函数论与泛函分析初步

下册

〔苏〕 A.H.柯尔莫果洛夫 C.B.佛明 著

段虞荣 郭思旭 郑洪深 译

高等教育出版社

函数论与泛函分析初步

下　册

[苏] A.H.柯尔莫果洛夫　C.B.佛明　著

段虞荣　郭思旭　郑洪深　译

高等教育出版社

（京）112号

内 容 提 要

本书的内容包括勒贝格不定积分，微分论，可和函数空间，三角级数，傅里叶变换，线性积分方程，线性空间微分学概要以及附录的巴拿赫代数等，可供高等学校数学专业的师生参考.

函数论与泛函分析初步

下 册

［苏］A.H.柯尔莫果洛夫 C.B.佛明 著

段虞荣 郭思旭 郑洪深 译

*

高等教育出版社出版

新华书店总店北京科技发行所发行

民族印刷厂印装

*

开本 850×1 168 1/32 印张 9.75 字数 230 000

1992 年5月第1版 1992 年5月第1次印刷

印数 0001—2 090

ISBN7-04-002989-8/O·935

定价6.00元

目　录

第六章　勒贝格不定积分．微分论

在这一章里，我们主要研究定义在直线上的函数的勒贝格积分．假定按其取积分的测度，是通常的线性勒贝格测度．

如果 f 是定义在具有测度 μ 的可测空间 X 上的可和函数，那么，对每一个可测集 $A\subset X$，积分

$$\int_A f(x)\,d\mu \tag{*}$$

存在；而对于固定的 f，积分(*)是集函数，它对于所有的可测子集 $A\subset X$ 有定义．这样的积分称为**勒贝格不定积分**．特别空间 X 可以是数轴上的闭区间．这时，如果 A 也是某一闭区间，那么积分(*)将是点对——线段 A 之端点的函数，我们将假定，在这种情形下测度 μ 就是通常的勒贝格测度，并将 $d\mu$ 写成 dt．在固定积分区间的一个端点(比方说左端点）之后，我们就可以作为单变量 x 的函数来研究闭区间 $[a,x]$ 上的积分 $\int_a^x f(t)\,dt$ 的性质．这个问题引导我们去讨论定义在直线上的某些重要函数类．在§5，将阐明，把固定的函数 f 之勒贝格积分作为集函数而进行研究的一般问题．

由分析学初等课程知，下面两个基本等式揭示出微分运算与积分运算之间的联系：如果 f 是连续函数，而 F 是有连续导数的函数，那么

1) $$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x),$$

2) $$\int_a^b F'(t)\,dt=F(b)-F(a).$$

试问：等式1)对于勒贝格意义下的可和函数是否成立？满足等式2)的函数类是怎样的（可能更广泛的）？

本章下面几节就研究这些问题.

§1. 单调函数. 积分对上限的可微性

1. 单调函数的基本性质 我们从下面明显但是重要的注解：如果函数 f 是非负的，则 $\Phi(x)$ 是单调非递减函数开始，研究作为上限的函数的勒贝格积分

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt \tag{1}$$

的性质. 其次，每一个可和函数是两个非负的可和函数之差：

$$f(t)=f_+(t)-f_-(t). \tag{2}$$

因此积分(1)可分解成两个单调非递减函数之差. 从而，作为上限的函数的勒贝格积分的研究，可以化为同一类型的单调函数的研究. 单调函数（不管它们的来源如何）具有一系列既简单又重要的性质. 我们现在对这些性质加以阐述.

让我们来回忆某些概念. 只要没有相反的声明，我们将处处讨论那些给定在某一闭区间上的函数.

函数 f 称为**单调非递减的**，倘若从 $x_1\leqslant x_2$ 推出

$$f(x_1)\leqslant f(x_2);$$

类似地定义单调非递增函数.

设 f 是直线上的任意函数. 极限①

$$\lim_{h\to 0+} f(x_0+h)$$

（如果它存在），称为函数 f 在点 x_0 的**右极限**，并用 $f(x_0+0)$ 表示. 类似地定义函数 f 在点 x_0 的**左极限** $f(x_0-0)$. 显然，等式

① 符号 $h\to 0+$ 表示 h 趋于零时仅取正值.

$f(x_0+0)=f(x_0-0)$表示函数 f 在点 x_0 或者连续，或者具有可去间断点．这两个极限存在但彼此不相等的点称为**第一类间断点**，而差 $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ 称为函数 f 在该点的**跃度**.

如果 $f(x_0)=f(x_0-0)$，那么 f 称为在点 x_0 **左连续**，而如果 $f(x_0)=f(x_0+0)$，那么 f 称为在该点**右连续**.

我们来揭示单调函数的一些基本性质．为明确计，我们将只讨论单调非递减函数，显然下面所说的一切可以自动移植到单调非递增函数.

1．每一个在$[a,b]$上单调非递减的函数 f 可测并且有界，从而可和.

事实上，根据单调性的定义，对于任意 $x\in[a,b]$，有

$$f(a)\leqslant f(x)\leqslant f(b).$$

其次，对于任何常数 c，集

$$A_c=\{x:f(x)<c\}$$

或者是闭区间，或者是半开区间(或者是空集)．事实上，设使$f(x)<c$ 的点存在，又设 d 是这些 x 的上确界．于是 A_c 或者是闭区间$[a,d]$或者是半开区间$[a,d)$.

2．单调函数只可能有第一类间断.

事实上，设 x_0 是$[a,b]$上的任意点，而 $x_n\to x_0$，并且 $x_n<x_0$．于是序列$\{f(x_n)\}$有下界和上界［例如函数值 $f(a)$和$f(b)$分别是下界和上界］．从而，它至少有一个极限点．但任何这样的序列若有若干个极限点显然就会与函数 f 的单调性相矛盾．这样一来，$f(x_0-0)$就存在．类似地可以确立 $f(x_0+0)$的存在性.

单调函数不一定是连续的．但是下面的结论是正确的.

3．单调函数之间断点的集合最多是可数的.

事实上，在闭区间$[a,b]$上的单调函数 f 的任何有限个跃度之和不超过 $f(b)-f(a)$．从而，对于任意 n，其跃度值大于 $1/n$的个

数是有限的. 对所有的 $n=1,2,\cdots$求和, 可见跃度的总数是有限的或可数的.

在单调函数中间最简单的是所谓**阶跃函数**. 它们可用下述方法来构造. 设在区间$[a,b]$上给定了有限个或可数个点

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

又设它们之中的每一个与正数 h_n 建立了对应关系, 并且$\sum\limits_n h_n<\infty$. 我们在$[a,b]$上定义函数 f, 令

$$f(x)=\sum_{x_n<x} h_n. \tag{3}$$

显然,这个函数是单调非递减的. 此外,它在每一点是左连续的①,而它的间断点全体与集$\{x_n\}$重合②,并且在点 x_n 的跃度等于 h_n. 事实上

$$f(x-0)=\lim_{\varepsilon\to 0+} f(x-\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0+}\sum_{x_n<x-\varepsilon} h_n,$$

但因每一个满足条件 $x_n<x$ 的 x_n, 当 ε 充分小时也满足条件 $x_n<x-\varepsilon$, 所以上式右端的极限等于 $\sum\limits_{x_n<x} h_n=f(x)$. 这样一来, $f(x-0)=f(x)$. 如果点 x 与诸点 x_n 之一重合, 比如说与 $x=x_0$ 重合, 那么

$$f(x_{n_0}+0)=\lim_{\varepsilon\to 0+} f(x_{n_0}+\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0+}\sum_{x_n<x_{n_0}+\varepsilon} h_n=\sum_{x_n\leqslant x_{n_0}} h_n,$$

① 要是我们用公式

$$f(x)=\sum_{x_n\leqslant x} h_n$$

来定义 f, 那么所得到的函数就会是右连续的.

② 只要诸点 x_n 中没有一个与 b 相重合, 因为 $x_n=b$ 未进入和式 (3) 中. 欲计算 b 点的跃度, 应考虑用半开区间$[a,b+\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$来代替$[a,b]$.

即 $f(x_{n_0}+0)-f(x_{n_0}-0)=h_{n_0}$.

最后，如果 x 与诸点 x_n 中间的任何一个都不重合，那么阶跃函数在该点是连续的（试证明之！）.

阶跃函数的最简单的类型是阶梯函数，它们的间断点可以排成一个单调序列

$$x_1<x_2<\cdots<x_n<\cdots.$$

在一般情形下阶跃函数可以具有更复杂的结构，例如，如果 $\{x_n\}$ 是闭区间 $[a,b]$ 上所有的有理点的集合，而 $h_n=1/2^n$，那么公式(3)定义了这样一个阶跃函数，它在有理点是间断的，而在无理点则是连续的.

单调函数的另一种类型，在某种意义上与阶跃函数正好相反，是所谓的连续单调函数. 下面的结论是成立的.

4. 每一个左连续的单调函数，可以表成连续的单调函数与（左连续的）阶跃函数之和，并且这种表示法是唯一的.

事实上，设 f 是一个非递减左连续函数，$x_1, x_2, \cdots$ 是它的全部间断点，而 $h_1, h_2, \cdots$ 是它在这些点上的跃度. 令

$$H(x)=\sum_{x_n<x} h_n.$$

差 $\varphi=f-H$ 是一个非递减的连续函数. 为了证明这一点让我们来考虑差

$$\varphi(x'')-\varphi(x')=[f(x'')-f(x')]-[H(x'')-H(x')],$$

其中 $x'<x''$. 这里，右端是函数 f 在闭区间 $[x', x'']$ 上的全增量与它在这个区间上的跃度之和的差. 显然，这个量是非负的，即 φ 是一个非递减函数. 其次，对于任意的点 x^*，有

$$\varphi(x^*-0)=f(x^*-0)-H(x^*-0)=f(x^*-0)-\sum_{x_n<x^*} h_n,$$

$$\varphi(x^*+0)=f(x^*+0)-H(x^*+0)=f(x^*+0)-\sum_{x_n\ x^*}h_n,$$

由此

$$\varphi(x^*+0)-\varphi(x^*-0)=f(x^*+0)-f(x^*-0)-h^*=0$$

(其中 h^*是函数H 在点 x^*的跃度). 由此从 f 的左连续性和 H的左连续性,可推出 φ 确是连续的.

2. 单调函数的可微性 现在我们转到讨论单调函数的导数存在的问题.

定理 1(勒贝格) 定义在闭区间 $[a, b]$ 上的单调函数 f 在该闭区间上几乎处处有有限导数.

首先引入某些在证明这个定理时需要用到的概念.

大家知道,函数 f 在点 x_0 的导数就是比式

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \tag{4}$$

当 $x\to x_0$ 时的极限. 这个极限当然可以不存在. 但是下面的四种量(它们也可以取无穷大值)总是有意义的:

$\Lambda_{右}$是比式(4)当 x 从 x_0 右方趋向于 x_0 时 (即使得 $x-x_0>0$) 的上极限. 这个量称为**右上导数**.

$\lambda_{右}$ (**右下导数**) 是比式 (4) 当 x 从 x_0 右方趋向于 x_0 时的下极限.

$\Lambda_{左}$(**左上导数**) 是比式(4) 当 x 从 x_0 左方趋向于 x_0 时的上极限.

$\lambda_{左}$(**左下导数**) 是比式 (4) 当 x 从 x_0 左方趋向于 x_0 时的下极限.

在图 19 上标明斜率分别为 $\Lambda_{右}$, $\lambda_{右}$, $\Lambda_{左}$, $\lambda_{左}$的直线. 显然,永远有

$$\lambda_{右}\leqslant\Lambda_{右} \text{ 和 } \lambda_{左}\leqslant\Lambda_{左}.$$

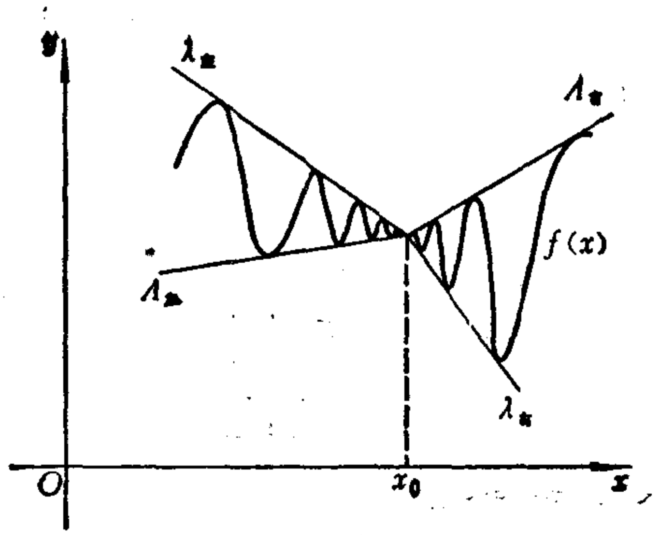

图 19

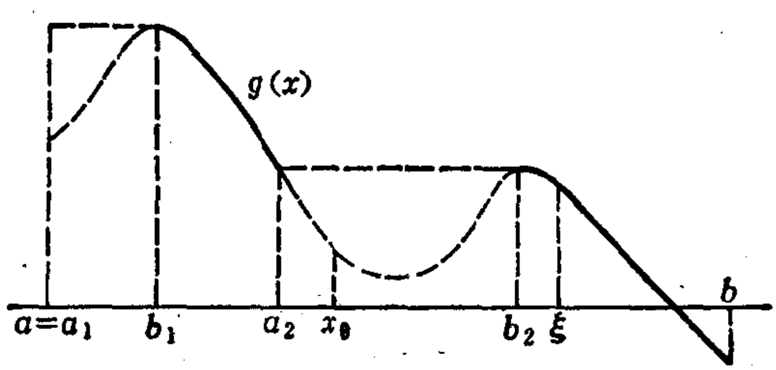

图 20

如果 $\Lambda_{右}$ 和 $\lambda_{右}$ 有限并且彼此相等，那么它们的这个公共值就是函数 $f(x)$ 在点 x_0 的右导数. 类似地，如果 $\Lambda_{左}=\lambda_{左}$，那么它们的公共值就是左导数. f 在点 x_0 有有限导数，等价于在该点函数 f 的所有导数都有限并且彼此相等. 因此勒贝格定理的结论可以陈述如下：对于在 $[a, b]$ 上单调的函数，关系式

$$-\infty<\lambda_{左}=\lambda_{右}=\Lambda_{左}=\Lambda_{右}<\infty$$

在 $[a, b]$ 上几乎处处成立.

习题 设 $f^*(x)=-f\ (x)$. 问 f^* 的导数与 f 的导数有什么关系？

当 $f(x)$ 变为 $f(-x)$ 时，试回答同样的问题.

勒贝格定理的证明以下面的引理为依据，而这个引理我们今后也将用到它.

我们引入下述定义. 设 $g(x)$ 是一个给定在闭区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的连续函数. 这个闭区间上的点 x_0 称为函数 g 的**右不可见点**，倘若存在这样一点 $\xi(x_0<\xi\leqslant b)$，使得 $g(x_0)<g(\xi)$（图 20）.

引理（黎茨） 对于任何一个连续函数 g，右不可见点的集合在闭区间$[a,b]$上是开的，从而可以表示成有限个或可数个两两互不相交的开区间(a_k,b_k)（也可能包含点 a 的半开区间）之和. 这些开区间的端点满足不等式

$$g(a_k)\leqslant g(b_k). \tag{5}$$

引理的证明 如果 x_0 是 g 的右不可见点，那么，根据 g 的连续性，任何一个充分接近 x_0 的点也将具有同一性质. 从而，这样的一些点所构成的集在$[a,b]$上是开的. 设(a_k,b_k)是它的构成区间之一，假定

$$g(a_k)>g(b_k). \tag{6}$$

那么在开区间(a_k,b_k)内可以找到一个内点 x_0 使得$g(x_0)>g(b_k)$. 设 x^* 是(a_k,b_k)内使 $g(x)=g(x_0)$的一切点 x 里的最右面的一点.

因为 $x^*\in(a_k,b_k)$，就有这样的点 $\xi>x^*$ 存在，使得 $g(\xi)>g(x^*)$. 点 ξ 不可能位于开区间(a_k,b_k)内，因为 x^* 是该开区间内使 $g(x)=g(x_0)$的最右的一点，然而 $g(b_k)<g(x_0)$. 另一方面，不等式 $\xi>b_k$ 也不可能成立，因为否则就会有 $g(b_k)<g(x_0)<g(\xi)$，然而 b_k 并不是右不可见点. 所得到的这个矛盾表明不等式(6)不成立，即 $g(a_k)\leqslant g(b_k)$，因而引理得证. 读者不难验证，实际上 $g(a_k)=g(b_k)$，只要 $a_k\neq a$.

注 我们称点 x_0 是连续函数 $g(x)$ 的**左不可见点**，倘若有这样的点 $\xi<x_0$ 存在，使得 $g(\xi)>g(x_0)$. 同样的推理可以证明，左不可见点的集合是有限个或可数个两两互不相交的开区间 $(a_k,$

b_k)(也可能包括含点 b 的半开区间)之和，并且

$$g(a_k)\geqslant g(b_k).$$

现在我们转到勒贝格定理本身的证明. 我们首先在 f 是单调非递减连续函数的假定下，证明该定理. 为此只需证明几乎处处有

1) $\Lambda_{右}<\infty$, 2) $\lambda_{左}\geqslant\Lambda_{右}$.

事实上，如果我们假定 $f^*(x)=-f(-x)$，那么定义在闭区间 $[-b,-a]$ 上的函数 f^* 也将是单调非递减的连续函数. 如果 $\Lambda^*_{右}$ 和 $\lambda^*_{左}$ 分别是 f^* 的右上导数和左下导数，那么容易验证（参看第7页中的习题），函数 f 和 f^* 在相应点上的导数满足等式 $\Lambda^*_{右}=\Lambda_{左}$ 和 $\lambda^*_{左}=\lambda_{右}$. 因此，把不等式 2)用于 $f^*(x)$，就得到

$$\lambda_{右}\geqslant\Lambda_{左}. \tag{7}$$

将所得到的这些不等式联结起来写成一个不等式链，再利用导数的定义，就有

$$\Lambda_{右}\leqslant\lambda_{左}\leqslant\Lambda_{左}\leqslant\lambda_{右}\leqslant\Lambda_{右}.$$

而这就表示

$$\lambda_{左}=\lambda_{右}=\Lambda_{左}=\Lambda_{右}.$$

我们首先来证明，几乎处处有 $\Lambda_{右}<\infty$. 如果在某一点 x_0 处有 $\Lambda_{右}=\infty$，那么对于任何常数 $C>0$，在点 x_0 之右可以找到这样一点 ξ，使得

$$\frac{f(\xi)-f(x_0)}{\xi-x_0}>C,$$

即

$$f(\xi)-f(x_0)>C(\xi-x_0),$$

或

$$f(\xi)-C\xi>f(x_0)-Cx_0.$$

换言之，点 x_0 是函数

$$g(x)=f(x)-Cx$$

的右不可见点. 根据黎茨引理，这样的点所构成的集是开的，而在组成它的那些开区间(a_k, b_k)的端点上满足不等式

$$f(a_k)-Ca_k \leqslant f(b_k)-Cb_k,$$

即

$$f(b_k)-f(a_k) \geqslant C(b_k-a_k).$$

将所得到的这些不等式除以 C，再对所有的开区间(a_k, b_k)求和，就得到

$$\sum_k (b_k-a_k) \leqslant \sum_k \frac{f(b_k)-f(a_k)}{C} \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{C}.$$

这里 C 可以取得任意地大. 这样一来，那些使 $\Lambda_{右}=\infty$ 的点所构成的集可以被一些开区间所覆盖，而且这些区间的长度之和可以任意地小. 从而，这个集的测度等于 0.

这个与黎茨引理有联系的方法，还可以用来证明几乎处处有 $\lambda_{左} \geqslant \Lambda_{右}$，但现在这个方法需要运用两次. 我们来考虑这样的有理数偶 c 和 C，其中 $0<c<C<\infty$. 令 $\rho=c/C$. 用 $E_{c,C}$ 表示那些使 $\Lambda_{右}>C$，而 $\lambda_{左}<c$ 的 x 的全体. 如果能证明 $\mu E_{c,C}=0$，那么由此可见几乎处处有 $\lambda_{左} \geqslant \Lambda_{右}$，因为那些使 $\lambda_{左}<\Lambda_{右}$ 的点所构成的集，显然，可以表示成最多是可数个形如 $E_{c,C}$ 的集之和.

现在我们来建立一个基本不等式.

对于任何开区间$(\alpha, \beta) \subset [a, b]$，有

$$\mu(E_{c,C} \cap (\alpha, \beta)) \leqslant \rho(\beta-\alpha).$$

事实上，我们首先考虑 (α, β) 中使 $\lambda_{左}<c$ 的那些点 x 所构成的集. 对于每一个这样的点 x，可以找到这样的 $\xi<x$，使得 $\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}<c$，即 $f(\xi)-c\xi>f(x)-cx$. 因此 x 是函数$f(x)-cx$ 的左不可见点，而根据黎茨引理（参看第 8 页中的注）这样的 x

所构成的集可以表示成不多于可数个两两不交的开区间 $(\alpha_k, \beta_k) \subset (\alpha, \beta)$之和，并且 $f(\alpha_k) - c\alpha_k \geqslant f(\beta_k) - c\beta_k$，即

$$f(\beta_k) - f(\alpha_k) \leqslant c(\beta_k - \alpha_k). \tag{8}$$

在每一个开区间(α_k, β_k)里考虑那些使 $\Lambda_{右} > C$ 的点 x 所构成的集 G_k. 仍运用黎茨引理（现在，正如对于右不可见点，证明不等式 $\Lambda_{右} < \infty$时一样），我们就得到，G_k 可以表示成不多于可数个两两不交的开区间$(\alpha_{kj}, \beta_{kj})$之和，并且

$$\beta_{kj} - \alpha_{kj} \leqslant \frac{1}{C}[f(\beta_{kj}) - f(\alpha_{kj})]. \tag{9}$$

显然，集 $E_{c,C} \cap (\alpha, \beta)$被诸开区间$(\alpha_{kj}, \beta_{kj})$ 所构成的集族所覆盖，并且根据(8)和(9)有

$$\begin{aligned}\sum_{k,j}(\beta_{kj} - \alpha_{kj}) &\leqslant \frac{1}{C}\sum_{k,j}[f(\beta_{kj}) - f(\alpha_{kj})] \\ &\leqslant \frac{1}{C}\sum_k [f(\beta_k) - f(\alpha_k)] \leqslant \frac{c}{C}\sum_k(\beta_k - \alpha_k) \\ &\leqslant \rho(\beta - \alpha),\end{aligned}$$

因而基本不等式得证.

现在容易证明 $\mu E_{c,C} = 0$.

这时只需利用集 $E_{c,C}$ 的那个由不等式所描述的性质.

引理 假设在闭区间 $[a,b]$ 上的可测集 A 具有这样的性质：对于任何开区间$(\alpha, \beta) \subset [a,b]$，满足不等式 $\mu(A \cap (\alpha, \beta)) \leqslant \rho(\beta - \alpha)$，其中 $0 < \rho < 1$. 那么 $\mu(A) = 0$.

证明 设 $\mu A = t$. 对于任何 $\varepsilon > 0$，存在这样一个开集 G：它等于可数个两两不交的开区间(a_m, b_m)之和，且使 $A \subset G$，$\sum_m (b_m - a_m) < t + \varepsilon$（参看第五章§5第7段中的习题）. 令 $t_m = \mu[A \cap (a_m, b_m)]$. 显然 $t = \sum_m t_m$. 根据引理条件，$t_m \leqslant \rho(b_m - a_m)$. 从而，