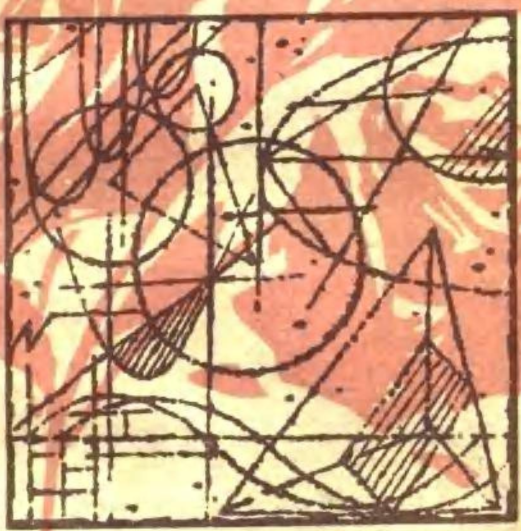
1951——1979

全国历届高考数学题解



河北人民出版社

全国历届高考数学题解

1951——1979

河北人民出版社

一九八〇年·石家庄

封面设计：微　山

全国历届高考数学题解

1951——1979

*

河北人民出版社出版

（石家庄市北马路19号）

河北新华印刷一厂印刷

河北省新华书店发行

*

787×1092毫米 1/32　6 1/2印张　151,000字

1979年6月第1版　1980年3月第2版

1980年3月第2次印刷

印数 350,001—2,003,000

统一书号 7086·1004　　定价 0.53元

出版说明

根据广大中学教师和学生的要求，我们编辑了《全国历届高考数学题解》、《全国历届高考物理题解》、《全国历届高考化学题解》，供教师、学生、知识青年参考。

《全国历届高考数学题解》汇集了1951年到1965年、1977年到1979年各届高考题，并对这些试题作了比较详细的解答。

本书由谷世菁同志汇编，虽经多次加工整理和校订，但仍难免有错误，望广大读者指正。

目 录

一九五一年

第一部分

1．设有方程组 $x+y=8$，$2x-y=7$，求x，y。

解：
$$\begin{cases}x+y=8 & \cdots\cdots① \\ 2x-y=7 & \cdots\cdots②\end{cases}$$

①+② 得

$$3x=15,$$
$$x=5.$$

将 $x=5$ 代入①中，得 $y=3$。

故方程组的解为 $\begin{cases}x=5, \\ y=3.\end{cases}$

2．若一三角形的重心与外接圆心重合，则此三角形为何种三角形？

答：此三角形为一等边三角形。现证明如下：

设 $\triangle ABC$ 的重心与外接圆的圆心均为 O（图 1）。因为 $OA=OC$，E 为 AC 的中点，所以 $BE\perp AC$；同理，$CD\perp AB$，$AF\perp BC$。在直角$\triangle ABE$ 与直角$\triangle ACD$ 中，$\angle A$ 为公用角，$BE=CD=R+\frac{1}{2}R=\frac{3}{2}R$（$R$ 为$\triangle ABC$ 的外接圆的半径），所以 $\triangle ABE\cong\triangle ACD$，$AB=AC$，同理可得 $AB=BC$。由此可知

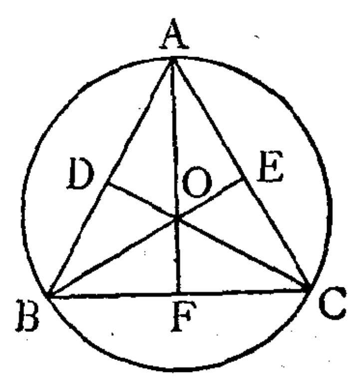


图 1

$\triangle ABC$ 为等边三角形。

3．当太阳的仰角是 60° 时，若旗杆影长为1丈，则旗杆长为若干丈？

解：由图2容易得到，旗杆长

$$AC = BC \cdot \mathrm{tg}60^\circ = \sqrt{3} \text{（丈）}.$$

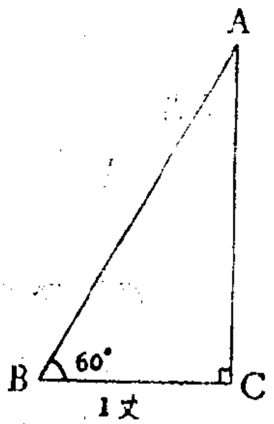


图 2

4．若 $\frac{x}{a-b} = \frac{y}{b-c} = \frac{z}{c-a}$，而 a,b,c 各不相等，则 $x+y+z=$？

解：设 $\frac{x}{a-b} = \frac{y}{b-c} = \frac{z}{c-a} = t$，

则有 $x=(a-b)t$，$y=(b-c)t$，$z=(c-a)t$。

由此可得

$$x+y+z=(a-b)t+(b-c)t+(c-a)t=0.$$

5．试题10道，选答8道，则选法有几种？

解：根据题意，选法共有

$$C_{10}^8 = C_{10}^2 = \frac{10\cdot 9}{1\cdot 2} = 45 \text{（种）}.$$

6．若一点 P 的极坐标是 (r,θ)，则它的直角坐标如何？

解：由极坐标与直角坐标的关系可得点 P 的直角坐标为：

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta.$$

7．若方程 $x^2+2x+k=0$ 的两根相等，则 $k=$？

解：因为方程 $x^2+2x+k=0$ 的两根相等，所以，其判别式 $\triangle=b^2-4ac=0$，即 $2^2-4\cdot 1\cdot k=0$，解之可得 $k=1$。

8．列举两种证明两个三角形相似的方法。

答：在两个三角形中，若有两组对应角相等，则这两个三角形相似。

在两个三角形中，若三组对应边成比例，则这两个三角形

相似。

9．当$(x+1)(x-2)<0$时，x的值的范围如何？

解：由$(x+1)(x-2)<0$可知，或者

$$\begin{cases}x+1>0\\x-2<0,\end{cases}$$

或者

$$\begin{cases}x+1<0\\x-2>0.\end{cases}$$

解不等式组

$$\begin{cases}x+1>0\\x-2<0\end{cases}$$

得$x>-1$，$x<2$，故有$-1<x<2$（图 3）。

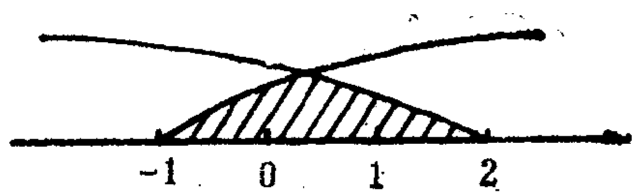


图 3

而不等式组

$$\begin{cases}x+1<0\\x-2>0\end{cases}$$

为矛盾的，无解。

10．若一直线通过原点且垂直于直线$ax+by+c=0$，求直线的方程。

解：由题设，所求的直线通过原点，所以其方程为$y=kx$，此处k为斜率。又由于此直线与直线$ax+by+c=0$即$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$垂直，所以$k\cdot\left(-\frac{a}{b}\right)=-1$，即$k=\frac{b}{a}$，于是，所求方程为

$$y=\frac{b}{a}x,$$

或

$$bx-ay=0.$$

11．$\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$展开式中的常数项如何？

解：由二项展开式的一般项公式可得

$$T_{r+1}=C_6^r x^{6-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r=C_6^r x^{6-r}\cdot x^{-r}=C_6^r x^{6-2r}$$

令 $6-2r=0$，可得 $r=3$。

于是，所求之常数项为

$$T_4=C_6^3 x^{6-3}\left(\frac{1}{x}\right)^3=C_6^3=20。$$

12．$\cos 2\theta=0$ 的通解是什么？

解：$\because \quad 2\theta=2k\pi\pm\frac{\pi}{2},$

$\therefore \quad \theta=k\pi\pm\frac{\pi}{4}$．（$k$为整数）

13．系数是实数的一元三次方程，最少有几个根是实数，最多有几个根是实数？

答：系数是实数的一元三次方程，最少有一个实根，最多有三个实根。

14．$\begin{vmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -5 & 0 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}=?$

解：原式 $=(-2)\cdot 0\cdot 3+4\cdot 5\cdot 5+(-5)\cdot 4\cdot 5-5\cdot 0\cdot 5$

$-5\cdot 4\cdot(-2)-4\cdot(-5)\cdot 3$

$=100-100+40+60$

$=100$。

15．$x^2-4y^2=1$ 的渐近线的方程如何？

解：由已知方程 $x^2-4y^2=1$ 得

$$\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1,$$

故其渐近线方程为

$$y=\pm\frac{1}{2}x,$$

即 $$x\pm 2y=0.$$

16．三平行平面与一直线交于 A，B，C 三点，又与另一直线交于 A'，B'，C' 三点，已知 $AB=3$，$BC=7$，及 $A'B'=9$，求 $A'C'$。

解：设三个互相平行的平面为 α,β,γ（图4）。

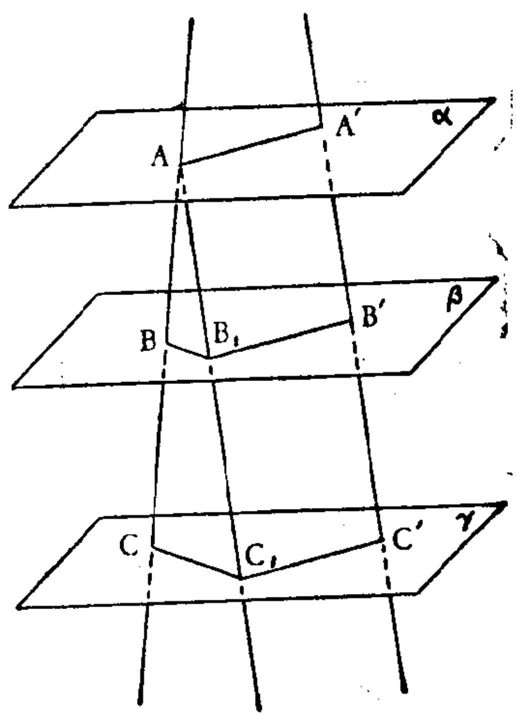


图 4

过点 A 作直线 $AC_1\parallel A'C'$，与平面 β，γ 分别交于点 B_1 和 C_1，则 $AC_1=A'C'$。

$\because$ 平面 $\beta\parallel$ 平面 γ，

$\therefore$ $\triangle ABB_1\backsim\triangle ACC_1$，

$\therefore$ $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AB_1}{AC_1}$，

$\dfrac{3}{10}=\dfrac{9}{AC_1}$，

$\therefore$ $AC_1=30$，

$\therefore$ $A'C'=30$。

17．有同底同高的圆柱及圆锥，已知圆柱的体积为18立方尺，求圆锥的体积。

解：已知 $V_{柱}=18$，而 $V_{柱}=\pi R^2h$，

$$\therefore \quad \pi R^2 = \frac{18}{h},$$

由此可得

$$V_{锥} = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\cdot\frac{18}{h}\cdot h = 6（立方尺）.$$

18. 已知 $\lg 2 = 0.3010$，求 $\lg 5$.

解：$\lg 5 = \lg\frac{10}{2} = 1 - \lg 2 = 1 - 0.3010 = 0.6990.$

19. 二抛物线 $y^2 = 12x$ 与 $2x^2 = 3y$ 的公共弦的长度是多少？

解：解方程组

$$\begin{cases} y^2 = 12x \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ 2x^2 = 3y \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

由①÷②可得

$$\frac{y^2}{3y} = \frac{12x}{2x^2},$$

$$\frac{y}{3} = \frac{6}{x},$$

$$x = \frac{18}{y}.$$

将 $x = \frac{18}{y}$ 代入①，可得

$$y^2 = 12\cdot\frac{18}{y},$$

$$y^3 = 12\cdot 18,$$

$$\therefore \quad y = 6.$$

于是，$x = 3$.

由此可得，二抛物线的两个公共点为 (0, 0) 及 (3, 6)，故其公共弦的长度为

$$d=\sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}.$$

20．国旗上的正五角星的每一个顶角是多少度？

解：由图 5 可看出

$\angle AFG=\angle C+\angle E=2\angle C,$

$\angle AGF=\angle B+\angle D=2\angle B,$

$\therefore\quad \angle A+\angle AFG+\angle AGF$

$=\angle A+2\angle C+2\angle B=5\angle A,$

$\therefore\quad 5\angle A=180°,$

$\therefore\quad \angle A=\frac{1}{5}\times180°=36°.$

即正五角形的每一个顶角为 36°.

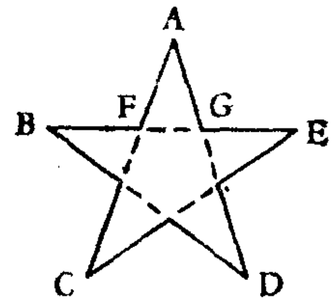


图 5

第 二 部 分

1．P,Q,R 顺次为 $\triangle ABC$ 中 BC,CA,AB 三边的中点，求证圆 ABC 在 A 点的切线与圆 PQR 在 P 点的切线平行.

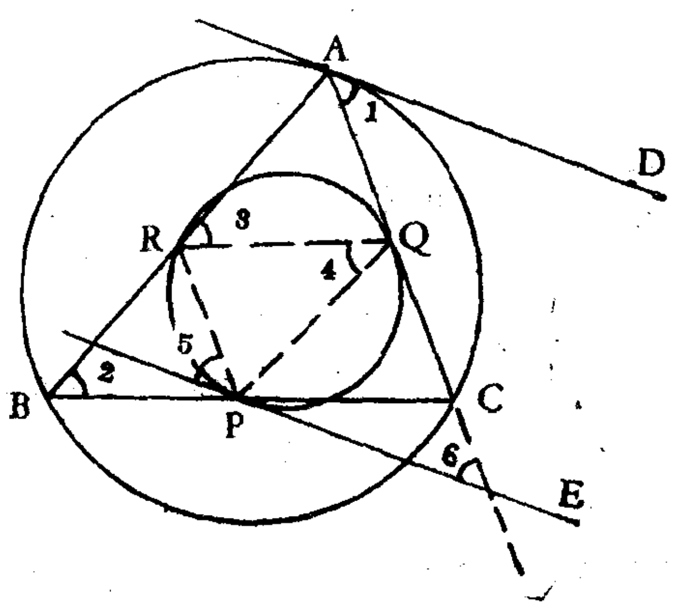


图 6

证：如图6，由AD是大圆的切线，可得

$$\angle 1=\angle 2.$$

由$RQ /\!/ BC$，可得 $\angle 2=\angle 3$.

由$QP /\!/ AB$，可得 $\angle 3=\angle 4$.

由PE是小圆的切线，可得

$$\angle 4=\angle 5.$$

又由$RP /\!/ AC$，可得

$$\angle 5=\angle 6.$$

综上可得 $\angle 1=\angle 6$，故 $AD /\!/ PE$.

2．设$\triangle ABC$三边 $BC=4pq$，$CA=3p^2+q^2$，$AB=3p^2+2pq-q^2$，求$\angle B$，并证$\angle B$为$\angle A$及$\angle C$的等差中项.

解：由余弦定理可得

$$\begin{aligned}\cos B&=\frac{AB^2+BC^2-CA^2}{2AB\cdot BC}\\&=\frac{(3p^2+2pq-q^2)^2+(4pq)^2-(3p^2+q^2)^2}{2(3p^2+2pq-q^2)\cdot 4pq}\\&=\frac{1}{2},\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \angle B=60^\circ.$$

$$\begin{aligned}\because\quad \angle C-\angle B&=(180^\circ-\angle A-\angle B)-\angle B\\&=180^\circ-2\angle B-\angle A\\&=60^\circ-\angle A\\&=\angle B-\angle A,\end{aligned}$$

$\therefore$ $\angle B$是$\angle A$与$\angle C$的等差中项.

3．(i) 求证，若方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 的三个根可排成等比数列，

则 $$a^3c=b^3.$$

证：设 α,β,γ 为方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 的三个根，由根与系数的关系可知

$$\alpha+\beta+\gamma=-a,$$
$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b,$$
$$\alpha\beta\gamma=-c.$$

又因 α,β,γ 排成等比数列，于是 $\beta^2=\alpha\gamma$。

$$\left(\frac{b}{a}\right)^3=\left[\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{-(\alpha+\beta+\gamma)}\right]^3=-\left[\frac{(\alpha+\gamma)\beta+\beta^2}{\alpha+\beta+\gamma}\right]^3$$

$$=-\left[\frac{(\alpha+\beta+\gamma)\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\right]^3=-\beta^3=-\alpha\beta\gamma=c.$$

此即 $$a^3c=b^3.$$

(ii) 已知方程 $x^3+7x^2-21x-27=0$ 的三个根可以排成等比数列，求三根。

解：由(i) 可知 $\beta^3=-c$，

$$\therefore\quad \beta^3=27,\qquad\qquad \therefore\quad \beta=3.$$

将 $\beta=3$ 代入 $\alpha+\beta+\gamma=-7$ 可得

$$\alpha+\gamma=-10,$$

又由 α,β,γ 成等比数列，

$$\therefore\quad \beta^2=\alpha\gamma,$$

即 $$\alpha\gamma=9,$$

故可得方程组

$$\begin{cases}\alpha+\gamma=-10\\ \alpha\cdot\gamma=9.\end{cases}$$

解之，可得 $\alpha=-9$ 或 -1，$\gamma=-1$ 或 -9。

于是，所求之三个根为 $-9,3,-1$ 或 $-1,3,-9$。

4．过抛物线顶点任做互相垂直的两弦，交此抛物线于两点，求证此两点联线的中点的轨迹仍为一抛物线。

证：设抛物线方程为

$$y^2 = 2px \cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

过抛物线的顶点 O 任作互相垂直的二弦 OA 和 OB（图 7）。设 OA 的斜率为 k，则 OB 的斜率为 $-\frac{1}{k}$。于是直线 OA 的方程为

$$y = kx \cdots\cdots\cdots\cdots\text{②}$$

直线 OB 的方程为

$$y = -\frac{1}{k}x \cdots\cdots\cdots\cdots\text{③}$$

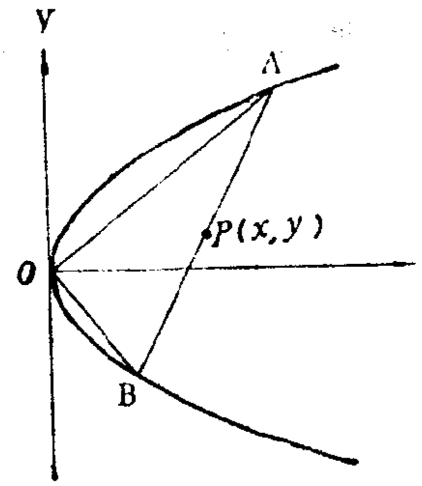


图 7

设点 $A(x_1, y_1)$，点 $B(x_2, y_2)$，由①、②可得

$$x_1 = \frac{2p}{k^2}, \qquad y_1 = \frac{2p}{k}.$$

由①、③可得

$$x_2 = 2pk^2, \qquad y_2 = -2pk.$$

联结 AB，且设 $P(x, y)$ 为 AB 的中点，由上可得

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{p}{k^2} + pk^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\text{④}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{p}{k} - pk \cdots\cdots\cdots\cdots\text{⑤}$$

由⑤可得

$$y^2 = \frac{p^2}{k^2} - 2p^2 + p^2k^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\text{⑥}$$

由④可知 $px = \frac{p^2}{k^2} + p^2k^2$，代入⑥

$$y^2=\left(\frac{p^2}{k^2}+p^2k^2\right)-2p^2$$

$$=px-2p^2$$

即 $$y^2=px-2p^2,$$

所以，点 p 的轨迹为一抛物线。

一九五二年

第一部分

1. 因式分解 $x^4-y^4=?$

解：$x^4-y^4=(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$.

2. 若 $\lg 2x=21\lg x$，问 $x=?$

解：$\lg 2x=\lg x^{21}$,

$$\therefore\quad 2x=x^{21},$$

由

$$x\neq 0,$$

$$\therefore\quad x^{20}=2,$$

$$\therefore\quad x=\sqrt[20]{2}.$$

3. 若方程 $x^3+bx^2+cx+d=0$ 的三根为 $1, -1, \frac{1}{2}$，则 $c=?$

解：由根与系数的关系可知

$$c=1\cdot(-1)+(-1)\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 1=-1.$$

4. 若 $\sqrt{x^2+7}-4=0$，求 x.

解：$\sqrt{x^2+7}=4$,

等式两边平方，得

$$x^2+7=16,$$

$$x^2=9,$$

$$\therefore\quad x=\pm 3.$$

经检验，$x=\pm 3$ 均为原方程的根.