum_{x_n < x} h_n. \quad (3)$$

显然, 这个函数是单调非递减的. 此外, 它在每一点是左连续的^①, 而它的间断点全体与集 $\{x_n\}$ 重合^②, 并且在点 x_n 的跃度等于 h_n . 事实上

$$f(x-0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} f(x-\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \sum_{x_n < x-\varepsilon} h_n,$$

但因每一个满足条件 $x_n < x$ 的 x_n , 当 ε 充分小时也满足条件 $x_n < x-\varepsilon$, 所以上式右端的极限等于 $\sum_{x_n < x} h_n = f(x)$. 这样一来, $f(x-0)$

$= f(x)$. 如果点 x 与诸点 x_n 之一重合, 比如说与 $x=x_0$ 重合, 那么

$$f(x_{n_0}+0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} f(x_{n_0}+\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \sum_{x_n < x_{n_0}+\varepsilon} h_n = \sum_{x_n < x_{n_0}} h_n,$$

① 要是我们用公式

$$f(x) = \sum_{x_n < x} h_n$$

来定义 f , 那么所得到的函数就会是右连续的.

② 只要诸点 x_n 中没有一个是与 b 重合, 因为 $x_n = b$ 未进入和式 (3) 中. 欲计算 b 点的跃度, 应考虑用半开区间 $[a, b+\varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$) 来代替 $[a, b]$.

即 $f(x_{n_0}+0) - f(x_{n_0}-0) = h_{n_0}$.

最后, 如果 x 与诸点 x_n 中间的任何一个都不重合, 那么阶跃函数在该点是连续的(试证明之!).

阶跃函数的最简单的类型是阶梯函数, 它们的间断点可以排成一个单调序列

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots.$$

在一般情形下阶跃函数可以具有更复杂的结构, 例如, 如果 $\{x_n\}$ 是闭区间 $[a, b]$ 上所有的有理点的集合, 而 $h_n = 1/2^n$, 那么公式(3)定义了这样一个阶跃函数, 它在有理点是间断的, 而在无理点则是连续的.

单调函数的另一种类型, 在某种意义上与阶跃函数正好相反, 是所谓的连续单调函数. 下面的结论是成立的.

4. 每一个左连续的单调函数, 可以表成连续的单调函数与(左连续的)阶跃函数之和, 并且这种表示法 is 唯一的.

事实上, 设 f 是一个非递减左连续函数, x_1, x_2, \dots 是它的全部间断点, 而 h_1, h_2, \dots 是它在这些点上的跃度. 令

$$H(x) = \sum_{x_n < x} h_n.$$

差 $\varphi = f - H$ 是一个非递减的连续函数. 为了证明这一点让我们来考虑差

$$\varphi(x'') - \varphi(x') = [f(x'') - f(x')] - [H(x'') - H(x')],$$

其中 $x' < x''$. 这里, 右端是函数 f 在闭区间 $[x', x'']$ 上的全增量与它在这个区间上的跃度之和的差. 显然, 这个量是非负的, 即 φ 是一个非递减函数. 其次, 对于任意的点 x^* , 有

$$\varphi(x^* - 0) = f(x^* - 0) - H(x^* - 0) = f(x^* - 0) - \sum_{x_n < x^*} h_n,$$

$$\varphi(x^*+0) = f(x^*+0) - H(x^*+0) = f(x^*+0) - \sum_{x_n \rightarrow x^*} h_n,$$

由此

$$\varphi(x^*+0) - \varphi(x^*-0) = f(x^*+0) - f(x^*-0) - h^* = 0$$

(其中 h^* 是函数 H 在点 x^* 的跃度). 由此从 f 的左连续性和 H 的左连续性, 可推出 φ 确是连续的.

2. 单调函数的可微性 现在我们转到讨论单调函数的导数存在的问题.

定理 1(勒贝格) 定义在闭区间 $[a, b]$ 上的单调函数 f 在该闭区间上几乎处处有有限导数.

首先引入某些在证明这个定理时需要用到的概念.

大家知道, 函数 f 在点 x_0 的导数就是比式

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (4)$$

当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限. 这个极限当然可以不存在. 但是下面的四种量(它们也可以取无穷大值)总是有意义的:

$A_{右}$ 是比式(4)当 x 从 x_0 右方趋向于 x_0 时(即使得 $x - x_0 > 0$)的上极限. 这个量称为**右上导数**.

$\lambda_{右}$ (**右下导数**) 是比式(4)当 x 从 x_0 右方趋向于 x_0 时的下极限.

$A_{左}$ (**左上导数**) 是比式(4)当 x 从 x_0 左方趋向于 x_0 时的上极限.

$\lambda_{左}$ (**左下导数**) 是比式(4)当 x 从 x_0 左方趋向于 x_0 时的下极限.

在图 19 上标明斜率分别为 $A_{右}, \lambda_{右}, A_{左}, \lambda_{左}$ 的直线. 显然, 永远有

$$\lambda_{右} \leq A_{右} \text{ 和 } \lambda_{左} \leq A_{左}.$$

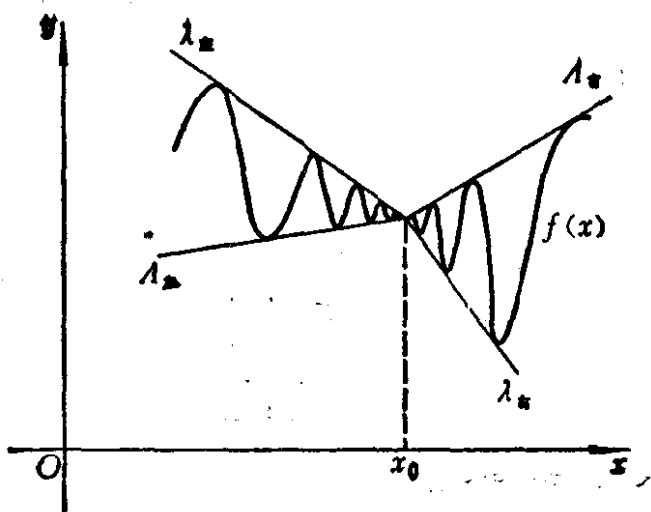


图 19

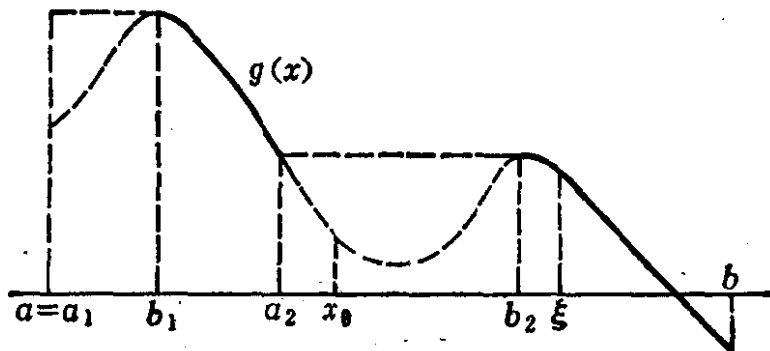


图 20

如果 $\Lambda_{右}$ 和 $\lambda_{右}$ 有限并且彼此相等, 那么它们的这个公共值就是函数 $f(x)$ 在点 x_0 的右导数. 类似地, 如果 $\Lambda_{左} = \lambda_{左}$, 那么它们的公共值就是左导数. f 在点 x_0 有有限导数, 等价于在该点函数 f 的所有导数都有限并且彼此相等. 因此勒贝格定理的结论可以陈述如下: 对于在 $[a, b]$ 上单调的函数, 关系式

$$-\infty < \lambda_{左} = \lambda_{右} = \Lambda_{左} = \Lambda_{右} < \infty$$

在 $[a, b]$ 上几乎处处成立.

习题 设 $f^*(x) = -f(x)$. 问 f^* 的导数与 f 的导数有什么关系?

当 $f(x)$ 变为 $f(-x)$ 时, 试回答同样的问题.

勒贝格定理的证明以下面的引理为依据，而这个引理我们今后也将用到它。

我们引入下述定义。设 $g(x)$ 是一个给定在闭区间 $a \leq x \leq b$ 上的连续函数。这个闭区间上的点 x_0 称为函数 g 的右不可见点，倘若存在这样一点 $\xi (x_0 < \xi \leq b)$ ，使得 $g(x_0) < g(\xi)$ (图 20)。

引理(黎茨) 对于任何一个连续函数 g ，右不可见点的集合在闭区间 $[a, b]$ 上是开的，从而可以表示成有限个或可数个两两互不相交的开区间 (a_k, b_k) (也可能包含点 a 的半开区间) 之和。这些开区间的端点满足不等式

$$g(a_k) \leq g(b_k). \quad (5)$$

引理的证明 如果 x_0 是 g 的右不可见点，那么，根据 g 的连续性，任何一个充分接近 x_0 的点也将具有同一性质。从而，这样的一些点所构成的集在 $[a, b]$ 上是开的。设 (a_k, b_k) 是它的构成区间之一，假定

$$g(a_k) > g(b_k). \quad (6)$$

那么在开区间 (a_k, b_k) 内可以找到一个内点 x_0 使得 $g(x_0) > g(b_k)$ 。设 x^* 是 (a_k, b_k) 内使 $g(x) = g(x_0)$ 的一切点 x 里的最右面的一点。

因为 $x^* \in (a_k, b_k)$ ，就有这样的点 $\xi > x^*$ 存在，使得 $g(\xi) > g(x^*)$ 。点 ξ 不可能位于开区间 (a_k, b_k) 内，因为 x^* 是该开区间内使 $g(x) = g(x_0)$ 的最右的一点，然而 $g(b_k) < g(x_0)$ 。另一方面，不等式 $\xi > b_k$ 也不可能成立，因为否则就会有 $g(b_k) < g(x_0) < g(\xi)$ ，然而 b_k 并不是右不可见点。所得到的这个矛盾表明不等式(6)不成立，即 $g(a_k) \leq g(b_k)$ ，因而引理得证。读者不难验证，实际上 $g(a_k) = g(b_k)$ ，只要 $a_k \neq a$ 。

注 我们称点 x_0 是连续函数 $g(x)$ 的左不可见点，倘若有这样的点 $\xi < x_0$ 存在，使得 $g(\xi) > g(x_0)$ 。同样的推理可以证明，左不可见点的集合是有限个或可数个两两互不相交的开区间 $(a_k,$

b_k) (也可能包括含点 b 的半开区间) 之和, 并且

$$g(a_k) \geq g(b_k).$$

现在我们转到勒贝格定理本身的证明. 我们首先在 f 是单调非递减连续函数的假定下, 证明该定理. 为此只需证明几乎处处有

$$1) A_{右} < \infty, \quad 2) \lambda_{左} \geq A_{右}.$$

事实上, 如果我们假定 $f^*(x) = -f(-x)$, 那么定义在闭区间 $[-b, -a]$ 上的函数 f^* 也将是单调非递减的连续函数. 如果 $A_{右}^*$ 和 $\lambda_{左}^*$ 分别是 f^* 的右上导数和左下导数, 那么容易验证 (参看第 7 页中的习题), 函数 f 和 f^* 在相应点上的导数满足等式 $A_{右}^* = A_{左}$ 和 $\lambda_{左}^* = \lambda_{右}$. 因此, 把不等式 2) 用于 $f^*(x)$, 就得到

$$\lambda_{右} \geq A_{左}. \quad (7)$$

将所得到的这些不等式联结起来写成一个不等式链, 再利用导数的定义, 就有

$$A_{右} \leq \lambda_{左} \leq A_{左} \leq \lambda_{右} \leq A_{右}.$$

而这就表示

$$\lambda_{左} = \lambda_{右} = A_{左} = A_{右}.$$

我们首先来证明, 几乎处处有 $A_{右} < \infty$. 如果在某一点 x_0 处有 $A_{右} = \infty$, 那么对于任何常数 $C > 0$, 在点 x_0 之右可以找到这样一点 ξ , 使得

$$\frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} > C,$$

即

$$f(\xi) - f(x_0) > C(\xi - x_0),$$

或

$$f(\xi) - C\xi > f(x_0) - Cx_0.$$

换言之, 点 x_0 是函数

$$g(x) = f(x) - Cx$$

的右不可见点. 根据黎茨引理, 这样的点所构成的集是开的, 而在组成它的那些开区间 (a_k, b_k) 的端点上满足不等式

$$f(a_k) - Ca_k \leq f(b_k) - Cb_k,$$

即

$$f(b_k) - f(a_k) \geq C(b_k - a_k).$$

将所得到的这些不等式除以 C , 再对所有的开区间 (a_k, b_k) 求和, 就得到

$$\sum_k (b_k - a_k) \leq \sum_k \frac{f(b_k) - f(a_k)}{C} \leq \frac{f(b) - f(a)}{C}.$$

这里 C 可以取得任意地大. 这样一来, 那些使 $\lambda_{\text{右}} = \infty$ 的点所构成的集可以被一些开区间所覆盖, 而且这些区间的长度之和可以任意地小. 从而, 这个集的测度等于 0.

这个与黎茨引理有联系的方法, 还可以用来证明几乎处处有 $\lambda_{\text{左}} \geq \lambda_{\text{右}}$, 但现在这个方法需要运用两次. 我们来考虑这样的有理数偶 c 和 C , 其中 $0 < c < C < \infty$. 令 $\rho = c/C$. 用 $E_{c,C}$ 表示那些使 $\lambda_{\text{右}} > C$, 而 $\lambda_{\text{左}} < c$ 的 x 的全体. 如果能证明 $\mu E_{c,C} = 0$, 那么由此可见几乎处处有 $\lambda_{\text{左}} \geq \lambda_{\text{右}}$, 因为那些使 $\lambda_{\text{左}} < \lambda_{\text{右}}$ 的点所构成的集, 显然, 可以表示成最多是可数个形如 $E_{c,C}$ 的集之和.

现在我们来建立一个基本不等式.

对于任何开区间 $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$, 有

$$\mu(E_{c,C} \cap (\alpha, \beta)) \leq \rho(\beta - \alpha).$$

事实上, 我们首先考虑 (α, β) 中使 $\lambda_{\text{左}} < c$ 的那些点 x 所构成的集. 对于每一个这样的点 x , 可以找到这样的 $\xi < x$, 使得 $\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} < c$, 即 $f(\xi) - c\xi > f(x) - cx$. 因此 x 是函数 $f(x) - cx$

的左不可见点, 而根据黎茨引理 (参看第 8 页中的注) 这样的 x

所构成的集可以表示成不多于可数个两两不交的开区间 $(\alpha_k, \beta_k) \subset (\alpha, \beta)$ 之和, 并且 $f(\alpha_k) - c\alpha_k \geq f(\beta_k) - c\beta_k$, 即

$$f(\beta_k) - f(\alpha_k) \leq c(\beta_k - \alpha_k). \quad (8)$$

在每一个开区间 (α_k, β_k) 里考虑那些使 $A_{\beta} > C$ 的点 x 所构成的集 G_k . 仍运用黎茨引理 (现在, 正如对于右不可见点, 证明不等式 $A_{\beta} < \infty$ 时一样), 我们就得到, G_k 可以表示成不多于可数个两两不交的开区间 $(\alpha_{kj}, \beta_{kj})$ 之和, 并且

$$\beta_{kj} - \alpha_{kj} \leq \frac{1}{C} [f(\beta_{kj}) - f(\alpha_{kj})]. \quad (9)$$

显然, 集 $E_{c,c} \cap (\alpha, \beta)$ 被诸开区间 $(\alpha_{kj}, \beta_{kj})$ 所构成的集族所覆盖, 并且根据(8)和(9)有

$$\begin{aligned} \sum_{k,j} (\beta_{kj} - \alpha_{kj}) &\leq \frac{1}{C} \sum_{k,j} [f(\beta_{kj}) - f(\alpha_{kj})] \\ &\leq \frac{1}{C} \sum_k [f(\beta_k) - f(\alpha_k)] \leq \frac{c}{C} \sum_k (\beta_k - \alpha_k) \\ &\leq \rho(\beta - \alpha), \end{aligned}$$

因而基本不等式得证.

现在容易证明 $\mu E_{c,c} = 0$.

这时只需利用集 $E_{c,c}$ 的那个由不等式所描述的性质.

引理 假设在闭区间 $[a, b]$ 上的可测集 A 具有这样的性质: 对于任何开区间 $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$, 满足不等式 $\mu(A \cap (\alpha, \beta)) \leq \rho(\beta - \alpha)$, 其中 $0 < \rho < 1$. 那么 $\mu(A) = 0$.

证明 设 $\mu A = t$. 对于任何 $\varepsilon > 0$, 存在这样一个开集 G : 它等于可数个两两不交的开区间 (a_m, b_m) 之和, 且使 $A \subset G$, $\sum_m (b_m - a_m) < t + \varepsilon$ (参看第五章 § 5 第 7 段中的习题). 令 $t_m = \mu[A \cap (a_m, b_m)]$. 显然 $t = \sum_m t_m$. 根据引理条件, $t_m \leq \rho(b_m - a_m)$. 从而,