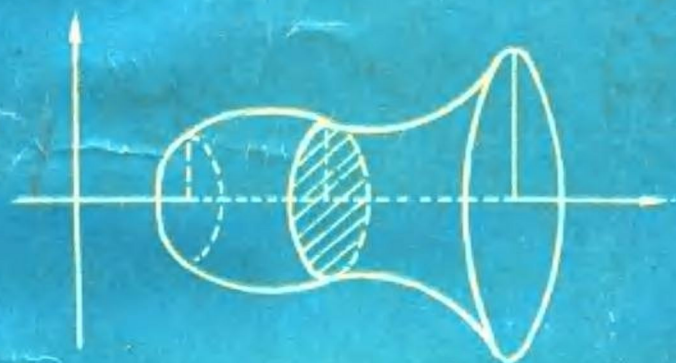


经济数学基础(1) WEIJIFEN

微 积 分

张耀梓 郑仲三 主编



天津大学出版社

经济数学基础 (I)

微 积 分

张耀梓 郑仲三 主编



天津大学出版社

内 容 简 介

本书是根据国家教委高教司颁布的《经济数学》教学大纲编写的, 主要介绍一元函数和二元函数微积分的基本理论。本书可作为大学本科经济类专业和管理专业的教材。书中的前六章也可以作为大学专科和成人教育同类专业的参考教材。

每章选编了数量较多的习题, 书末附有答案, 便于学生自学。

经济数学基础 (I)

微 积 分

张耀梓 郑仲三 主编

天津大学出版社出版

(天津大学内)

河北省昌黎县印刷厂印刷

新华书店天津发行所发行

开本: 850×1168 毫米 $1/32$ 印张: $18\frac{1}{2}$ 字数: 480千

1993年8月第一版 1997年4月第三次印刷

印数: 9001--12000

ISBN 7-5618-0506-3

O·51 定价: 13.90元

前 言

本书是根据国家教委高教司颁布的《经济数学基础》教学大纲编写的。主要介绍一元函数和二元函数微积分的基本理论。本书可作为大学本科经济类和管理专业的教材。其中一元函数微积分部分也可作为同类专业专科和成人教育的参考教材。

在本书编写中，力图反映我们的教学经验，同时也注意了吸收国内外同类教材的优点。编写过程中我们注意了以下几点：

1. 在叙述概念时尽量作到由浅入深，由具体到一般。经验表明，这对经济类和管理专业的学生是适合的。

2. 在讲清基本理论和基本方法的过程中，配备了各种类型的例题，这样可以帮助学生加深理解有关的内容，同时也为提高学生分析问题和解决问题的能力提供了一些必要的方法。

3. 在每章之后，我们编选了一定数量的习题，书末附有答案，这为学生自学提供了方便。

本书是由南开大学管理系和天津财经学院基础课部合作编写的。张耀梓、郑仲三任主编，参加编写的有：王作友（第一、五章）、黄宝堃（第二章）、曹宗铭（第三章）、郑仲三（第四章）、刘桂茹（第六章）、孙万军（第七章）、王玉秀（第八章）、李永立（第九章）、师其扬（第十章）、张耀梓（第十一章）。全书由张耀梓、刘桂茹定稿。

全国经济院校经济数学学会理事长陈克式教授，对本书的编写给予了指导和鼓励。两校的有关领导给予了大力支持。天津大学陆君良教授审阅了本书初稿，提出了许多宝贵意见。在此一并表示感谢。对于书中存在的缺点和错误，欢迎批评指正。

编 者

1993年2月

目 录

第一章 函数	(1)
§1.1 预备知识	(1)
一、实数集 (1) 二、绝对值 (2) 三、区间与邻域 (3)	
§1.2 函数概念	(4)
一、变量与常量 (4) 二、函数的定义 (5) 三、函数的定义域 (7) 四、函数的表示方法 (8) 五、函数关系的建立 (12)	
§1.3 函数的进一步讨论	(13)
一、奇函数与偶函数 (13) 二、单调函数 (14) 三、有界函数 (15) 四、周期函数 (16) 五、反函数 (17) 六、复合函数 (18)	
§1.4 初等函数	(19)
一、基本初等函数 (19) 二、初等函数 (24)	
§1.5 常用经济函数简介	(25)
一、需求函数 (25) 二、供给函数 (25) 三、需求和供给的均衡 (26) 四、成本函数 (27) 五、收入函数与利润函数 (28) 六、盈亏分析 (30)	
习题一	(32)
第二章 极限与连续	(37)
§2.1 数列的极限	(37)
一、数列 (37) 二、数列的极限 (39)	
§2.2 函数的极限	(43)
一、当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限 (43) 二、当 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限 (45) 三、单边极限 (48)	

§2.3 无穷大量和无穷小量·····	(51)
一、无穷大量 (51) 二、无穷小量 (53) 三、无穷小量的性质 (54) 四、无穷大量与无穷小量的关系 (56) 五、无穷小量的比较 (56) 六、变量极限与无穷小量的关系 (57)	
§2.4 极限的性质及其四则运算·····	(58)
一、极限的性质 (58) 二、极限的四则运算 (60)	
§2.5 极限存在的判别准则与两个重要极限·····	(65)
一、极限存在的判别准则 (65) 二、两个重要极限 (70) 三、连续复利—— e 在经济中的应用 (76)	
§2.6 连续函数·····	(78)
一、函数的改变量 (78) 二、函数连续性的定义 (79) 三、连续函数的性质 (82) 四、函数的间断点 (83) 五、连续性在极限计算中的应用 (87) 六、闭区间上连续函数的性质 (91)	
习题二·····	(93)
第三章 导数与微分 ·····	(103)
§3.1 导数的概念·····	(103)
一、引例 (103) 二、导数的定义 (106) 三、导数的几何意义 (109) 四、左、右导数 (110) 五、可导与连续的关系 (111)	
§3.2 基本初等函数的导数公式·····	(113)
一、常数的导数 (113) 二、幂函数的导数 (113) 三、对数函数的导数 (114) 四、三角函数的导数 (115)	
§3.3 导数的运算法则·····	(116)
一、函数的和、差、积、商的求导法则 (117) 二、复合函数的导数 (121) 三、反函数的导数 (124) 四、隐函数的导数 (128) 五、对数求导法 (130)	
§3.4 高阶导数·····	(133)

§3.5	微分	(135)
	一、微分的定义 (135) 二、微分的几何意义 (138) 三、微分基本公式与微分运算法则 (139) 四、微分形式的不变性 (140)	
§3.6	导数与微分的简单应用	(142)
	一、边际与弹性的概念 (142) 二、近似计算与误差估计 (148)	
	习题三	(151)
第四章	中值定理与导数的应用	(162)
§4.1	中值定理	(162)
	一、罗尔定理 (162) 二、拉格朗日中值定理 (163) 三、柯西中值定理 (164) 四、有关中值定理的一些应用 (165)	
§4.2	不定式的定值法	(167)
	一、 $\frac{0}{0}$ 型不定式 (168) 二、 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式 (171)	
	三、其它类型的不定式 (172)	
§4.3	函数的单调性	(174)
§4.4	函数的极值, 最大值和最小值	(176)
	一、函数的极值 (177) 二、函数极值的判定与求法 (177) 三、函数的最大值和最小值 (182)	
§4.5	曲线的凹凸性, 拐点和渐近线	(184)
	一、曲线的凹凸性与拐点 (185) 二、曲线的渐近线 (188)	
§4.6	函数作图	(192)
§4.7	经济、管理中的极值问题举例	(196)
	习题四	(199)
第五章	不定积分	(208)
§5.1	原函数与不定积分	(208)
	一、原函数 (208) 二、不定积分的概念 (210) 三、	

基本积分公式 (211) 四、不定积分的性质 (212) 五、不定积分的几何意义 (216)

§5.2 换元积分法 (217)

一、第一换元法 (217) 二、第二换元法 (223) 三、基本积分公式表的扩充 (226)

§5.3 分部积分法 (228)

§5.4 有理函数的积分 (234)

一、有理函数的性质 (234) 二、部分分式的积分法 (235) 三、化有理真分式为部分分式之和的方法 (237) 四、有理函数的积分法 (240) 五、结论与说明 (242)

§5.5 有理式的积分法 (244)

一、三角函数有理式的积分法 (244) 二、含线性根式的有理式的积分法 (250) 三、含二次根式有理式的积分法 (252)

习题五 (255)

第六章 定积分 (263)

§6.1 定积分的概念 (263)

一、引例 (263) 二、定积分的定义 (268)

§6.2 定积分的性质 (270)

§6.3 微积分基本定理 (274)

§6.4 定积分的计算 (278)

一、定积分的换元积分法 (279) 二、定积分的分部积分法 (283)

§6.5 定积分的应用 (284)

一、平面图形的面积 (284) 二、立体的体积 (291) 三、经济应用问题举例 (295)

§6.6 广义积分 (297)

一、无限区间上的广义积分 (297) 二、无界函数的广义积分 (299) 三、 Γ -函数 (302)

*§6.7	定积分的近似计算	(305)
一、	矩形法 (305)	
二、	梯形法 (305)	
三、	抛物线法 (307)	
习题六		(310)
第七章	空间解析几何	(320)
§7.1	空间直角坐标系	(320)
一、	空间直角坐标系 (320)	
二、	空间两点间的距离 (321)	
§7.2	曲面及其方程	(323)
一、	球面 (323)	
二、	柱面 (324)	
三、	旋转面 (325)	
§7.3	空间的平面与直线	(327)
一、	平面及其方程 (327)	
二、	空间直线及其方程 (330)	
§7.4	曲线	(331)
一、	空间曲线及其方程 (331)	
二、	投影曲线的方程 (331)	
§7.5	二次曲面	(334)
一、	椭球面 (334)	
二、	椭圆抛物面 (337)	
三、	单叶双曲面 (337)	
四、	双叶双曲面 (338)	
五、	双曲抛物面 (338)	
习题七		(333)
第八章	多元函数微分学	(342)
§8.1	多元函数的极限与连续	(342)
一、	多元函数的概念 (342)	
二、	二元函数的极限与连续 (345)	
§8.2	偏导数	(349)
一、	偏导数的概念 (349)	
二、	高阶偏导数 (352)	
§8.3	全微分	(354)
§8.4	多元函数的求导法则	(358)
§8.5	隐函数的微分法	(363)

§8.6	二元函数的极值	(365)
§8.7	条件极值与拉格朗日乘数法	(368)
§8.8	最小二乘法	(370)
	习题八	(373)
第九章	二重积分	(378)
§9.1	二重积分的概念与性质	(378)
	一、二重积分的概念 (378) 二、二重积分的性质 (382)	
§9.2	二重积分的计算	(384)
	一、利用直角坐标系计算二重积分 (384) 二、利用极坐标系计算二重积分 (396)	
§9.3	二重积分的应用	(404)
	一、平面图形的面积 (404) 二、曲面的面积 (405)	
	三、立体的体积 (408)	
	习题九	(412)
第十章	无穷级数	(425)
§10.1	无穷级数的概念及其基本性质	(425)
	一、无穷级数的概念 (425) 二、无穷级数的基本性质 (429)	
§10.2	正项级数的审敛法	(433)
	一、正项级数 (433) 二、正项级数的审敛法 (434)	
§10.3	任意项级数的审敛法	(445)
	一、交错级数及其审敛法 (445) 二、绝对收敛与条件收敛 (448)	
§10.4	广义积分的审敛法	(452)
	一、广义积分的审敛法 (452) 二、 β -函数简介 (459)	
§10.5	函数项级数与幂级数	(461)
	一、函数项级数的概念 (461) 二、幂级数的概念 (463)	
	三、幂级数的收敛域和收敛半径 (463) 四、幂级数的基本性质 (469)	

§10.6 函数的幂级数展开·····	(473)
一、泰勒公式和麦克劳林公式 (473)	
二、泰勒级数和麦克劳林级数 (477)	
三、某些初等函数的幂级数展开 (480)	
四、幂级数在数值计算方面的应用 (487)	
习题十·····	(489)
第十一章 常微分方程与差分方程·····	(501)
§11.1 一阶微分方程·····	(501)
一、微分方程的概念 (501)	
二、可分离变量的微分方程 (503)	
三、齐次微分方程 (504)	
§11.2 一阶线性微分方程·····	(508)
一、一阶线性微分方程 (508)	
二、贝努利方程 (510)	
§11.3 几种特类型的高阶方程·····	(511)
一、 $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程 (512)	
二、 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程 (512)	
三、 $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程 (513)	
§11.4 二阶常系数线性微分方程·····	(514)
一、二阶线性微分方程解的结构 (514)	
二、二阶常系数齐次线性微分方程 (516)	
三、二阶常系数非齐次线性微分方程 (519)	
§11.5 差分方程·····	(522)
一、差分的概念 (522)	
二、差分方程的基本概念 (525)	
三、一阶常系数线性差分方程 (526)	
四、二阶常系数线性齐次差分方程 (529)	
五、二阶常系数线性非齐次差分方程 (531)	
习题十一·····	(533)
习题答案·····	(538)

第一章 函 数

函数是研究变量之间的依从关系，是微积分学研究的主要对象。

§ 1.1 预备知识

一、实数集

在初等数学中，已经给出了有理数、无理数和实数的定义。所谓**有理数**是指有尽小数和无尽循环小数，**无理数**是指无尽非循环小数，有理数与无理数统称**实数**。全体实数的集合称为**实数集**。在本课程中，如无特别声明、数均指实数。为叙述统一，今后我们用 R 表示实数集，用 N 表示**自然数集**，用 Z 表示**整数集**，用 Q 表示**有理数集**。

1. 实数轴 设 l 为一给定直线，在 l 上取定一点 O 为原点，一定长度为单位长度，并规定 l 的一个指向为正向（图1.1），这样就在 l 上建立了数轴或实数轴 x ，简称 x 轴。

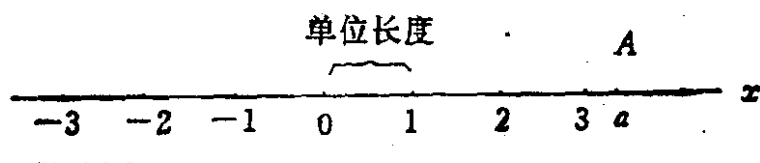


图 1.1

实数与数轴上的点是一一对应的，即对于每一个实数 a ，在数轴 x 上必有唯一的一个点，也就是坐标为 a 的点 A 与之对应；反之，对于数轴上的每一个点 A ，必有唯一的一个实数，即点 A 的坐标 a ，与之对应。因此，实数 a 与它在数轴上所对应的点 A ，将不加以区别，即点 A 也可以写为点 a 。

2. 实数集 R 的性质

性质1 设 $a, b \in R$, 则 $a = b, a > b, a < b$ 三个关系式中有且只有一个成立.

性质2 设 $a, b, c \in R$, 且 $a > b, b > c$, 则 $a > c$.

以上两个性质称为实数的有序性.

性质3 设 $a, b \in R$, 且 $a < b$, 则必存在实数 r , 使得 $a < r < b$.
这个性质通常称为实数的稠密性.

性质4 对于任意给定的 $a \in R$, 必有大于 a 的自然数 n 存在.
这个性质又称为阿基米德公理.

性质5 实数集 R 具有连续性.

对于实数集的连续性概念, 可以这样来理解: 由于实数与数轴上的点是一一对应的, 而数轴上的点是连续分布的, 因此实数也就连续而无空隙地充满整个数轴, 即 R 具有连续性. 应该指出, 有理数集也具有有序性、稠密性, 但它不具有连续性. 事实上, 有理数点之间存在着许许多多空隙——无理点, 使得有理点不能充满整个数轴.

二、绝对值

设 $a \in R$, 数 a 的绝对值 $|a|$ 定义为

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{若 } a \geq 0, \\ -a, & \text{若 } a < 0. \end{cases}$$

$|a|$ 的几何意义是数轴上的点 a 与原点之间的距离.

绝对值有下列基本性质: 设 $a, b \in R$, 则

$$(1) |a| = \sqrt{a^2};$$

$$(2) |a| \geq 0;$$

$$(3) |-a| = |a|;$$

$$(4) -|a| \leq a \leq |a|;$$

$$(5) |ab| = |a||b|;$$

一般地, 对于任意有限多个实数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 有

$$|a_1 a_2 \cdots a_n| = |a_1| |a_2| \cdots |a_n|;$$

$$(6) \text{ 若 } b \neq 0, \text{ 则 } \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|};$$

$$(7) |a+b| \leq |a| + |b|,$$

此不等式称为三角不等式. 更一般地, 有

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|;$$

$$(8) |a-b| \geq ||a| - |b||;$$

(9) 对于正数 δ , 不等式 $|x-a| < \delta$ 等价于不等式 $a-\delta < x < a+\delta$;

(10) 对于正数 δ , 不等式 $|x-a| > \delta$ 等价于不等式 $x < a-\delta$ 或 $x > a+\delta$.

三、区间与邻域

设 $a, b \in \mathbb{R}$, 且 $a < b$, 称实数集 $\mathbb{R}$ 的子集

$$(a, b) = \{x | a < x < b\};$$

$$(a, b] = \{x | a < x \leq b\};$$

$$[a, b) = \{x | a \leq x < b\};$$

$$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}.$$

为有限区间. a, b 称为上述各区间的端点, $b-a$ 称为区间的长度. (a, b) 称为开区间, $[a, b]$ 称为闭区间, 而 $(a, b]$ 和 $[a, b)$ 均称为半开区间.

显然, 在开区间 (a, b) 中, 既不存在最小的实数也不存在最大的实数, 而闭区间 $[a, b]$ 则不然, 它的最小和最大实数分别为 a 和 b .

引入记号 $+\infty, -\infty$, 分别读做“正无穷大”和“负无穷大”, 并且规定: 对所有实数 x , 恒满足 $x < +\infty, x > -\infty$. 推广有限区间的意义, 称实数集 $\mathbb{R}$ 的子集

$$(-\infty, b) = \{x | x < b\};$$

$$(-\infty, b] = \{x | x \leq b\};$$

$$(a, +\infty) = \{x | x > a\};$$

$$[a, +\infty) = \{x | x \geq a\};$$

$$(-\infty, +\infty) = R$$

为无限区间。

有限区间与无限区间统称为区间。

读者不难在数轴上标出这些区间。

称实数集 R 的子集 $\{x \mid |x-a| < \delta, \delta > 0\}$ 为点 a 的 δ 邻域。 a 称为邻域的中心， δ 称为邻域的半径。

在数轴上邻域是一个以 a 为中心， 2δ 为长度的开区间（如图1.2）。

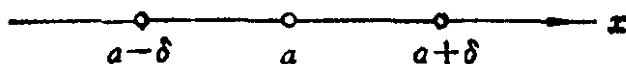


图 1.2

称实数集 R 的子集 $\{x \mid 0 < |x-a| < \delta, \delta > 0\}$ 为点 a 的空心邻域。子集 $\{x \mid a-\delta < x < a, \delta > 0\}$ 为点 a 的左邻域，子集 $\{x \mid a < x < a+\delta, \delta > 0\}$ 为点 a 的右邻域。

§ 1.2 函数概念

一、变量与常量

所谓变量，就是变动着的量。说得更确切一点，就是在某一过程中可以取不同数值的量。例如，一天的温度、某商品的销售量、人口的数量等等。

设 x 为一变量，由实际问题所规定或由人们所限定的 x 的变化范围，称为 x 的变域。在许多情况下，变量的变域是一个区间，但并不是所有变量的变域都是一个区间。例如，人口数这个变量，其变域就是自然数集 N 。不言而喻，变量的变域当然还可以是更为复杂的数集。

变量的对立面是常量。所谓常量，就是在某一过程中始终取

同一数值的量。例如，三角形的内角和；在某一段时间内，某种商品的价格等等。

研究变量的变化趋势，以及变量与变量之间的相互依赖关系是微积分学的主要任务之一。

二、函数的定义

在客观现实中，无论是自然现象还是社会现象，经常会同时出现几个变量，这些变量并不是彼此独立变化的，而是按照一定的规则互相关联着。函数就是变量间这种确定依赖关系的一个数学描述。

本章只讨论两个变量的情形，超过两个变量的情形将在第八章专门讨论。先看几个例子，然后再给出函数的定义。

例1 在平面直角坐标系 Oxy 中，抛物线的方程是

$$y = x^2.$$

给定 $x = x_0$ ，就确定了 y 的对应值 $y_0 = x_0^2$ ，因而所给出的方程表示了 x 、 y 间的函数关系（如图1.3）。

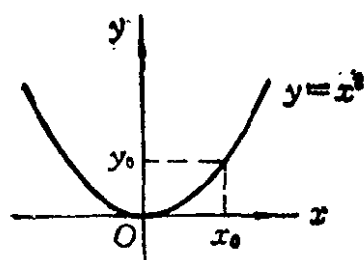


图 1.3

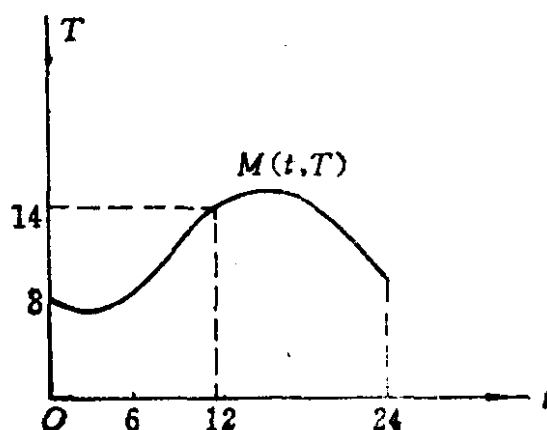


图 1.4

例2 气象台用自动记录仪将一天的气温记录下来，画出了一条如图1.4的曲线。这条曲线表示出了气温 T 与时间 t 的函数关系。

例3 某产品的生产成本 C 的变化依赖于该产 品 产 量 x 的 变

化, 当产量是一个确定的非负数值时, 成本也就有一个确定的数值与之对应, 成本 C 与产量 x 之间是一种函数关系。

例4 人口数随时间的变化而变化, 人口与时间之间是一种函数关系。

从以上几个例子可以看出, 虽然变量所代表的实际意义不同, 但出现两个变量时, 两个变量之间都存在着一种确定的依存关系。从数学的角度加以抽象, 得到函数的一般定义。

定义1.1 设 x, y 是两个变量, x 的变域为 X 。如果对于每一个 $x \in X$, 都可以按照某一给定规则 f , 唯一地确定一个 y 值与之对应, 则称变量 y 是变量 x 的**函数**, 记为

$$y = f(x), x \in X.$$

其中, x 称为**自变量**, y 称为**因变量**, 自变量 x 的变域 X 称为函数的**定义域**, 因变量 y 的变域

$$Y = \{y \mid y = f(x), x \in X\}.$$

称为函数的**值域**。

为了正确理解函数的定义, 再作如下几点说明:

(1) 定义中的“ f ”表示变量 x 与 y 之间的确定依赖关系, 是一种抽象的函数符号。也可以采用别的记号来表示, 例如, $y = \varphi(x)$, $y = y(x)$ 等。当同时考虑几个函数时, 通常取不同的符号代表不同的函数, 以免混淆。

(2) 当自变量 x 取某个值 x_0 时, 对应的因变量的值称为**函数值**, 记为 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$ 。如函数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $f(0) = 1$, $f(1) = \frac{1}{2}$, $f(2) = \frac{1}{5}$, $f(x+1) = \frac{1}{1+(x+1)^2}$ 等等。

(3) 在函数的定义中, 要求自变量 x 的每一个取值 y 只能有唯一的值与之对应。如果对自变量 x 的每一个取值, 有两个或两个以上的 y 值与之对应, 则不能称 y 是 x 的函数。有时, 人们称这种对应关系为**多值函数**, 虽然也使用了函数这一术语, 但多值函