

BAOXINGYINGZHAO
SHOUCE

保形映照手册

黄先春 编译

华中工学院出版社

保形映照手册

黄先春 编译

林化夷 审校

丁月1/22/07

华中工学院出版社

保形映照手册

黄先春 编译

林化夷 审校

责任编辑 王东记

•

华中工学院出版社出版

(武昌喻家山)

湖北省新华书店发行

华中工学院出版社沔阳印刷厂印刷

•

开本: 787×1092 1/32 印张: 7.375 字数: 161,000字

1985年7月第1版 1985年7月第1次印刷

印数: 1—5,000

统一书号: 13255-034 定价: 1.65 元

内 容 提 要

本书汇集了保形映照公式近150条，其主要内容是初等函数和超越函数的变换公式及其所实现的区域之间的映照，并介绍了这些公式的使用方法。

本书是一本工具书，可供理工科大学师生、研究生，特别是从事无线电、电磁学、力学和传热学等研究的工程技术人员查阅。

目 录

序.....	1
记号与术语	2

第一部分

线性和双线性变换

§ 1	$w = \frac{az+b}{cz+d}$ ($ad-bc \neq 0$) 的不动点	5
§ 2	线性变换 $w = az+b$ ($a \neq 0$)	6
2.1	$w = az$ ($a \neq 0$)	6
2.2	$w = z+b$	6
2.3	$w = az+b$ ($a \neq 1$)	6
§ 3	双线性变换 $w = \frac{az+b}{cz+d}$ ($c \neq 0, ad-bc \neq 0$)	7
3.1	$w = \frac{az+b}{cz+d}$	7
3.2	平行于轴的直线	8
3.3	其它直线和圆	10
§ 4	特殊双线性变换	13
4.1	$w = \frac{1}{z}$	13
4.2	$w = \frac{1}{1-z}$	16
4.3	$w = \frac{z}{z-1}$	17
4.4	$w = \frac{z+1}{z-1}$	18

4.5	$w = \frac{z-i}{z+i}$	19
§ 5	线性和双线性变换的结构	21
5.1	三点对应三点	21
5.2	直线对应直线	23
5.3	直线对应圆	24
5.4	圆对应直线	25
5.5	圆对应圆	25
5.6	圆和直线相切对应两条平行直线	26
5.7	两个圆相切对应两条平行直线	27
5.8	相交于两点的两圆对应两条相交直线	31
5.9	圆与直线相离对应两个同心圆	34
5.10	相离两圆对应两个同心圆	36
附录:	综合应用第一部分公式的举例	39

第二部分

代数函数和 $w = z^a$ (a 为实数)

§ 6	函数 $w = z^2$, $w = z^a$, $w = az^a + bz^b$	42
6.1	$w = z^2$, $z = \sqrt{w}$	42
	抛物线	
	等轴双曲线	
	心脏线和蚶线	
	卡西尼卵形线	
	$w = az^2 + bz + c$, ($a \neq 0$)	
6.2	角域映照为半平面	48
	广义的抛物线和双曲线	
	广义的卡西尼卵形线	
	心脏线、广义心脏线和双纽线	
	$w = az^a + bz^{-a}$, $a > 0$, $ab \neq 0$	

$$w = az^\beta + bz^\gamma, \gamma < 0 < \beta$$

$$6.3 \quad w = z^\alpha - z^\beta, 0 < \alpha < \beta \dots\dots\dots 55$$

$$w = az^\alpha + bz^\beta, ab \neq 0, 0 < \alpha < \beta$$

§ 7	由两个或三个圆的弧段或直线段所界定的区域映照为半平面	57
-----	----------------------------	----

7.1	两个圆弧所界定的区域映照为半平面	57
-----	------------------	----

7.2	扇形域映照为上半平面	61
-----	------------	----

7.3	具有两个直角的曲边三角形映照为半平面	63
-----	--------------------	----

7.4	角度为 $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{\pi}{3}$ 的曲边三角形映照为半平面	65
-----	---	----

7.5	角度为 $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{\pi}{4}$ 的曲边三角形映照为半平面	66
-----	---	----

§ 8	$w = az + \frac{\beta}{z}$ 或 $\frac{w+2k}{w-2k} = \left(\frac{az+k}{az-k}\right)^2$	68
-----	---	----

8.1	上(或下)半平面或圆的内(或外)部映照为有割痕的平面	69
-----	----------------------------	----

8.2	圆映照为圆; 圆心映照为圆心	70
-----	----------------	----

8.3	椭圆与双曲线	73
-----	--------	----

8.4	例	74
-----	---	----

$$w = \frac{1}{2}z + \frac{\beta}{z}, \beta \neq 0$$

$$w = z + \frac{i}{z}$$

$$w = \frac{az^2 + bz + c}{z + d}, a \neq 0, ad^2 - bd + c = \beta \neq 0$$

$$w = \frac{az^2 + bz + c}{z^2 + dz + f}, a \neq 0$$

$$w = \frac{i[b(1+z)^2 + 2(1-z)]}{2(1+z)}$$

8.5	儒可夫斯基机翼剖面	76
	对称机翼剖面	
	非对称机翼剖面	

广义儒可夫斯基机翼剖面

§ 9 另一些变换	79
9.1 $w^\beta = 1 - z^\alpha, \alpha > 0, \beta > 0$	79
9.2 例 $w = \sqrt{1 - z^2}$ 是对合变换	81
9.3 分别具有割痕的半平面、圆和平面映照为半平面	84
9.4 $w = \frac{(z - a_1)(z - a_2) \cdots (z - a_n)}{(1 - \bar{a}_1 z)(1 - \bar{a}_2 z) \cdots (1 - \bar{a}_n z)}$	87

附录: 关于区域的有限内点 $z = a$ 的内映照半径 R_a 和外映照半径 R'_a	90
--	----

第三部分

指数函数和相关函数及其复合

§ 10 初等函数	92
10.1 $w = e^z, z = \log w$	92
$w = A + e^{az}, a \neq 0; z = b \log(w - A), b = \frac{1}{a}$	
10.2 $w = \operatorname{th} z$	95
带形	
共轴圆族	
10.3 $w = \operatorname{th} z$ 的相关函数	99
$w = \operatorname{cth} z$	
$w = \operatorname{tg} z$	
$w = \operatorname{ctg} z$	
$w = A \log \frac{az + b}{cz + d}, Aac \neq 0, ad - bc \neq 0$	
$w = \frac{\cos(z + a)}{\cos(z + b)}, \frac{a - b}{\pi}$ 不是整数	
$w = \frac{\sin(z + a)}{\sin(z + b)}$	
10.4 $w = \sqrt{1 + e^z}$	101

	$w = c + \sqrt{d + e^{az}}$ ($a \neq 0, c, d$ 为实数 $d > 0$)	
10.5	$w = \sin z$	103
10.6	$\sin z$ 的相关函数	107
	$w = \operatorname{sh} z$	
	$w = \cos z$	
	$w = \operatorname{ch} z$	
	$w = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \operatorname{ch} 2z, a \neq b$	
	$w = \sec z$	
10.7	$w = \sec^2 z$	109
	$w = \operatorname{tg}^2 z$	
	$w = \operatorname{th}^2 z$	
	$w = \frac{1}{a - \cos z}, a$ 为实数, $a \neq \pm 1$	
10.8	$w = \frac{\operatorname{th} z}{z}$	111
	$w = \frac{\operatorname{cth} z}{z}$	
§ 11	复合函数	113
11.1	$w = e^{az} - ce^{bz}$	113
	$w = ae^{az} + be^{bz}$	
11.2	$w = \log(z^a - 1)$	116
11.3	$w = \log \frac{z^\gamma + z^{-\gamma}}{2}$	119
11.4	$w = e^{az} - e^{(a-1)z}$	122
	$w = ae^{fz} + be^{gz}$	
11.5	$w = z + e^z$	124
	$w = az + be^{cz}$	
11.6	$w = \log [e^z + \sqrt{e^{2z} - 1}]$	126
	带形映照为无限半带形	
	$w = \operatorname{logsin} z$	

11.7	$w = \operatorname{Log} \operatorname{cth} \frac{z}{2}$	123
	$w = \operatorname{Log} \operatorname{tg} z$	
11.8	$w = \log \frac{\operatorname{sh}(z + \beta)}{\operatorname{sh} z}$	130
	$w = \log \frac{ae^z + b}{ce^z + d}$	
11.9	$w = \operatorname{tg}^2 \frac{a\sqrt{z}}{2}$ 和 $\xi = \cos(a\sqrt{z})$	133
	抛物线的内部映照为圆域或半平面	
	$w = \sin(a\sqrt{z})$	
11.10	$w = z^{a+i}$	135
	$w = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\pi i}$	
11.11	$w = \cos(a \log z)$	138
11.12	$w = \log \frac{z-m}{z+m} + \log \frac{mz-1}{mz+1}$	139
	$w = i \log \frac{z-m}{z+m} - i \log \frac{mz-1}{mz+1}$	
	$w = e^{i\beta} \log \frac{m-z}{m+z} + e^{-i\beta} \log \frac{1-mz}{1+mz}$	
11.13	$w = z - \frac{1}{z} + 2c \log z$	144
	$w = P\left(z + \frac{a^2}{z}\right) - iQ\left(z - \frac{a^2}{z}\right) + \frac{iK}{2\pi} \log \frac{z}{a}$	
11.14	$w = \operatorname{arcth} z - b \operatorname{arctg} \frac{z}{b}$	149
	$w = z + c \operatorname{cthz}$	

第四部分

可用初等变换表示的许瓦尔兹—克里斯托菲尔变换

§ 12.0 关于许瓦尔兹—克里斯托菲尔变换 的若干说明	150
§ 12 许瓦尔兹—克里斯托菲尔变换	158
12.1 有一条割痕的半平面	158
12.2 有两条割痕的半平面	159
12.3 有两条割痕的全平面	161
12.4 有一条割痕的象限	163
12.5 有割痕的带形	164
12.6 由两个或两个以上的角的边所界定的区域	165
12.7 无限半带形外部的某些区域	169
12.8 另一些变换	170
12.9 曲边界线	172
12.10 用微分方程复合	174

第五部分

高等超越函数

§ 13 椭圆函数	180
13.1 矩形内部映照为半平面	180
13.2 矩形映照为四分之一平面或半平面	182
13.3 $w = \operatorname{cn} z$ $w = \operatorname{dn} z$	185
13.4 椭圆的内部映照为圆的内部	187
13.5 矩形的外部映照为半平面	188
13.6 两条无限半带形的外部区域	190
13.7 正方形映照为圆	192
13.8 等边三角形映照为半平面	194
13.9 角度为 $\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}$ 和 $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$ 的三角形	196
13.10 矩形的内部映照为另一矩形的外部	197

13.11	圆环映照为具有两个共线割痕的平面	202
13.12	圆环映照为具有两个平行割痕的平面	205
	有两个圆孔的平面映照为具有两个平行割痕的平面	
§ 14	其它函数	208
14.1	模函数 $w = \lambda(\tau)$	308
14.2	模函数 $w = J(\tau)$	210
14.3	等边等角圆弧三角形 (角度为 0) 与圆周对应	212

第六部分

保形映照的应用举例及三维空间中对称区域的保形映照

§ 15	保形映照的应用举例	215
15.1	在电学上的应用	215
15.2	在流体力学中的应用	217
15.3	在传热学中的应用	221
§ 16	三维空间中对称区域的保形映照	223
16.1	逆矢径变换	223
16.2	锥形区域的保形映照	223

序

李仲时文

保形映照是复变函数论的主要内容之一，是研究平面场必不可少的工具，在无线电、电磁学、力学（固体力学、流体力学和断裂力学等）和传热学等问题中有着广泛的应用。这本小册子是根据H. KOBER编写的《保形表示辞典》第二版，以及国内外其它有关编著编译而成。本书可供广大科学技术工作者和理工科大学的师生查阅。

全书共分六个部分，前五部分主要介绍了各种变换公式及其所实现的区域之间的映照。第六部分是保形映照的应用举例，主要说明前五部分的变换公式如何应用到有关平面场的实际问题中去。

本书中有两个问题需要说明：一是区间的符号，有 $-\infty < x < \infty$ ，也有 $\infty > x > -\infty$ 。这不仅表明了 x 的变化范围，而且表明了变量的变化方向。如 $\infty > x > -\infty$ 表示 x 由 $+\infty$ 变到 $-\infty$ ，而 $-\infty < x < \infty$ 表示 x 由 $-\infty$ 变到 $+\infty$ ；二是许瓦尔兹—克里斯托菲尔变换公式，一般是用积分形式表示的，且积分号前带有常数因子，而本书则是用导数形式给出的，这里没有常数因子，常数因子的作用不外乎是增加一次伸缩和旋转变换，并不影响变换的一般性。

在编译这本书的过程中，得到了不少同志的关心和支持，特别是华中工学院数学系的一些同志提出了不少宝贵意见，在此一起表示衷心感谢。

由于编译者水平有限，时间仓促，书中不妥以及错误之处在所难免，恳请读者批评指正。

编译者

1983年6月于武汉

记号与术语

1. 复变量: z ; w ; ξ ; ξ .

$z = x + iy$; 实部 $\operatorname{Re}(z) = x$; 虚部 $\operatorname{Im}(z) = y$; $\overline{z} = x - iy$.

$z = re^{i\varphi}$; $r = |z| > 0$; $\varphi = \arg z$

$w = u + iv$; $\operatorname{Re}(w) = u$; $\operatorname{Im}(w) = v$.

2. 变换 $w = f(z)$ 的临界点:

解析函数 $w = f(z)$ 的奇点; 导数 $\frac{dw}{dz} = 0$ 的点和 $z = \infty$.

3. 变换 $w = f(z)$ 的不动点 $F_1, F_2, \dots$;

方程 $z = f(z)$ 的解.

4. 直线:

方程 $lx + my + p = 0$, 式中 l, m, p 是实数, $l^2 + m^2 > 0$.

$\operatorname{Re}(\overline{\lambda}z) = p$, 或 $\operatorname{Im}(\mu z) = p$.

其中 $\lambda = l + im \neq 0$, $\mu = m + il = i\overline{\lambda}$.

点 z_0 到直线的距离: $\left| \frac{\operatorname{Re}(\overline{\lambda}z_0) - p}{\lambda} \right|$.

直线与 x 轴的夹角: $\arg \lambda + \frac{\pi}{2} + n\pi$, ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

5. 圆:

方程: $|z - z_0| = r$; 圆心: $z = z_0$; 半径为 r (是一有限的正实数).

直线可视为半径为无穷大的圆.

6. 椭圆:

方程: $|z - z_1| + |z - z_2| = k, (k > |z_1 - z_2|)$.

焦点是 z_1 和 z_2 , 长轴的长为 k , 离心率:

$$e = |z_1 - z_2| / k < 1.$$

椭圆的外部: $|z - z_1| + |z - z_2| > k$.

椭圆的内部: $|z - z_1| + |z - z_2| < k$.

7. 双曲线:

方程: $|z - z_1| - |z - z_2| = \pm k, (0 < k < |z_2 - z_1|)$.

正号或负号分别表示距离焦点 z_1 或 z_2 较近的那一枝; 实轴的长为 k ; 离心率: $e = |z_1 - z_2| / k > 1$;

渐近线方程:

$$\left[(\overline{z_1} - \overline{z_2}) e^{\pm i\varphi} \left(z - \frac{z_1 + z_2}{2} \right) \right] = 0, \left(\cos \varphi = \frac{k}{|z_1 - z_2|} \right).$$

不含焦点的外部: $||z - z_1| - |z - z_2|| < k$.

如果 $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}k$, 那么上面的双曲线就称为等轴双曲线. 当 $z_2 = -z_1$ (即以原点为中心的曲线) 时, 其方程为

$$\operatorname{Re} \left(\frac{z^2}{z_1^2} \right) = \frac{1}{2}, (\text{焦点为 } \pm z_1)$$

等轴双曲线的外部: $-\infty \leq \operatorname{Re} \left(\frac{z^2}{z_1^2} \right) < \frac{1}{2}$.

渐近线方程 (三种形式):

$$\operatorname{Re} \left(\frac{z^2}{z_1^2} \right) = 0, \text{ 或 } \operatorname{Re} \left(\frac{z}{z_1} \right) = \pm \operatorname{Im} \left(\frac{z}{z_1} \right); \text{ 或}$$

$$\operatorname{Re} \left[(1 \pm i) \frac{z}{z_1} \right] = 0.$$

8. 抛物线:

方程: $|z - z_0| = |k - \operatorname{Re}(\lambda z)| |\lambda|^{-1}, \lambda \neq 0;$

$$k \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \operatorname{Re}(\lambda z_0).$$

焦点 $z = z_0$; 准线: $\operatorname{Re}(\lambda z) = k$.

正焦弦: $2|k - \operatorname{Re}(\lambda z_0)| |\lambda|^{-1}$;

顶点: $z = z_0 + \frac{k - \operatorname{Re}(\lambda z_0)}{2\lambda}$.

9. 卡西尼卵形线和双纽线:

卡西尼卵形线方程: $|z - z_1| |z - z_2| = k, k > 0$.

焦点是 z_1, z_2 .

如果 $k = \frac{1}{4} |z_1 - z_2|^2$, 那么曲线就是双纽线.

10. 对合变换: 若 $w = f(z)$, 则 $z = f(w)$.

11. 区域: 即连通的开集, 也就是说区域 D 是指 D 内任一点为中心的圆盘全部包含在 D 中, 并且 D 内任意两点连结的一条约当弧, 也完全包含在 D 内.

12. 闭区域: 包括区域及其边界. 例如点集 $|z| \leq 1$ 是闭区域, 它含有区域 $|z| < 1$ 和边界 $|z| = 1$.

13. z 平面上的区域 D 映照到 w 平面上的区域 S , 其含意是:

(1) D 与 S 是一一对应的.

(2) D 的边界映照到 S 的边界, 但是, 如果变换不是线性或双线性的, 就不必要求一一对应.

上面两种关系通常是用相类似的阴影和用罗马数码表示, 而且用相同印刷体字母表示相应的点.

如果 z 平面的一条简单闭围线 C 映照为 w 平面的一条简单闭围线 Γ , 并且通过相应有序的点来规定 C 和 Γ 的方向, 那么 C 的左边区域映照为 Γ 的左边区域. 这条规则可用来决定 z 平面上的闭曲线的内部是否映照为 w 平面相应的闭曲线的内部或外部.

第一部分

线性和双线性变换

$$\S 1 \quad w = \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc \neq 0) \text{ 的不动点}$$

除了恒等变换 $w = z$ 外, 方程

$$cF^2 + (d - a)F - b = 0$$

的根 F_1 和 F_2 是不动点.

当 $F_1 = F_2 = \infty$ 时, $w = z + b$ ($b \neq 0$), p, q 为实数.
任何直线 $\operatorname{Im}(\bar{b}z) = p$ 映照为自身.
直线 $\operatorname{Re}(\bar{b}z) = q$ 映照为 $\operatorname{Re}(\bar{b}w) = q - |b|^2$.

$$\text{当 } F_1 = F_2 \neq \infty \text{ 时, } \frac{1}{w - F} = \frac{1}{z - F} + k \quad (c \neq 0),$$

其中, $F = \frac{a - d}{2c} = \frac{2b}{d - a}$, $k = \frac{2c}{a + d}$. 这是抛物变换.

和直线 $\operatorname{Im}[k(z - F)] = 0$ 相切于 F 点的每一个圆都映照为自身, 其它的圆不具有这种性质. 另外, 与上述圆正交的圆的集合, 全部映照为自身.

$$\text{当 } F_1 \neq F_2 = \infty \text{ 时, } w - F_1 = \alpha(z - F_1), \quad \alpha = \frac{a}{d} \quad (a \neq 0, 1), \quad c = 0, \quad F_1 = \frac{b}{d - a}.$$

$D =$ 以 F_1 为中心的所有同心圆的集合.

$E =$ 通过 F_1 的所有直线的集合.