高等学校教材

工程数学

线性代数

（第二版）

同济大学数学教研室　编

高等教育出版社

高等学校教材

工程数学

线性代数

（第二版）

同济大学数学教研室　编

高等教育出版社

（京）112 号

内 容 提 要

本书第二版仍由同济大学数学教研室骆承钦同志承担修订工作，他根据教学实践中所积累的经验，吸取了使用第一版的同行们所提出的宝贵意见，并参照1987年审定的高等工业学校《线性代数课程教学基本要求》进行修订．这次修订，改动最多的是第三章，其他一、二、四、五各章，也不同程度地对定理的表述和论证有所加强．对例、习题有所增加或修改，使本教材更接近于基本要求，更适宜于教学．原第六章线性空间与线性变换超过基本要求，加 * 号后供要求较高的学生选学．

本书内容为 n 阶行列式、矩阵及其运算、向量组的线性相关性与矩阵的秩、线性方程组、相似矩阵及二次型、线性空间与线性变换等六章，书末还附有习题答案．

本书可供高等工业院校各专业使用，也可供科技工作者阅读．

责任编辑　丁鹤龄

图书在版编目（CIP）数据

工程数学：线性代数/同济大学数学教研室编．—2版．
北京：高等教育出版社，1991.8（1998重印）
ISBN 7-04-003490-5

Ⅰ．工…　Ⅱ．同…　Ⅲ．①工程数学-高等教育-教材②线性代数-高等教育-教材Ⅳ．①TB11②O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（96）第 00525 号

*

高等教育出版社出版
新华书店总店北京科技发行所发行
河北新华印刷一厂印装

*

开本 850×1168　1/32　印张 5.5　字数 130 000
1982年3月第1版　1991年8月第2版　1998年1月第12次印刷
印数 1 439 623—1 659 632
定价：5.50元

第一版前言

同济大学数学教研室主编的《高等数学》(1978 年第 1 版) 年前决定修订再版，其中的第十三章线性代数决定单独成书，以便应用. 为此，由同济大学骆承钦同志把《高等数学》第十三章改编成本书. 在改编时，对原教材作了较多的修改与补充，以期能较为符合 1980 年制订的教学大纲的要求.

本书介绍线性代数的一些基本知识，可作为高等工业院校工程数学《线性代数》课程的试用教材和教学参考书. 本书前五章教学时数约 34 学时，第六章较多地带有理科的色彩，供对数学要求较高的专业选用. 各章配有少量习题，书末附有习题答案.

参加本书审稿的有上海海运学院陆子芬教授 (主审)、浙江大学盛骤、孙玉麟等同志. 他们认真审阅了原稿，并提出了不少改进意见，对此我们表示衷心感谢.

编　者

一九八一年十一月

第二版前言

本书第一版自1982年出版以来，我们采用它作为教材，已经经历了多次的教学实践．这次我们根据在实践中积累的一些经验，并吸取使用本书的同行们所提出的宝贵意见，将它的部分内容作了修改，成为第二版．

这次修订，对第三章和第四章改动稍大，第一、二、五章也有改动，并增加了少量习题．此外，对超出国家教委于1987年审定的高等工业学校《线性代数课程教学基本要求》的内容加了*号．这次修订工作仍由同济大学骆承钦同志承担．

北京印刷学院盛祥耀教授详细审阅了本修订稿，并提出了许多改进的意见，谨在此表示衷心的感谢．此外，我们还向关心本书和对本书第一版提出宝贵意见的同志们表示深切的谢意．

编　者

一九九〇年十二月

目　　录

第一章　n 阶行列式

在初等数学中讨论过二阶、三阶行列式，并且利用它们来解二元、三元线性方程组. 为了研究 n 元线性方程组，需要把行列式推广到 n 阶，即讨论 n 阶行列式的问题. 为此，下面先介绍全排列等知识，然后引出 n 阶行列式的概念.

§1　全排列及其逆序数

先看一个例子.

引例　用 1、2、3 三个数字，可以组成多少个没有重复数字的三位数?

解　这个问题相当于说，把三个数字分别放在百位、十位与个位上，有几种不同的放法?

显然，百位上可以从 1、2、3 三个数字中任选一个，所以有 3 种放法；十位上只能从剩下的两个数字中选一个，所以有 2 种放法；而个位上只能放最后剩下的一个数字，所以只有 1 种放法. 因此，共有 $3\times2\times1=6$ 种放法.

这六个不同的三位数是：

123，132，213，231，312，321.

在数学中，把考察的对象，例如上例中的数字 1、2、3 叫做元素. 上述问题就是：把 3 个不同的元素排成一列，共有几种不同的排法?

对于 n 个不同的元素，也可以提出类似的问题：把 n 个不同的元素排成一列，共有几种不同的排法?

把 n 个不同的元素排成一列，叫做这 n 个元素的全排列（也简称排列）.

n 个不同元素的所有排列的种数，通常用 P_n 表示. 由引例的结果可知 $P_3=3\cdot 2\cdot 1=6$.

为了得出计算 P_n 的公式，可以仿照引例进行讨论：

从 n 个元素中任取一个放在第一个位置上，有 n 种取法；

又从剩下的 $n-1$ 个元素中任取一个放在第二个位置上，有 $n-1$ 种取法；

这样继续下去，直到最后只剩下一个元素放在第 n 个位置上，只有 1 种取法. 于是

$$P_n = n\cdot(n-1)\cdots\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$$

对于 n 个不同的元素，我们规定各元素之间有一个标准次序（例如 n 个不同的自然数，可规定由小到大为标准次序），于是在这 n 个元素的任一排列中，当某两个元素的先后次序与标准次序不同时，就说有 1 个逆序. 一个排列中所有逆序的总数叫做这个排列的逆序数.

逆序数为奇数的排列叫做奇排列，逆序数为偶数的排列叫做偶排列.

下面我们来讨论计算排列的逆序数的方法.

不失一般性，不妨设 n 个元素为 1 至 n 这 n 个自然数，并规定由小到大为标准次序. 设

$$p_1p_2\cdots p_n$$

为这 n 个自然数的一个排列，考虑元素 p_i $(i=1, 2, \cdots, n)$，如果比 p_i 大的且排在 p_i 前面的元素有 t_i 个，就说 p_i 这个元素的逆序数是 t_i. 全体元素的逆序数之总和

$$t = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{i=1}^{n} t_i,$$

即是这个排列的逆序数.

例 1 求排列 32514 的逆序数.

解 在排列 32514 中,

3 排在首位, 逆序数总为 0;

2 的前面比 2 大的数有一个 (3), 故逆序数为 1;

5 是最大数, 逆序数总为 0;

1 的前面比 1 大的数有三个 (3、2、5), 故逆序数为 3;

4 的前面比 4 大的数有一个 (5), 故逆序数为 1;

于是排列的逆序数为

$$t = 0 + 1 + 0 + 3 + 1 = 5.$$

§2 n 阶行列式的定义

为了作出 n 阶行列式的定义, 我们先研究三阶行列式的结构. 三阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \quad (1)$$

容易看出:

(i) (1) 式右边的每一项都恰是三个元素的乘积, 这三个元素位于不同的行、不同的列. 因此, (1) 式右端的任意项除正负号外可以写以 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$. 这里第一个下标 (称行标) 排成标准排列 123, 而第二个下标 (称列标) 排成 $p_1p_2p_3$, 它是 1、2、3 三个数的某个排列. 这样的排列共有 6 种, 对应 (1) 式右端共含 6 项.

(ii) 各项的正负号与列标的排列对照:

带正号的三项列标排列是: 123, 231, 312;

带负号的三项列标排列是: 132, 213, 321.

经济算可知前三个排列都是偶排列，而后三个排列都是奇排列. 因此各项所带的正负号可以表示为 $(-1)^t$，其中 t 为列标排列的逆序数.

总之，三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

其中 t 为排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数，Σ 表示对 1、2、3 三个数的所有排列 $p_1p_2p_3$ 取和.

仿此，我们可以把行列式推广到一般情形.

定义 设有 n^2 个数，排成 n 行 n 列的表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}, \end{matrix}$$

作出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积，并冠以符号 $(-1)^t$，得到形如

$$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \tag{2}$$

的项，其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 1，2，…，n 的一个排列，t 为这个排列的逆序数. 由于这样的排列共有 $n!$ 个，因而形如 (2) 式的项共有 $n!$ 项. 所有这 $n!$ 项的代数和

$$\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

称为n 阶行列式，记作

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

简记作 $\Delta(a_{ij})$. 数 a_{ij}称为行列式 $\Delta(a_{ij})$ 的元素.

按此定义的二阶、三阶行列式，与用对角线法则定义的二阶、三阶行列式，显然是一致的．当 $n=1$ 时，$|a|=a$，注意不要与绝对值记号相混淆．

例 2 证明对角行列式（其中对角线上的元素是 λ_i，未写出的元素都是 0）

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n;$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

证 第一式是显然的，下面只证第二式．

若记 $\lambda_i=a_{i,n-i+1}$，则依行列式定义

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^t a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1} = (-1)^t\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,$$

其中 t 为排列 $n\ (n-1)\ \cdots 21$ 的逆序数，故

$$t = 0+1+2+\cdots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$ 证毕

对角线以下（上）的元素都为 0 的行列式叫做上（下）三角行列式，它的值与对角行列式一样．

例 3 证明下三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证 由于当 $j>i$ 时，$a_{ij}=0$，故 D 中可能不为 0 的元素 a_{ip_i}，其下标应有 $p_i\leqslant i$，即 $p_1\leqslant 1$，$p_2\leqslant 2$，…，$p_n\leqslant n$.

在所有排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中，能满足上述关系的排列只有一个自然排列 $12\cdots n$，所以 D 中可能不为 0 的项只有一项 $(-1)^t a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. 此项的符号 $(-1)^t=(-1)^0=1$，所以

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 4 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & 0 & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_1=\Delta(a_{ij})=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\Delta(b_{ij})=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

证明 $D=D_1D_2$.

证 记 $D=\Delta\ (d_{ij})$，其中

$$d_{ij}=a_{ij},(i=1,\cdots,k;j=1,\cdots,k)$$

$$d_{k+i,k+j}=b_{ij},(i=1,\cdots,n;j=1,\cdots,n).$$

考察 D 的一般项

$$(-1)^l d_{1r_1}\cdots d_{kr_k}d_{k+1,\ r_{k+1}}\cdots d_{k+n,r_{k+n}},$$

由于当 $i\leqslant k$，$j>k$ 时，$d_{ij}=0$，因此 r_1，…，r_k 只有在 1，…，k 中选取时，该项才可能不为零．而当 r_1，…，r_k 在 1，…，k 中选取时，r_{k+1}，…，r_{k+n}只能在 $k+1$，…，$k+n$ 中选取．于是 D 中可能不为零的项可以记作

$$(-1)^l a_{1p_1}\cdots a_{kp_k}b_{1q_1}\cdots b_{nq_n}.$$

这里，$p_i=r_i$，$q_i=r_{k+i}-k$，而 l 为排列 $p_1\cdots p_k$ $(k+q_1)$ … $(k+q_n)$ 的逆序数．以 t、s 分别表示排列 $p_1\cdots p_k$ 及 $q_1\cdots q_n$ 的逆序数，应有 $l=t+s$．于是

$$\begin{aligned}
D &= \sum_{p_1\cdots p_k}\sum_{q_1\cdots q_n}(-1)^{t+s}a_{1p_1}\cdots a_{kp_k}b_{1q_1}\cdots b_{nq_n}\\
&=\sum_{p_1\cdots p_k}(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{kp_k}\Big[\sum_{q_1\cdots q_n}(-1)^s b_{1q_1}\cdots b_{nq_n}\Big]\\
&=\sum_{p_1\cdots p_k}(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{kp_k}D_2\\
&=\Big[\sum_{p_1\cdots p_k}(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{kp_k}\Big]D_2\\
&=D_1D_2.
\end{aligned}$$

§3 对　　换

为了研究 n 阶行列式的性质，我们先来讨论对换以及它与排列的奇偶性的关系．

在排列中，将任意两个元素对调，其余的元素不动，这种作出新排列的手续叫做对换．将相邻两个元素对换，叫做相邻对换．

定理 1　一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性．

证　先证相邻对换的情形．

设排列为 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$，对换 a 与 b，变为 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$.

显然，a_1，…，a_l；b_1，…，b_m 这些元素的逆序数经过对换并不改变，而 a，b 两元素的逆序数改变为：当 $a<b$ 时，经对换后 a 的逆序数增加 1 而 b 的逆序数不变；当 $a>b$ 时，经对换后 a 的逆序数不变而 b 的逆序数减少 1. 所以排列 $a_1\cdots a_labb_1\cdots b_m$ 与排列 $a_1\cdots a_lbab_1\cdots b_m$ 的奇偶性不同.

再证一般对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_lab_1\cdots b_mbc_1\cdots c_n$，把它作 m 次相邻对换，调成 $a_1\cdots a_labb_1\cdots b_mc_1\cdots c_n$，再作 $m+1$ 次相邻对换，调成 $a_1\cdots a_lbb_1\cdots b_mac_1\cdots c_n$. 总之，经 $2m+1$ 次相邻对换，排列 $a_1\cdots a_lab_1\cdots b_mbc_1\cdots c_n$ 调成排列 $a_1\cdots a_lbb_1\cdots b_mac_1\cdots c_n$，所以这两个排列的奇偶性相反.

推论　奇排列调成标准排列的对换次数为奇数，偶排列调成标准排列的对换次数为偶数.

证　由定理 1 知对换的次数就是排列奇偶性的变化次数，而标准排列是偶排列（逆序数为 0），因此知推论成立.　　证毕

利用定理 1，我们来讨论行列式定义的另一种表示法.

对于行列式的任一项

$$(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n},$$

其中 $1\cdots i\cdots j\cdots n$ 为自然排列，t 为排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 的逆序数，对换元素 a_{ip_i} 与 a_{jp_j} 成

$$(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n},$$

这时，这一项的值不变，而行标排列与列标排列同时作了一次相应的对换. 设新的行标排列 $1\cdots j\cdots i\cdots n$ 的逆序数为 r，则 r 为奇数；设新的列标排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 的逆序数为 t_1，则

$(-1)^{t_1}=-(-1)^t$. 故 $(-1)^t=(-1)^{r+t_1}$，于是

$$(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}=(-1)^{r+t_1}a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}.$$

这就表明，对换乘积中两元素的次序，从而行标排列与列标

排列同时作了相应的对换，则行标排列与列标排列的逆序数之和并不改变奇偶性. 经一次对换是如此，经多次对换当然还是如此. 于是，经过若干次对换，使：

列标排列 $p_1p_2\cdots p_n$(逆序数为 t)变为自然排列(逆序数为 0)；

行标排列则相应地从自然排列变为某个新的排列，设此新排列为 $q_1q_2\cdots q_n$，其逆序数为 s，则有

$$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} = (-1)^s a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}.$$

又，若 $p_i=j$，则 $q_j=i$ (即 $a_{ip_i}=a_{ij}=a_{q_jj}$). 可见排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 由排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 所唯一确定.

由此可得

定理 2　n 阶行列式也可定义为

$$D = \Sigma(-1)^t a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn},$$

其中 t 为行标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数.

证　按行列式定义有

$$D = \Sigma(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

记
$$D_1=\Sigma(-1)^t a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}.$$

按上面讨论知：对于 D 中任一项 $(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，总有且仅有 D_1 中的某一项 $(-1)^s a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}$与之对应并相等；反之，对于 D_1 中的任一项 $(-1)^t a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$，也总有且仅有 D 中的某一项 $(-1)^s a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}$与之对应并相等，于是 D 与 D_1 中的项可以一一对应并相等，从而 $D=D_1$.

§4　行列式的性质

记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

行列式 D' 称为行列式 D 的转置行列式.

性质 1　行列式与它的转置行列式相等.

证　记 $D=\Delta(a_{ij})$ 的转置行列式

$$D' = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

即 $b_{ij}=a_{ji}$ $(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，按定义

$$D' = \Sigma(-1)^t b_{1p_1} b_{2p_2} \cdots b_{np_n} = \Sigma(-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}.$$

而由定理 2，有

$$D = \Sigma(-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n},$$

故 $$D'=D.$$ 证毕

由此性质可知，行列式中的行与列具有同等的地位，行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立，反之亦然.

性质 2　互换行列式的两行（列），行列式变号.

证　设行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

是由行列式 $D=\Delta(a_{ij})$ 交换 i，j 两行得到的，即当 $k\neq i$，j 时，$b_{kp}=a_{kp}$；当 $k=i$，j 时，$b_{ip}=a_{jp}$，$b_{jp}=a_{ip}$. 于是

$$\begin{aligned} D_1 &= \Sigma(-1)^t b_{1p_1} \cdots b_{ip_i} \cdots b_{jp_j} \cdots b_{np_n} \\ &= \Sigma\ (-1)^t a_{1p_1} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{np_n} \\ &= \Sigma\ (-1)^t a_{1p_1} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{np_n}, \end{aligned}$$

其中 $1\cdots i\cdots j\cdots n$ 为自然排列，t 为排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 的逆序数.
设排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 的逆序数为 t_1，则 $(-1)^t=-(-1)^{t_1}$，故