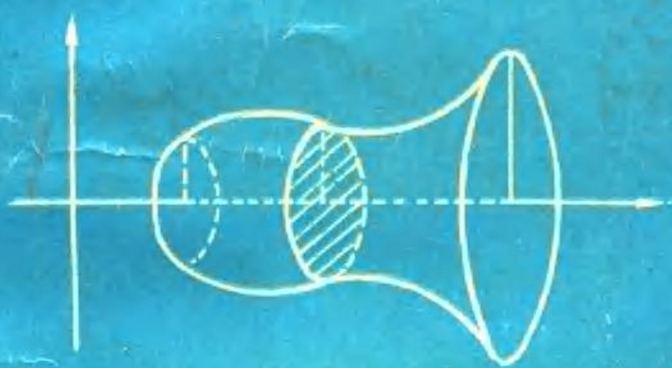
经济数学基础（1）WEIJIFEN

微积分

张耀梓 郑仲三 主编



天津大学出版社

经济数学基础（Ⅰ）

微 积 分

张耀梓　郑仲三　主编

天津大学出版社

内 容 简 介

本书是根据国家教委高教司颁布的《经济数学》教学大纲编写的，主要介绍一元函数和二元函数微积分的基本理论。本书可作为大学本科经济类专业和管理专业的教材。书中的前六章也可以作为大学专科和成人教育同类专业的参考教材。

每章选编了数量较多的习题，书末附有答案，便于学生自学。

经济数学基础（I）

微积分

張耀梓　郑仲三　主编

天津大学出版社出版

（天津大学内）

河北省昌黎县印刷厂印刷

新华书店天津发行所发行

•

开本：850×1168毫米 1/32　印张：18 1/2　字数：480千

1993年8月第一版　1997年4月第三次印刷

印数：9001--12000

ISBN 7—5618—0506—3

O·51　定价：13.90元

前　言

本书是根据国家教委高教司颁布的《经济数学基础》教学大纲编写的。主要介绍一元函数和二元函数微积分的基本理论。本书可作为大学本科经济类和管理专业的教材。其中一元函数微积分部分也可作为同类专业专科和成人教育的参考教材。

在本书编写中，力图反映我们的教学经验，同时也注意了吸收国内外同类教材的优点。编写过程中我们注意了以下几点：

1.在叙述概念时尽量作到由浅入深，由具体到一般。经验表明，这对经济类和管理专业的学生是适合的。

2.在讲清基本理论和基本方法的过程中，配备了各种类型的例题，这样可以帮助学生加深理解有关的内容，同时也为提高学生分析问题和解决问题的能力提供了一些必要的方法。

3.在每章之后，我们编选了一定数量的习题，书末附有答案，这为学生自学提供了方便。

本书是由南开大学管理系和天津财经学院基础课部合作编写的。张耀梓、郑仲三任主编，参加编写的有：王作友（第一、五章）、黄宝埜（第二章）、曹宗铭（第三章)、郑仲三(第四章)、刘桂茹（第六章）、孙万军（第七章）、王玉秀（第八章）、李永立（第九章）、师其扬（第十章）、张耀梓（第十一章）。全书由张耀梓、刘桂茹定稿。

全国经济院校经济数学学会理事长陈克式教授，对本书的编写给予了指导和鼓励。两校的有关领导给予了大力支持。天津大学陆君良教授审阅了本书初稿，提出了许多宝贵意见。在此一并表示感谢。对于书中存在的缺点和错误，欢迎批评指正。

编　者

1993年2月

目　录

第一章 函　数

函数是研究变量之间的依从关系，是微积分学研究的主要对象。

§1.1 预备知识

一、实数集

在初等数学中，已经给出了有理数、无理数和实数的定义。所谓**有理数**是指有尽小数和无尽循环小数，**无理数**是指无尽非循环小数，有理数与无理数统称**实数**。全体实数的集合称为**实数集**。在本课程中，如无特别声明、数均指实数。为叙述统一，今后我们用R表示实数集，用N表示**自然数集**，用Z表示**整数集**，用Q表示**有理数集**。

1. 实数轴　设l为一给定直线，在l上取定一点O为原点，一定长度为单位长度，并规定l的一个指向为正向（图1.1），这样就在l上建立了数轴或实数轴x，简称x轴。

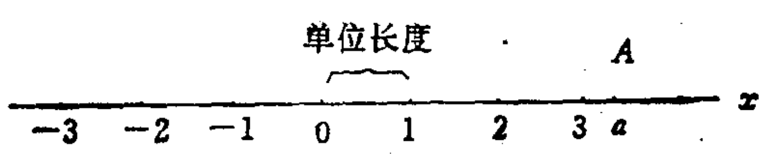


图 1.1

实数与数轴上的点是一一对应的，即对于每一个实数a，在数轴x上必有唯一的一个点，也就是坐标为a的点A与之对应；反之，对于数轴上的每一个点A，必有唯一的一个实数，即点A的坐标a，与之对应。因此，实数a与它在数轴上所对应的点A，将不加以区别，即点A也可以写为点a。

2. 实数集R的性质

性质1 设a，$b\in R$，则$a=b$，$a>b$，$a<b$三个关系式中有且只有一个成立。

性质2 设a，b，$c\in R$，且$a>b$，$b>c$，则$a>c$。

以上两个性质称为实数的**有序性**.

性质3 设a，$b\in R$，且$a<b$，则必存在实数r,使得$a<r<b$。

这个性质通常称为实数的**稠密性**。

性质4 对于任意给定的$a\in R$，必有大于a的自然数n存在。

这个性质又称为**阿基米德公理**。

性质5 实数集R具有连续性。

对于实数集的连续性概念，可以这样来理解：由于实数与数轴上的点是一一对应的，而数轴上的点是连续分布的，因此实数也就连续而无空隙地充满整个数轴，即R具有连续性．应该指出，有理数集也具有有序性、稠密性，但它不具有连续性．事实上,有理数点之间存在着许许多多空隙——无理点,使得有理点不能充满整个数轴。

二、绝对值

设$a\in R$，数a的绝对值$|a|$定义为

$$|a|=\begin{cases}a, & 若a\geqslant 0,\\ -a, & 若a<0.\end{cases}$$

$|a|$的几何意义是数轴上的点a与原点之间的距离。

绝对值有下列基本性质：设a，$b\in R$，则

（1）$|a|=\sqrt{a^2}$；

（2）$|a|\geqslant 0$；

（3）$|-a|=|a|$；

（4）$-|a|\leqslant a\leqslant |a|$；

（5）$|ab|=|a||b|$，

一般地，对于任意有限多个实数a_1，a_2，…，a_n有

$$|a_1a_2\cdots a_n|=|a_1||a_2|\cdots|a_n|;$$

（6）若$b\neq 0$，则$\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$；

（7）$|a+b|\leqslant|a|+|b|$，

此不等式称为**三角不等式**。更一般地，有

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|;$$

（8）$|a-b|\geqslant||a|-|b||$；

（9）对于正数δ，不等式$|x-a|<\delta$等价于不等式$a-\delta<x<a+\delta$；

（10）对于正数δ，不等式$|x-a|>\delta$等价于不等式$x<a-\delta$或$x>a+\delta$。

三、区间与邻域

设a，$b\in \boldsymbol{R}$，且$a<b$，称实数集$\boldsymbol{R}$的子集

$(a,\ b)=\{x|a<x<b\}$；

$(a,\ b]=\{x|a<x\leqslant b\}$；

$[a,\ b)=\{x|a\leqslant x<b\}$；

$[a,\ b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$.

为**有限区间**。a，b称为上述各区间的**端点**，$b-a$称为区间的**长度**。（a，b）称为**开区间**，$[a,\ b]$称为**闭区间**，而$(a,\ b]$和$[a,\ b)$均称为**半开区间**。

显然，在开区间（a，b）中，既不存在最小的实数也不存在最大的实数，而闭区间$[a,\ b]$则不然，它的最小和最大实数分别为a和b。

引入记号$+\infty$，$-\infty$，分别读做“**正无穷大**”和“**负无穷大**”，并且规定：对所有实数x，恒满足$x<+\infty$，$x>-\infty$。推广有限区间的意义，称实数集$\boldsymbol{R}$的子集

$$(-\infty,\ b)=\{x|x<b\};$$

$$(-\infty,\ b]=\{x|x\leqslant b\};$$

$$(a,\ +\infty)=\{x|x>a\};$$

$$[a,\ +\infty)=\{x|x\geqslant a\};$$

$$(-\infty,\ +\infty)=R$$

为无限区间。

有限区间与无限区间统称为**区间**。

读者不难在数轴上标出这些区间。

称实数集R的子集$\{x \mid |x-a|<\delta,\ \delta>0\}$为**点$a$的$\delta$邻域**. a称为邻域的**中心**，δ称为邻域的**半径**。

在数轴上邻域是一个以a为中心，2δ为长度的开区间（如图1.2）。

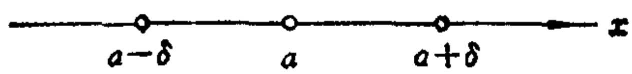


图 1.2

称实数集R的子集$\{x \mid 0<|x-a|<\delta,\ \delta>0\}$为**点$a$的空心邻域**. 子集$\{x \mid a-\delta<x<a,\ \delta>0\}$为**点$a$的左邻域**，子集$\{x \mid a<x<a+\delta,\ \delta>0\}$为**点$a$的右邻域**。

§1.2 函数概念

一、变量与常量

所谓变量，就是变动着的量。说得更确切一点，就是在某一过程中可以取不同数值的量。例如，一天的温度、某商品的销售量、人口的数量等等。

设x为一变量，由实际问题所规定或由人们所限定的x的变化范围，称为**x的变域**. 在许多情况下，变量的变域是一个区间，但并不是所有变量的变域都是一个区间。例如，人口数这个变量，其变域就是自然数集N。不言而喻，变量的变域当然还可以是更为复杂的数集。

变量的对立面是**常量**。所谓常量，就是在某一过程中始终取

同一数值的量。例如，三角形的内角和；在某一段时间内，某种商品的价格等等。

研究变量的变化趋势，以及变量与变量之间的相互依赖关系是微积分学的主要任务之一。

二、函数的定义

在客观现实中，无论是自然现象还是社会现象，经常会同时出现几个变量，这些变量并不是彼此独立变化的，而是按照一定的规则互相关联着。函数就是变量间这种确定依赖关系的一个数学描述。

本章只讨论两个变量的情形，超过两个变量的情形将在第八章专门讨论。先看几个例子，然后再给出函数的定义。

例1 在平面直角坐标系Oxy中，抛物线的方程是

$$y = x^2.$$

给定$x = x_0$，就确定了y的对应值$y_0 = x_0^2$，因而所给出的方程表示了x、y间的函数关系（如图1.3）。

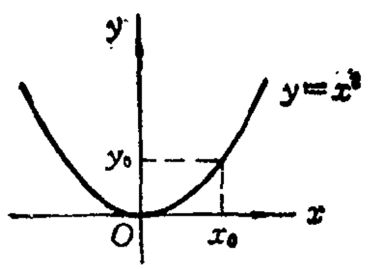


图 1.3

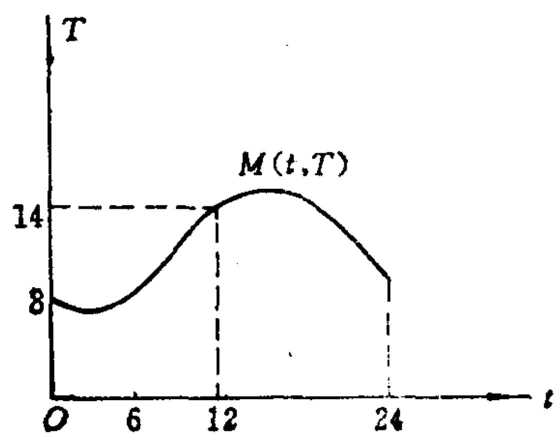


图 1.4

例2 气象台用自动记录仪将一天的气温记录下来，画出了一条如图1.4的曲线。这条曲线表示出了气温T与时间t的函数关系。

例3 某产品的生产成本C的变化依赖于该产品产量x的变

化，当产量是一个确定的非负数值时，成本也就有一个确定的数值与之对应，成本C与产量x之间是一种函数关系。

例4 人口数随时间的变化而变化，人口与时间之间是一种函数关系。

从以上几个例子可以看出，虽然变量所代表的实际意义不同，但出现两个变量时，两个变量之间都存在着一种确定的依存关系。从数学的角度加以抽象，得到函数的一般定义。

定义1.1 设x，y是两个变量，x的变域为X。如果对于每一个$x \in X$，都可以按照某一给定规则f，唯一地确定一个y值与之对应，则称变量y是变量x的**函数**，记为

$$y = f(x), \quad x \in X.$$

其中，x称为**自变量**，y称为**因变量**，自变量x的变域X称为函数的**定义域**，因变量y的变域

$$Y = \{y \mid y = f(x), \quad x \in X\}.$$

称为函数的**值域**。

为了正确理解函数的定义，再作如下几点说明：

（1）定义中的“f”表示变量x与y之间的确定依赖关系，是一种抽象的函数符号。也可以采用别的记号来表示，例如，$y = \varphi(x)$，$y = y(x)$等。当同时考虑几个函数时，通常取不同的符号代表不同的函数，以免混淆。

（2）当自变量x取某个值x_0时，对应的因变量的值称为**函数值**，记为$f(x_0)$或$y|_{x=x_0}$。如函数$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$，$f(0) = 1$，$f(1) = \frac{1}{2}$，$f(2) = \frac{1}{5}$，$f(x+1) = \frac{1}{1+(x+1)^2}$等等。

（3）在函数的定义中，要求自变量x的每一个取值y只能有唯一的值与之对应。如果对自变量x的每一个取值，有两个或两个以上的y值与之对应，则不能称y是x的函数。有时，人们称这种对应关系为**多值函数**，虽然也使用了函数这一术语，但多值函