數理統計

原著者 Robert V. Hogg
譯者 楊宏章

曉園出版社
世界图书出版公司

數理統計

(1979年新四版)

原著者 Robert V. Hogg
譯 者 楊 宏 章

曉園出版社
世界图书出版公司

R.V.Hogg

Mathematical Statistics

4th-ed1979

数 理 统 计

R.V.霍格 著

杨宏章 译

晓 园 出 版 社 出版

世界图书出版公司北京分公司重印

(北京朝阳门内大街137号)

北 京 中 西 印 刷 厂 印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1992年4月 重印 开本 850×1168 1/32

1992年4月第一次印刷 印张 15.75

印数: 0,001—2,150

ISBN: 7-5062-1156·4/O·15

定价: 10.50元

原 著 序

首先，我們非常感謝遍佈各地的教師對本書（第四版）之內容與編排順序所提供之建議。相信讀者會發現第四版比前幾個版本更適合於充當教科書。跟舊版一樣，所需要的分配理論都列入前面五章。第六，七，八，九章分別討論估計，統計假說之檢定以及無母數方法。但是第十章的充份統計量可在第六章討論完之後就進行研究。第十一章的許多論題也都可以提前進行：將 *Rao-Cramér* 不等式（11.1節）與穿設估計（11.7節）安排在度量估計量的優劣（6.2節）之後；逐次分析（11.2節）排在最佳檢定（7.2節）之後；多重比較（11.3節）排在變異數分析（8.5節）之後；分類（11.4節）排在樣本相關係數（8.7節）之後。具有這種彈性，由前面八章配合上第九，十，十一諸章的一些論題（任課教師可自行挑選）即適合每學期三學分的一學年課程。若上課時間更充份，我們相信讀者會對隨機獨立性（11.5節），穿穩性（11.6與11.7節），多變量常態分配（12.1節）與二次形式（12.2與12.3節）感到興趣。

數理統計

目　錄

第一章　隨機變數之分配

第二章　條件機率與隨機獨立

第三章　一些特殊的分配

第四章　隨機變數之函數的分佈

第五章　極限分部

第一章

隨機變數之分配

1•1 導論

許多調查結果顯示，在極度相似的條件下，重複實驗可說是個相當典型的手續。例如：在醫學研究上，主要的目的是在研究供應給病人的藥物的療效；對經濟專家來說，要研究在不同時間區間內，三種特定商品的價格；農業專家則研究一種新化學肥料對穀類作物生長之效用。調查者要想在類似上述例子中的狀況中找出有用的資料，唯一的方法便是實驗。每一個實驗均有一個“結果”。但作此類實驗時須特別注意的是：在每個實驗完成之前，不可自以爲是地預測其結果。

若有某一實驗，在實驗之前我們雖然無法確實預知其實驗結果，却知道它的所有可能結果有那些。又若這種實驗可在相同的狀況下重複的實驗，則稱它爲隨機實驗（ random experiment ），而所有可能結果所構成的空間稱爲樣本空間（ sample space ）。

例 1. 擲一硬幣，將出現背面表爲T，出現正面表爲H。假設此硬幣可反複地在同一條件下投擲，則擲此硬幣爲一隨機實驗，且其結果表爲T及H。樣本空間爲此二符號所成之集合。

例 2. 投擲一紅色骰子及一白色骰子。設其結果爲序對（紅色骰子出現之點數，白色骰子出現之點數）。假設此二骰子可在相同條件下連續投擲，則投擲此對骰子爲一隨機實驗，樣本空間爲 $(1, 1), \ldots, (1, 6)$ $(2, 1), \ldots, (2, 6), \ldots, (6, 6)$. 等36個序對所成集合。

設 $\mathscr{C}$ 表一樣本空間，又設 C 表 $\mathscr{C}$ 之部分集合。若一實驗之結果爲 C，則稱發生事件 C。現在假設我們已完成了 N 個隨機實驗，則我們

可由N次實驗中，事件C發生之次數得到其頻率f。 f/N 稱爲N次實驗中事件C發生之相對頻率。由一個擲硬幣的實驗可看出，當N較小時，相對頻率是相當不規律的。但當N越來越大時，經驗顯示相對頻率漸趨於穩定。因此，我們對事件C，給予一數p，即相對頻率終將趨近的數。若此數p給定，可將p敍述如下：一個事件C發生之相對頻率將等於或近似的數。因此，雖然我們無法預測隨機實驗之結果，但當實驗次數N相當大時，我們仍可大胆地預測事件C發生之相對頻率爲p。p之名稱很多，有時我們稱之爲實驗結果在C中之機率；有時我們稱之爲C事件之機率；有時我們稱之爲C的機率測度。通常從文意中可適當選定適當之名詞。

例 3. 令$\mathscr{C}$表例 2 中之樣本空間，令C表擲出二骰子之點數和爲 7 之集合，即C爲 $(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)$. 所成之集合。設投擲$N = 400$次，$f$爲擲出二點和爲 7 之次數，設$f = 60$次。則結果在$C$中之相對頻率爲 $f/N = \frac{60}{400} = 0.15$ 。故我們給予C以一數p，p大約爲 0.15。則稱p爲事件C之機率。

注意：上述有關機率之敍述有時稱爲“相對頻率方式”，且顯然與實驗是否能在極度相似的條件下進行有關。有許多人將機率引申爲信賴度的實數測度。例如：$p = \frac{2}{5}$ 對這些人的意義是他們對於C發生之個人的或主觀的（ subjective ）機率等於 $\frac{2}{5}$ 。因此，若他們參加賭博，$p = \frac{2}{5}$ 可說爲他們自身對賭局勝與負之比的猜測爲 $p/(1-p) = \frac{2}{5}/\frac{3}{5} = \frac{2}{3}$ 。又若他們確信 $p = \frac{2}{5}$ ，則下列二種賭局必爲他們所接受：(a)若出現C，則贏 3 元，否則輸 2 元。(b)不出現C，則贏 2 元，否則輸 3 元。不過，因爲在 1.4 節中，關於機率的數學性質對上述兩種看法是一致的，所以後來數學上的發展與取上述何種方式無關。

統計的數學理論的基本目的是爲隨機實驗提供數學模式。一旦數學模式完成，且發展一個詳盡的理論，統計學家便可據此理論，對此隨機實驗進行推論（即做出結論）。要建立一個如此之模式，必須先有機率論。一個較合乎邏輯的機率理論植基於一些有關集合及集合函數的觀念。我們在 1.2 及 1.3 節中將陸續提到。

習　題

1.1.　敍述下列各題隨機實驗的樣本空間$\mathscr{C}$，並由經驗（或直覺）上決定每一C事件的p值。

(a) 投一正常錢幣，C事件表出現反面。

(b) 擲一骰子，C事件表出現 5 點或 6 點。

(c) 從一組紙牌中抽一張，若抽出的是黑桃，則C事件發生。

(d) 在區間（0，1）中取一數，若此數小於$\frac{1}{3}$則C事件發生

(e) 正方形之相對頂點爲 $(1, 1)$ $(-1, -1)$ 在正方形取一點。C事件爲此點之坐標和小於$\frac{1}{2}$。

1.2.　由一固定圓的內部以隨意的方式取出點。問取出的點落在另一圓內的機率p應定爲多少？而此圓半徑爲第一個圓半徑之半且完全落於第一個圓內。

1.3.　一公正銅幣投擲兩次。試指定第一次投擲出現正面，第二次投擲出現反面的事件的機率 p_1 ，試定在二次投擲中出現一次正面，一次反面的機率 p_2 。

1·2　集合的運算

事物的集合（ set or collection ）通常未加以定義。不過爲了不引起誤解，特定的集合之構成都經過描述。舉例來說：一個由正整數中爲首的 10 個數所成的集合，顯然$\frac{3}{4}$和 14 不在此集合中，且 3 在此集合中。若一事物屬於一集合，則稱它爲此集合中的元素。例如：若A表 $0 \leq x \leq 1$ 之實數x所成之集合，則我們以 $\frac{3}{4} \in A$ 表$\frac{3}{4}$是集合A中之元素。一般說來，$a \in A$ 表示a是集合A中之元素。

我們所關心的集合，都是所謂的數集。不過用點集這個名詞似乎較數集來的方便。接下來我們就要簡單的討論一下爲何用點集這個名詞。在解析幾何中已強調過在數線（由一已知原點及單位長度所構成）上，對每一點恰有一數與之對應，且對每一數，在數線上恰有一點

與之對應。這種一對一之對應的存在，使我們不致於對"數 x"與"點 x"二名詞發生混淆。更進一步，在平面直角座標系中，對每一個符號 (x, y)，在平面上恰有一點與之對應，對平面上每一點，也恰有一類似的符號與之對應。同樣的我們可用"點 (x, y)"來表示"有序數對 (x, y)"。這種方法，也可用在三維或更高維的直角座標系中，如"點 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$"表示有序數列 $x_1, x_2, \ldots, x_n$。所以我們要十分小心的描述點集，以免混淆。符號 $A = \{x; 0 \le x \le 1\}$ 讀做"A 是一維點集，由 $0 \le x \le 1$ 之點 x 所成之集合"。同理，$A = \{(x, y); 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$ 讀做"A 是二維點集，由兩對角頂點爲 $(0, 0)$ $(1, 1)$ 之正方形內部和邊界上之點 (x, y) 所成之集合"。現在定義一些集合及其運算，並附有例題。

定義 1. 若集合 A_1 中每一元素都是集合 A_2 中之元素，則稱 A_1 是 A_2 的子集，寫做 $A_1 \subset A_2$。若 $A_1 \subset A_2$ 且 $A_2 \subset A_1$，則此二集合之全部元素均相同，寫做 $A_1 = A_2$。

例 1. 設 $A_1 = \{x; 0 \le x \le 1\}$，$A_2 = \{x; -1 \le x \le 2\}$。一維集 A_1 是一維集 A_2 之子集，即 $A_1 \subset A_2$。當集合的維數很明顯時，就不必特別提起。

例 2. 設 $A_1 = \{(x, y); 0 \le x = y \le 1\}$，$A_2 = \{(x, y); 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$。因 A_1 中元素表 A_2 中元素所形成之正方形區域的對角線，故 $A_1 \subset A_2$。

定義 2. 設集合 A 中無元素，則稱 A 爲空集合，寫做 $A = \varnothing$。

定義 3. 至少存在於集合 A_1，A_2 中之一的所有元素所成之集合稱爲 A_1，A_2 之聯集，表爲 $A_1 \cup A_2$。至少存在於集合 $A_1, A_2, A_3, \ldots$ 中某一集合之所有元素所成之集合稱爲 $A_1, A_2, A_3, \ldots$ 之聯集，表爲 $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots$，而當此類集合有 k 個時，則可表爲 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$。

例 3. 設 $A_1 = \{x; x = 0, 1, \ldots, 10\}$，$A_2 = \{x; x = 8, 9, 10, 11, \text{或 } 11 < x \le 12\}$，則 $A_1 \cup A_2 = \{x; x = 0, 1, \ldots, 8, 9, 10, 11 \text{ 或 } 11 < x \le 12\} = \{x; x = 0, 1, \ldots, 8, 9, 10, \text{或 } 11 \le x \le 12\}$。

例 4. 設 A_1 與 A_2 定義如例 1 中，則 $A_1 \cup A_2 = A_2$。

例 5. 設 $A_2=\varnothing$，則對任意集合 A_1, $A_1\cup A_2=A_1$。

例 6. 對任意集合 A, $A\cup A=A$　。

例 7. 設 $A_k=\{x;1/(k+1)\le x\le 1\}$, $k=1,2,3,\ldots$，則 $A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots=\{x;0<x\le 1\}$。注意：因 0 不在 $A_1, A_2, A_3,\ldots.$ 中任一集合中，故 0 不在 $A_1\cup A_2\cup A_3$ ……中。

定義 4. 同時存在於集合 A_1, A_2 中之所有元素所成之集合稱爲 A_1，A_2 之交集，表爲 $A_1\cap A_2$。數個集合之交集爲集合 $A_1, A_2, A_3,\cdots$ 中共同之元素所成之集合，表爲 $A_1\cap A_2\cap A_3\cap\cdots$，而當此類集合有 k 個，則可表爲 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k$。

例 8. 設 $A_1=\{(x,y);(x,y)=(0,0),(0,1),(1,1)\}$，$A_2=\{(x,y);(x,y)=(1,1),(1,2),(2,1)\}$，則 $A_1\cap A_2=\{(x,y);(x,y)=(1,1)\}$。

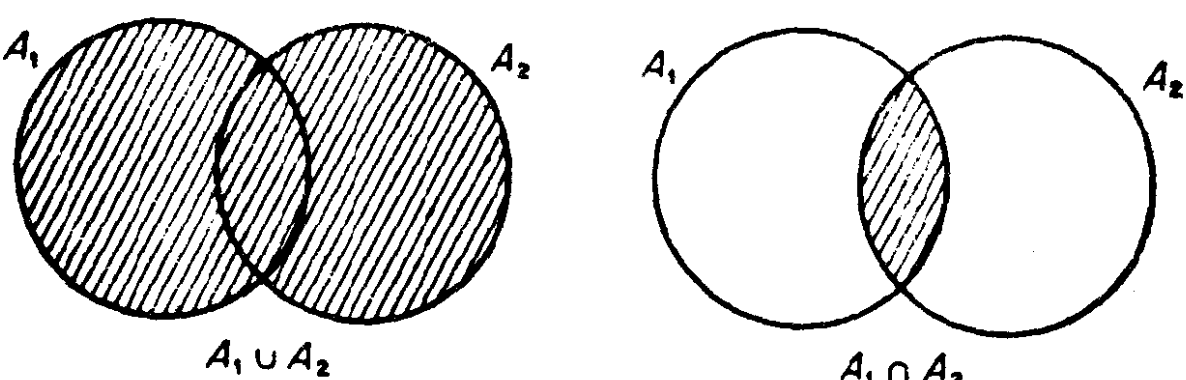


圖 1.1

例 9. 設 $A_1=\{(x,y);0\le x+y\le 1\}$，$A_2=\{(x,y);1<x+y\}$.，則 A_1　A_2 無共同點，即 $A_1\cap A_2=\varnothing$。

例10. 對任意集合 A, $A\cap A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$。

例11. 設 $A_k=\{x;0<x<1/k\}$, $k=1,2,3,\ldots.$，則 $A_1\cap A_2\cap A_3\cdot$ 是空集合，因 $A_1, A_2, A_3,\ldots.$ 無共同點。

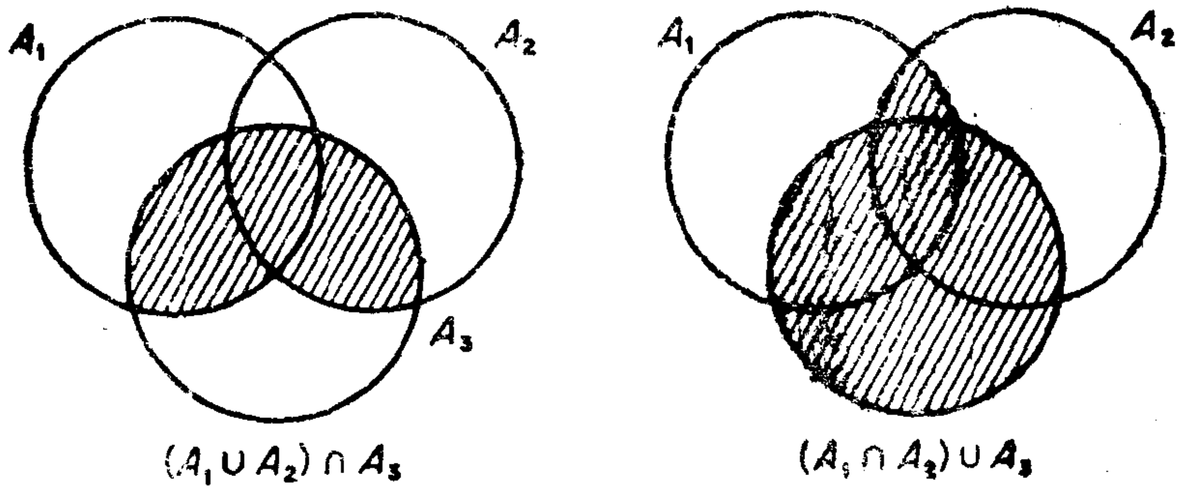
例12. 設 A_1　A_2 表二相交圓分別圍出之點所成之集合。則 $A_1\cup A_2$，$A_1\cap A_2$ 可由圖 1.1 之文氏圖中斜線部分表示。

例13. 設 A_1, A_2, A_3 表三相交圓分別圍出之點所成之集合。則 $(A_1\cup A_2)\cap A_3$ 及 $(A_1\cap A_2)\cup A_3$ 可由圖 1.2. 之斜線部份表示。

定義 5. 當我們進行某些討論時，其所牽涉到的元素全體都是可以描述出來的。這種由所有想要討論的元素所成之集合有個特定的名稱

，就是空間，通常以大寫草體字母如 $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}$ 等表示。

例14.設投擲一硬幣四次，出現正面之次數爲 x，則 x 必屬 0,1, 2, 3, 4 等 5 個數字中的一個。則空間爲集合 $\mathscr{A} = \{x; x = 0, 1, 2, 3, 4\}$. 。



1.2

例15.考慮所有非退化長爲 x 寬爲 y 之矩形。爲了使此矩形有意義，x 與 y 必須皆爲正值，故空間爲 $\mathscr{A} = \{(x, y); x > 0, y > 0\}$ 。

定義 6.設 $\mathscr{A}$ 表一空間，A 表其一子集。在 $\mathscr{A}$ 中而不在 A 中之所有元素構成之集合稱爲 A（對 $\mathscr{A}$ 而言）之補集，寫做 A^* 。例如，$\mathscr{A}^* = \varnothing$ 。

例16.設 $\mathscr{A}$ 定義如例14.中，$A = \{x; x = 0, 1\}$，則 A（對 $\mathscr{A}$ 而言）之補集爲 $A^* = \{x; x = 2, 3, 4\}$ 。

例17.假設 $A \subset \mathscr{A}$，則 $A \cup A^* = \mathscr{A}$；$A \cap A^* = \varnothing$；$A \cup \mathscr{A} = \mathscr{A}$，；$A \cap \mathscr{A} = A$；且 $(A^*)^* = A$ 。

習 題

1.4. 求下列兩集合 A_1 及 A_2 的交集 $A_1 \cap A_2$ 與聯集 $A_1 \cup A_2$

(a) $A_1 = \{x; x = 0, 1, 2\}, A_2 = \{x; x = 2, 3, 4\}$.
(b) $A_1 = \{x; 0 < x < 2\}, A_2 = \{x; 1 \le x < 3\}$.
(c) $A_1 = \{(x, y); 0 < x < 2, 0 < y < 2\}, A_2 = \{(x, y); 1 < x < 3, 1 < y < 3\}$.

1.5. 對全集 $\mathscr{A}$ 而論，求 A 集合的補集 A^*

(a) $\mathscr{A} = \{x; 0 < x < 1\}$, $A = \{x; \frac{1}{2} \leq x < 1\}$.
(b) $\mathscr{A} = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, $A = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.
(c) $\mathscr{A} = \{(x, y); |x| + |y| \leq 2\}$, $A = \{(x, y); x^2 + y^2 < 2\}$.

1.6. 寫出 m，a，r，y 四字母的所有排列情形，並設 A_1 爲 y 排末位的集合，A_2 爲 m 排首位的集合，求 $A_1 \cup A_2$ 與 $A_1 \cap A_2$

1.7. 用VENN圖解比較下列集合。

(a) $A_1 \cap (A_2 \cup A_3)$ 與 $(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)$.
(b) $A_1 \cup (A_2 \cap A_3)$ 與 $(A_1 \cup A_2) \cap (A_1 \cup A_3)$.
(c) $(A_1 \cup A_2)^*$ 與 $A_1^* \cap A_2^*$.
(d) $(A_1 \cap A_2)^*$ 與 $A_1^* \cup A_2^*$.

1.8. 若集合序列 $A_1, A_2, A_3, \ldots$ 滿足 $A_k \subset A_{k+1}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ 則此序列稱爲非遞減序列。試給一個此種集合序列的例子。

1.9. 若集合序列 $A_1, A_2, A_3, \ldots$ 滿足 $A_k \supset A_{k+1}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$，則此序列稱爲非遞增序列。試給一個此種集合序列的例子。

1.10. 設 $A_1, A_2, A_3, \ldots$ 爲集合而 $A_k \subset A_{k+1}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, 並定 $\lim_{k \to \infty} A_k$ 爲 $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots$，求 $\lim_{k \to \infty} A_k$ 若

(a) $A_k = \{x; 1/k \leq x \leq 3 - 1/k\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$;
(b) $A_k = \{(x, y); 1/k \leq x^2 + y^2 \leq 4 - 1/k\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$.

1.11. 設 $A_1, A_2, A_3, \ldots$ 爲集合，而且 $A_k \subset A_{k+1}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, 定 $\lim_{k \to \infty} A_k$ 爲 $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots$. 求 $\lim_{k \to \infty} A_k$ 若

(a) $A_k = \{x; 2 - 1/k < x \leq 2\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$.
(b) $A_k = \{x; 2 < x \leq 2 + 1/k\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$.
(c) $A_k = \{(x, y); 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1/k\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$.

1·3 集合函數

在微積分中，如下之函數

$$f(x) = 2x, \qquad -\infty < x < \infty,$$

或

$$g(x, y) = e^{-x-y}, \qquad 0 < x < \infty, \quad 0 < y < \infty,$$
$$= 0 \text{其他},$$

或

$$h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 3x_1x_2\cdots x_n, \qquad 0 \le x_i \le 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$
$$= 0 \text{其他},$$

是同樣常見的。$f(x)$ 在"點 $x = 1$"之值爲 $f(1) = 2$，$g(x, y)$ 在"點 $(-1, 3)$"之值爲 $g(-1, 3) = 0$，$h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 在"點 $(1, 1, \ldots, 1)$"之値爲 3。此類函數因其由已知維數之空間中之點來計算其値，故稱之爲點函數。

我們也可以找到不在點上計値，而在整個點集上計値之函數。此類函數即稱爲集合函數。下面有一些集合函數及其在某些單純集合上之對應值問題的例子。

例 1. 設 A 是一維空間中之集合，$Q(A)$ 表 A 所包含之正整數的個數，則 $Q(A)$ 即爲集合 A 之集合函數。故若 $A = \{x; 0 < x < 5\}$，則 $Q(A) = 4$。若 $A = \{x; x = -2, -1\}$，則 $Q(A) = 0$。若 $A = \{x; -\infty < x < 6\}$，則 $Q(A) = 5$。

例 2. 設 A 爲二維空間中之集合，$Q(A)$ 表 A 之面積，若 A 之面積無限，則 $Q(A)$ 無意義。故若 $A = \{(x, y); x^2 + y^2 \le 1\}$，則 $Q(A) = \pi$，若 $A = \{(x, y); (x, y) = (0, 0), (1, 1), (0, 1)\}$ 則 $Q(A) = 0$，若 $A = \{(x, y); 0 \le x, 0 \le y, x + y \le 1\}$ 則 $Q(A) = \frac{1}{2}$。

例 3. 設 A 爲三維空間中之集合，$Q(A)$ 表 A 之體積，若 A 之體積無限，則 $Q(A)$無意義。故若 $A = \{(x, y, z); 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 3\}$則 $Q(A) = 6$，若 $A = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 \ge 1\}$ 則$Q(A)$無意義。

在此，我們要介紹下列一些式子；符號

$$\int_A f(x)\, dx$$

表$f(x)$ 在一維集合 A 上之（黎曼）積分；符號

$$\int_A \int g(x, y)\, dx\, dy$$

表 $g(x, y)$在二維集合 A 上之黎曼積分，依此類推。有一點是可以確定的：必須小心選取集合 A 及函數 $f(x)$, $g(x, y)$，否則上述積分通常是不存在的。同理，符號

$$\sum_A f(x)$$

表所有 A 中元素 x 之函數值 $f(x)$之和；符號

$$\sum_A \sum g(x, y)$$

表所有 A 中元素 (x, y) 之函數值 $g(x, y)$之和。

例 4. 設 A 爲一維空間中之集合，$Q(A) = \sum_A f(x)$，且

$$f(x) = (\tfrac{1}{2})^x, \qquad x = 1, 2, 3, \ldots,$$
$$= 0，其他。$$

若$A = \{x; 0 \le x \le 3\}$則

$$Q(A) = \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{2})^3 = \tfrac{7}{8}.$$

例 5. 設 $Q(A) = \sum_A f(x)$, 且

$$f(x) = p^x(1 - p)^{1-x}, \qquad x = 0, 1$$
$$= 0 \text{ 其他。}$$

若 $A=\{x; x=0\}$ 則

$$Q(A)=\sum_{x=0}^{x=0} p^x(1-p)^{1-x}=1-p;$$

若 $A=\{x; 1\le x\le 2\}$，則 $Q(A)=f(1)=p$。

例 6. 設 A 為一維集合，且

$$Q(A)=\int_A e^{-x}\,dx$$

故若 $A=\{x; 0\le x<\infty\}$，則

$$Q(A)=\int_0^\infty e^{-x}\,dx=1;$$

若 $A=\{x; 1\le x\le 2\}$，則

$$Q(A)=\int_1^2 e^{-x}\,dx=e^{-1}-e^{-2};$$

若 $A_1=\{x; 0\le x\le 1\}$，$A_2=\{x; 1<x\le 3\}$，則

$$\begin{aligned}Q(A_1\cup A_2)&=\int_0^3 e^{-x}\,dx\\&=\int_0^1 e^{-x}\,dx+\int_1^3 e^{-x}\,dx\\&=Q(A_1)+Q(A_2);\end{aligned}$$

若 $A=A_1\cup A_2$，$A_1=\{x; 0\le x\le 2\}$，$A_2=\{x; 1\le x\le 3\}$ 則

$$\begin{aligned}Q(A)=Q(A_1\cup A_2)&=\int_0^3 e^{-x}\,dx\\&=\int_0^2 e^{-x}\,dx+\int_1^3 e^{-x}\,dx-\int_1^2 e^{-x}\,dx\\&=Q(A_1)+Q(A_2)-Q(A_1\cap A_2).\end{aligned}$$

例 7. 設 A 為 n 維空間中之集合，且令

$$Q(A)=\int\underset{A}{\cdots}\int dx_1\,dx_2\cdots dx_n.$$

若 $A=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n); 0\le x_1\le x_2\le\cdots\le x_n\le 1\}$，則

$$\begin{aligned}Q(A)&=\int_0^1\int_0^{x_n}\cdots\int_0^{x_3}\int_0^{x_2} dx_1\,dx_2\cdots dx_{n-1}\,dx_n\\&=\frac{1}{n!},\qquad \text{式中}\quad n!=n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1.\end{aligned}$$

習 題

1.12. 對每個一度空間集合 A，設 $Q(A) = \sum_A f(x)$，其中 $f(x) = (\frac{2}{3})(\frac{1}{3})^x$，$x = 0, 1, 2, \ldots$，其他爲 0，若 $A_1 = \{x; x = 0, 1, 2, 3\}$ 與 $A_2 = \{x; x = 0, 1, 2, \ldots\}$，求 $Q(A_1)$ 與 $Q(A_2)$ 之值。

1.13. 設對每個一度空間集合 A，其積分爲存在，設 $Q(A) = \int_A f(x)\,dx$ 其中 $f(x) = 6x(1-x)$，$0 < x < 1$，若 $A_1 = \{x; \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}\}$，

$= 0$ 其他

，$A_2 = \{x; x = \frac{1}{2}\}$，與 $A_3 = \{x; 0 < x < 10\}$，求 $Q(A_1)$，$Q(A_2)$，與 $Q(A_3)$.

1.14. A 爲一度空間集合，設 $Q(A)$ 等於集合 A 中正整數的個數，若 $A_1 = \{x; x$ 爲 3 的倍數而小於或等於 $50\}$ 與 $A_2 = \{x; x$ 爲 7 的倍數而小於或等於 $50\}$，求 $Q(A_1)$，$Q(A_2)$，$Q(A_1 \cup A_2)$ 與 $Q(A_1 \cap A_2)$ 並證明 $Q(A_1 \cup A_2) = Q(A_1) + Q(A_2) - Q(A_1 \cap A_2)$

1.15. A 爲二度空間集合，設 $Q(A)$ 等於 A 中點 (x, y)，其 x，y 均爲正整數的個數，若 $A_1 = \{(x, y); x^2 + y^2 \le 4\}$ 與 $A_2 = \{(x, y); x^2 + y^2 \le 9\}$，求 $Q(A_1)$ 與 $Q(A_2)$ 之值，注意 $A_1 \subset A_2$ 及 $Q(A_1) \le Q(A_2)$。

1.16. 設 $Q(A) = \int_A\int (x^2 + y^2)\,dx\,dy$，並其中 A 爲二度空間集合且其積分存在。若 $A_1 = \{(x, y); -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1\}$，$A_2 = \{(x, y); -1 \le x = y \le 1\}$，與 $A_3 = \{(x, y); x^2 + y^2 \le 1\}$，求 $Q(A_1)$，$Q(A_2)$，與 $Q(A_3)$ 之值。

1.17. $\mathscr{A}$ 係落在對頂爲 $(0, 0)$，$(1, 1)$ 的正方形的內部或邊界的點所成集合。令 $Q(A) = \int_A\int dy\,dx$.