高等学校试用教材

数字信号处理

浙江大学　黄爱苹　编

GAO DENG XUE XIAO JIAO CAI

机械工业出版社

高等学校试用教材

数字信号处理

浙江大学　黄爱苹　编

机械工业出版社

前　　言

本书是根据机械电子工业部高等工业学校工业自动化仪表(检测技术及仪器)专业教学指导委员会拟定的“数字信号处理”课程教学大纲而编写的。

全书共分五章。第一章介绍离散时间信号与系统，它们的时域、频域、复频域的表示、分析方法，并说明了如何用数字方法处理连续时间信号。第二章专门讨论离散傅里叶变换：引入DFT的必要性，DFT的变换式、物理意义、快速算法及其软硬件实现，DFT的某些应用。第三章讲述滤波器的概念与分类，数字滤波器的设计方法、各种结构、以及软硬件实现。第四章介绍数字谱分析，包括用DFT/FFT进行谱分析时的基本关系和基本问题、随机信号及其描述方法、谱估计的概念及质量评价、常用数字谱估计方法。第五章针对数字信号处理中有限字长的影响，介绍了工程上常用的统计分析方法和一些简单而有用的关系和结论，从而完成对信号进行数字处理的讨论。全部讲授时间为40～50学时。除了有关窗的内容外，第三章和第四章可调换讲授次序而无影响。

作为工科专业教材，本书强调物理概念，注意理论联系实际。书中讨论的方法和技术多在当前工程上得到广泛应用，第三、四章中详细给出数字信号处理技术在检测、控制、仪器仪表方面的应用实例和设计、处理过程。各章均有习题，有助于读者深入理解书中论述的基本理论和基本方法。还可安排一定数量的实验，另有实验指导书和实验程序软盘。

本书除作为高等院校检测、控制、仪器仪表及相近专业的教材外，也可供科研人员和工程技术人员参考。

天津大学、华中理工大学、重庆大学、华侨大学、太原工学院、山东工业大学、清华大学、吉林工业大学、燕山大学、哈尔滨工业大学的有关专业教师参加了本书的评审，哈尔滨工业大学邱化元教授担任主审。孙毓星副教授和胡永昌副教授仔细地审阅了全稿，提出了宝贵意见。在本书编写过程中，作者得到本系、本专业教师和领导的关心与支持。书中部分应用实例取材于本专业教师和研究生的科研成果。作者谨对以上单位和个人表示衷心的感谢。

限于本人水平，书中难免有不妥和错误，恳切希望读者批评指正。

作　者

1989年12月

于浙江大学科仪系

目　录

绪　论

数字信号处理(Digital Signal Processing)是一门理论与技术紧密结合的学科，它研究用数字的方式处理信号。二十几年来，数字信号处理技术的运用对许多学科的发展起了重大作用。

一、数字信号处理概述

信号是信息的载体，信号处理泛指对信号的各种加工、变换。科研和工程中需要进行信号处理，以提取、利用信号中携带的信息。

信号处理过去采用模拟的方法，即用模拟电子元器件组成的模拟处理系统对信号(工程中大多为模拟信号，就是时间变量与信号幅值均可连续取值的信号)进行处理，产生模拟形式的输出信号。随着半导体器件和数字技术的发展，人们也可以用数字方法来处理信号，其过程如图0-1所示。输入模拟信号经模/数(A/D)转换变为时间变量和信号幅值均取离散值的数字信号。后者经处理，产生输出数字信号，再经数/模(D/A)转换和平滑滤波，恢复为输出模拟信号。另外，为获得正确的处理结果，可根据需要在模/数转换前进行反混叠滤波。

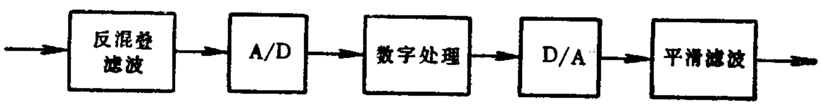


图0-1　信号的数字处理过程

由于科学技术的飞速发展和生产建设规模的不断扩大，首先在语音传送与合成、x射线计算机辅助断层成像(简称CT)和石油勘探的地震法探测等方面，继而有越来越多的领域，都对信号处理提出了越来越高的要求。日益复杂的信号处理算法用模拟处理系统来实现是难以想象的，高精度、高分辨率等性能指标也是模拟处理系统无法达到的，而数字处理则成为现代科技不可或缺的手段之一。

数字处理与模拟处理相比，有以下优点：

（1）数字处理系统工作稳定可靠。模拟处理系统由较多的元器件组成，各元器件的各种参数都受到温度的影响，随环境条件的变化而变化，并且容易出现感应、杂散效应。数字处理系统由性能一致、为数不多的大规模集成电路芯片构成，整个系统的工作由高稳定的时钟控制，受温度、时间、环境条件的影响要比模拟处理系统小得多，因而具有完善的重现性、极高的稳定性和可靠性。

（2）数字处理能达到模拟处理无法达到的性能指标。数字处理系统中，运算可采用多位字长或浮点运算，故而允许信号的动态范围达几个数量级，运算精度也达到前所未有的水平。例如，模拟处理系统中元器件的精度很难达到10^{-3}，而数字处理系统有17位字长精度即可达到10^{-5}。数字处理系统中使用半导体存贮器，存贮容量可以很大，存贮时间可以很长，存取次序又不受信号到来先后顺序的限制。这样，数字处理系统的特性就能很好地逼近理想特性(如过渡带窄、通带波动小、阻带衰减大的理想选频滤波特性)。例如，模拟谱分析用一组带通滤波器来实现时，受电容、电感等贮能元件的体积、分布参数等影响的限制，低频端一般只能到5Hz左右；滤波器的带宽(它决定了谱分辨率)与响应时间之间是倒数关系，高的

分辨率和快的响应时间之间的矛盾无法克服。而数字谱分析只要有足够大的存贮容量，则理论上可以分析任意低的频率(如10^{-3}Hz，用于原子频标研究)，而且随着大规模集成电路芯片工作速度的提高，谱分辨率和处理时间的矛盾大为改善。

（3）数字信号处理算法巧妙，种类多。例如，用数字序列表示的信号波形可以看作是一个任意时基的序列，因而能够实现时间的扩张或压缩，便于对信号数据进行缓存或重排，甚至可得到时序倒置的序列。这些对于模拟处理来说是无法想象的。又如，模拟处理技术中的滤波一般是线性的，只能对由两个分量线性叠加而成的信号进行滤波。而数字处理技术中的同态滤波则是非线性处理，能对由两个分量相乘或卷积而得到的信号进行滤波。数字信号处理算法还可以按不同的准则设计，如目标检测中的匹配滤波、最大检测概率滤波等，从而使处理结果达到各种不同的最佳化要求。数字信号处理算法又可设计成自适应型的，以便适应由于传输媒介或时间变化而引起的信号或噪声特性的变化。

（4）数字信号处理算法的实现手段多。它既可用硬设备来实现，又能在计算机上用软件来完成。对零星的或重复率很低、无实时要求的信号处理，可采用软件实现方式。而对重复率高且在速度、体积、功耗等方面要求很严的工程实际需要，则采用硬件实现方式。另外，在同一算法的研究和应用两个不同的阶段，分别采用软件、硬件实现方式无疑是较为理想的。

（5）数字处理系统可以时分复用，即利用一套处理设备分时地完成对多路信号的处理。具体做法是：将各路输入信号接至一个多路开关，按一定的时间顺序依次进行A/D转换和数字处理，各路处理结果用位于输出端的分路器按相同的时间顺序分离开来，分别输出。这里对各路信号进行的处理可以相同，也可以不同，通过修改数据存贮器中的系数值或调用不同的程序段，即可灵活地改变处理系统的参数或处理算法。时分复用使设备利用率提高、成本降低、体积缩小。

数字信号处理的基本数学原理在一个世纪以前就已经出现。到了本世纪40和50年代，抽样的概念及其频谱效应已为人们所了解，z变换已普及到电子工程学领域，成了描述、分析数值控制系统特性的数学工具。数字信号处理真正成为独立的新学科则始于60年代中期。凯瑟(Kaiser)阐明了如何根据s平面到z平面的解析的映射关系，用双线性变换从模拟滤波器设计出无限冲激响应(IIR)数字滤波器。库利(Cooley)和图基(Tukey)提出了计算离散傅里叶变换(DFT)的快速算法(FFT)，把计算DFT的时间减少一到几个数量级。接着是信号的谱的推定与预测理论的形成，其中基于自回归模型的谱推定Levison高速算法的正确性得到了有力证明。同时还产生了有限冲激响应(FIR)数字滤波器的独特的设计方法，对用离散序列表示波形的理论和在时域、频域修正波形的理论也有了更为深刻的理解。此外，数字计算机的普遍使用和超大规模集成电路技术的巨大进展，又为数字处理算法的实现提供了良好的客观条件。正是由于FFT算法和数字滤波器设计方法的提出、对理论的深刻理解以及实现手段的保证，导致了数字信号处理的理论逐步确立与完善，形成了独立的新学科。

数字信号处理领域的两个基本组成部分是数字滤波和数字谱分析。多维信号处理则是数字信号处理学科的一个正在发展、相对较新的分支。数字滤波和数字谱分析共同建立在离散线性系统理论和离散傅里叶变换理论的基础之上，它们的实现都涉及离散时间系统的量化理论以及数字系统软、硬件实现的各种原理。因此，离散线性系统理论、离散傅里叶变换理论、数字滤波原理、数字谱分析原理以及量化理论构成了数字信号处理学科的基本内容。

数字信号处理理论、技术的研究遵循这样的途径：先针对离散时间信号和系统进行理论、方法的研究，即假设信号和系统仅在时间上离散，信号的幅值和系统的系数未经量化，精度为无限位的，这样使问题得以简化，方便了研究。然后考虑将信号幅值和系统系数量化到一定精度时有限字长带来的各种影响，从而完成对信号进行数字处理的讨论。

二、数字信号处理技术的应用

在当今信息化社会里，科学技术各领域乃至社会生活各方面都离不开信号处理。许多学科在自身的发展过程中对数字信号处理技术的要求越来越迫切，这些要求又促进了数字信号处理学科的发展。这里仅介绍数字信号处理技术在一些学科中的应用情况。

通信　通信系统中处处都有数字信号处理技术的应用，例如各种编码调制、对通信通道的均衡、电话线路的回声对消、频分制与时分制之间的自动转接等等。

图象处理　图象信号是照度和反射度这两个分量的乘积。若将这两个分量分离，分别给予不同的加权，再加以合成，就能得到新的质量较高的图象信号。这种乘积信号的分离与合成是用对数和反对数的变换来实现的，这种处理属于数字信号处理技术中的同态滤波。对月球或深空探测器送回的电视图象、卫星气象照片、为发现森林火灾或农业灾害拍摄的航空照片，如果混有噪声或聚焦不佳，可以用数字信号处理技术进行图象恢复和增强。用数字信号处理技术进行图象识别，已用于导弹或航天器的轨道控制，甚至机器人人工眼的实现。

语音处理　语音信号是声门脉冲串与声道响应这两个分量卷积的结果。为提高通信效率进行的语音压缩和为治安、加强人机联系进行的语音识别均要求将语音信号中的两个分量分离开来，而语音合成则需要将两个分量合成为语音信号。卷积信号的分离与合成也运用同态滤波技术。即：根据卷积定理先求其傅里叶变换，使之转变为频域乘积信号，再做对数变换，将其转变为相加的信号，然后给予不同的加权处理，最后经反对数变换和反傅里叶变换恢复为卷积信号。还有若干种数字信号处理技术也可用于语音处理。

地震探测　地震探测是石油与天然气勘探的重要手段。地震法利用人工地下爆破来产生一个脉冲激励，以地层作为传输通道，在观测点上接收地震信号。该信号是由激励分量和反映地质构造的响应分量卷积而成的，同时受到其它一些因素的影响。因此要采用包括同态滤波、最佳滤波在内的一套特殊的地震信息改善和信息自动提取技术。

雷达与声纳　在雷达系统和声纳系统中，应用数字信号处理技术进行复杂背景噪声环境下的信号检测，实现对动目标的自动跟踪。数字信号处理技术还用于雷达天线阵列和声纳换能器基阵设计。

生物医学　生物医学领域中的脑电、心电、肌电、心音分析均需经信号处理，提取有关参数。CT 更是数字信号处理技术成功应用的一个典型例子。

自动控制　自动控制中的积分、微分等数值计算公式和最优控制卡尔曼滤波、自适应控制等复杂的控制规律本身就是数字信号处理算法。

检测与仪器仪表　检测的目的是认识被测对象。由于数字信号处理技术的应用，许多过去难以提取的信息被提取出来，检测理论得以高效地实现。借助于数字信号处理技术中的各种变换，可以将测得信号在时域、频域、幅值域、序域、空域多个侧面进行分析，得到对被测对象更全面、更深刻、更本质的认识；通过识别和参数估计，能够获得用于分析或控制的过程模型，和用于特征提取、数据压缩的信号模型等。

仪器仪表的水平决定了科学技术的发展水平。由于数字信号处理技术的应用，仪器仪表

功能增强、性能提高、适应面更加广泛。例如，在用电子轨道衡对行进中的列车进行动态称重时，叠加在重量信号上的干扰主要是车辆行进引起的振动，振动频率为2.5～5Hz，略高于重量信号的宽度(列车通过轨道衡的时间)之倒数。去除干扰的方法之一是进行低通滤波，而滤波器的过渡带必须很窄。这对模拟滤波器来说极难做到。又如，声强分析仪的两个输入通道要求特性完全一致，用模拟器件实现难度很大。在这些情况下，数字滤波器的优越性得到了充分体现。数字滤波器的特性仅取决于一组系数以及表示系数、进行运算的字长。它既不会因过渡带窄、截止频率低而使电路体积庞大，也不会因元件特性不一致而造成通道特性的差异。如前所述，数字处理的精度、分辨率和动态范围也是模拟处理难以比拟的。

一台仪器可同时具有滤波、相关、谱分析、统计分析等多种功能。还可容易地实现传感器非线性补偿和连续测量过程中的动态校准，以及多点巡检、分时处理。

应用数字信号处理技术，可对机器的运行状况进行识别、预测和监视。例如，齿轮偏心、齿距不均、平衡不善、对中不良和机械松动会造成齿轮箱振动信号中的调幅、调频现象。对该振动信号做希尔伯特(Hilbert)变换、谱分析或倒谱分析，能定量地进行齿轮箱故障诊断，为指导生产和维护提供依据。

综上所述，数字信号处理技术不仅在通信、雷达、声纳、语音处理、图象处理、地质勘探、遥感遥测、自动控制、生物医学、核物理等领域起着重要作用，在机械、宇航、机器人、天文气象、土建工程、仪器设备等方面的应用日益深入，而且进入了文教、卫生、军事、治安等社会生活的各个方面，甚至家用电器和儿童玩具也因此而锦上添花。数字信号处理的理论与技术作为认识客观世界的手段和工具，还在不断以新的方式应用于新的领域。它有力地促进了许多老学科的发展和新学科的建立，已成为许多专业所需要的共同基础之一。

第一章　离散时间信号与系统

本章介绍离散时间信号与系统的基本概念，从时域、频域、复频域诸侧面进行描述和分析，为全书提供必要的、基本的数学方法。考虑到对模拟信号进行数字处理这种工程需要，在§1-5节中专门讨论连续时间信号与抽样所得离散时间信号的联系、连续时间系统与相应的离散时间系统之间的联系。

§1-1　离散时间信号

离散时间信号仅在自变量(时间)的离散值上才有定义。它可以通过对连续时间信号抽样获得，也可能是数字系统(如数字计算机)在离散的时间瞬间产生的输出。

一、序列的定义

离散时间信号在数学上可表示成数的序列

$$x=\{x(n)\}\qquad -\infty<n<\infty \tag{1-1}$$

式中，n为整变量；$x(n)$表示序列中第n项的值，尽管序列不一定是连续时间信号抽样所得，习惯上我们仍称$x(n)$是序列的第n个抽样(或称抽样值、样本)；$\{\cdot\}$是集合符号，上式也可写成

$$x=\{x(-\infty),\ \cdots,\ x(-1),\ x(0),\ x(1),\ \cdots,\ x(\infty)\}$$

为避免符号表示上不必要的繁琐，本书中用序列的普遍项来表示整个序列$\{x(n)\}$，记作序列$x(n)$。

序列也可用图形来形象化地表示，如图1-1所示。图中线段的长短表示$x(n)$数值的大小。横坐标尽管连续画出，但只有当序数n等于整数时，$x(n)$才有定义。对于非整数的n，$x(n)$没有定义，将其想象为零是不正确的。

二、常用序列

数字信号处理中常用的典型序列列举如下。

（一）单位抽样序列

单位抽样序列记作$\delta(n)$，定义为

$$\delta(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases} \tag{1-2}$$

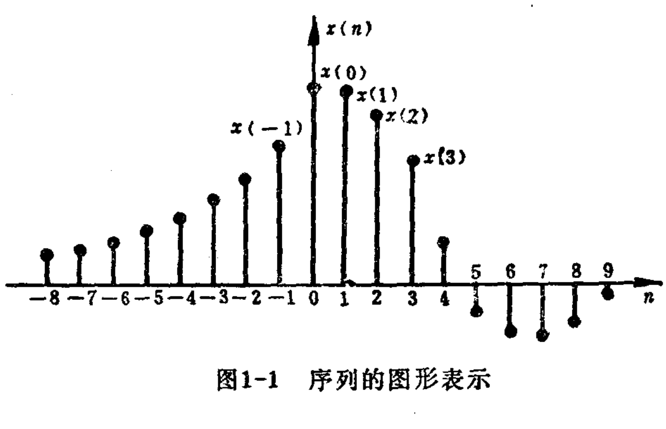


图1-1　序列的图形表示

如图1-2 a 所示。它的作用类似于连续时间信号中的单位冲激信号$\delta(t)$。但$\delta(n)$具有完全确定的定义，在$n=0$处，$\delta(0)=1$。

（二）单位阶跃序列

单位阶跃序列记作$u(n)$，定义为

$$u(n)=\begin{cases}1 & n\geqslant 0\\ 0 & n<0\end{cases} \tag{1-3}$$

如图1-2 b 所示。它类似于连续时间信号中的单位阶跃信号$u(t)$，但在$n=0$处，$u(n)$有确定的取值$u(0)=1$。

（三）矩形序列

矩形序列用$R_N(n)$表示，定义为

$$R_N(n)=\begin{cases}1 & 0\leqslant n\leqslant N-1\\ 0 & 其它\ n\end{cases} \tag{1-4}$$

从$n=0$至$n=N-1$，它共有N个幅度为1的抽样，其余皆为零值抽样。其图形见图1-2 c，包络线为一矩形。

（四）指数序列

指数序列的表示式为

$$x(n)=a^n u(n) \tag{1-5}$$

即

$$x(n)=\begin{cases}a^n & n\geqslant 0\\ 0 & n<0\end{cases} \tag{1-6}$$

式中，a为实数。当$|a|<1$时，序列是收敛的；$|a|>1$时，序列是发散的；a为负数时，序列是正负摆动的。图1-2 d 给出$0<a<1$时的图形。

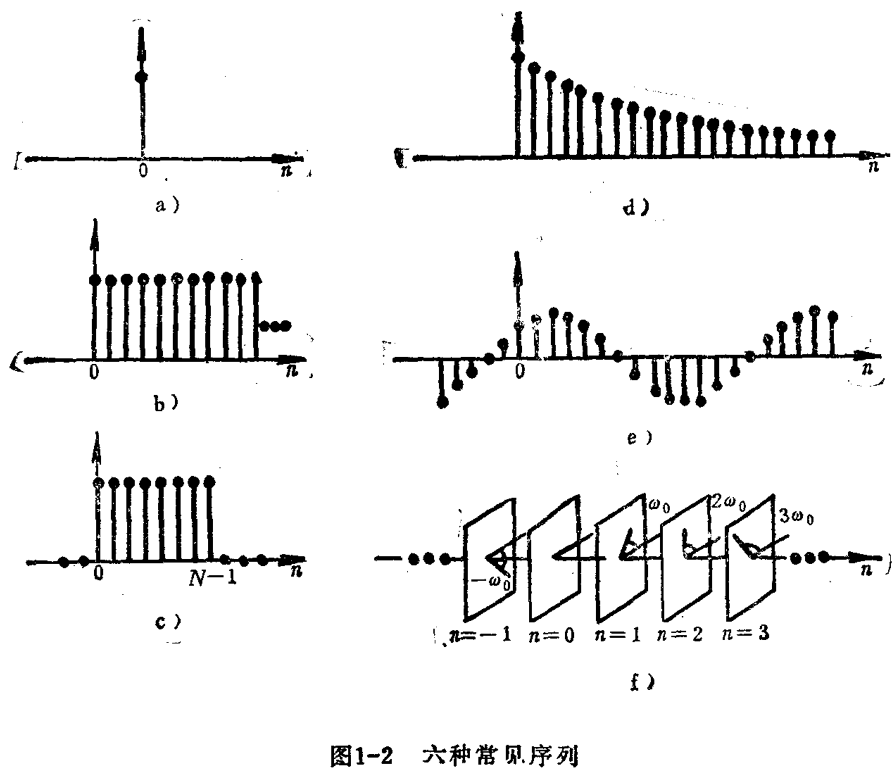


图1-2　六种常见序列

（五）正弦序列

正弦序列如图1-2 e 所示。其一般表示式为

$$x(n)=A\sin(\omega_0 n+\phi) \tag{1-7}$$

式中，ω_0是正弦序列的数字角频率，ϕ为初相角。由于n是无量纲的整数，所以此处ω_0的单位为rad，而不是 rad/s。数字角频率的数值反映了序列周期性变化的快慢。

（六）复指数序列

序列的抽样值也可以是复数，称为复序列。复指数序列定义为

$$x(n)=e^{j\omega_0 n} \tag{1-8}$$

其图形需在三维空间中作出，如图1-2 f 所示。

与复指数信号$e^{j\Omega t}$作为连续时间信号傅里叶分析的基本单元类似，复指数序列$e^{j\omega n}$作为序列分解的基本单元，在序列的傅里叶分析中起着重要的作用。

三、序列的周期性

如果对任意整数n均有

$$x(n)=x(n+N) \qquad (N\text{为正整数}) \tag{1-9}$$

则序列$x(n)$是周期序列，其周期为N。序列周期性的另一种数学表示为

$$x(n)=x(n+rN) \tag{1-10}$$

其中，r为任意整数。

正弦序列是否具有周期性，取决于ω_0的值。如$\sin[\omega_0(n+N)]$，当$\omega_0 N=2\pi k$，而k为整数时，

$$\sin[\omega_0(n+N)]=\sin\omega_0 n$$

是周期序列，周期$N=2\pi k/\omega_0$。注意，这里的N必须是正整数，而k限制取整数。分几种情况讨论如下：

当$2\pi/\omega_0$是整数时，只要取$k=1$，就能保证N是整数。显然此时$N=2\pi/\omega_0$，即正弦序列是周期序列，其周期为$2\pi/\omega_0$。

若$2\pi/\omega_0$不是整数而是一有理数，即$2\pi/\omega_0=Q/P$，Q和P是互质的整数，则只有取k为P的整数倍才能保证N为整数。此时的$N=(2\pi/\omega_0)P$，即正弦序列是周期性的，但周期大于$2\pi/\omega_0$。

当$2\pi/\omega_0$是无理数时，无论k取什么整数，均不能使N成为整数。所以此时正弦序列不是周期性的。

因为复指数序列$e^{j\omega_0 n}=\cos\omega_0 n+j\sin\omega_0 n$，所以复指数序列周期性的判别与正弦序列相同。

无论正弦序列或复指数序列是否为周期序列，参数ω_0均称为它们的数字角频率，有时简称为频率。

四、序列的基本运算

对序列进行运算，其结果是一个新序列。序列的几种基本运算及运算规则如下：

两个序列相加　序列$x_1(n)$和序列$x_2(n)$相加时，将它们的各个对应项即对应抽样相加，就是

$$x(n)=x_1(n)+x_2(n) \qquad -\infty<n<\infty$$

两个序列相乘　序列$x_1(n)$和序列$x_2(n)$相乘时，将它们的各对应项相乘，即

$$x(n)=x_1(n)x_2(n) \qquad -\infty<n<\infty$$

序列与常数相乘　这意味着将序列的每一项都乘以该常数，

$$x(n)=ax_1(n) \qquad a\text{为常数，}\ -\infty<n<\infty$$

序列的移序（延时）　如果序列 $x(n)$ 与序列 $x_1(n)$ 之间满足

$$x(n)=x_1(n-m) \qquad (m\text{为整数})$$

则称序列 $x(n)$ 为序列 $x_1(n)$ 的移序。m 为正值时，称为向右移序；m 为负值时，称为向左移序。例如，单位抽样序列的移序

$$\delta(n-m)=\begin{cases}1 & n=m\\ 0 & n\neq m\end{cases} \tag{1-11}$$

如图 1-3 所示。

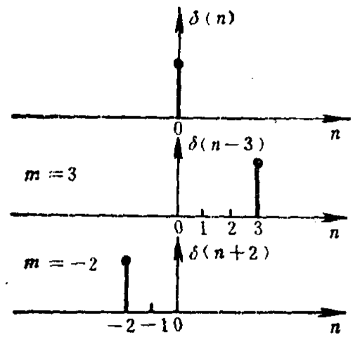


图1-3　单位抽样序列及其移序序列

根据序列的运算规则，容易写出单位抽样序列、单位阶跃序列及矩形序列之间的关系：

$$\delta(n)=u(n)-u(n-1)$$

$$R_N(n)=u(n)-u(n-N)$$

$$=\sum_{m=0}^{N-1}\delta(n-m)$$

$$u(n)=\sum_{m=0}^{\infty}\delta(n-m)$$

五、任意序列的一般表示

利用单位抽样序列的定义和移序的概念，可以写出任意序列 $x(n)$ 的一般表示式

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m) \tag{1-12}$$

式中，$x(m)$ 是序列 $x(n)$ 中 $n=m$ 处的那个抽样，$\delta(n-m)$ 是移序 m 点后的单位抽样序列。上式表明，任意序列可视为加权的、移序的单位抽样序列之和。序列的这种统一表示法对分析离散时间线性系统很有用。

例如，图1-4所示序列 $x(n)$ 可表示为

$$x(n)=-1.5\delta(n+2)+2\delta(n)+0.5\delta(n-1)$$
$$-\delta(n-3)$$

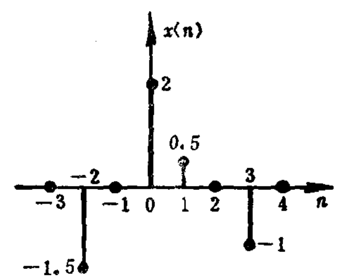


图1-4　任意序列的一般表示

六、序列的能量

序列的能量定义为序列的各抽样值的平方和，即

$$E=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2$$

§ 1-2 线性移不变离散时间系统

离散时间系统本质上是将输入序列变换为输出序列的运算或变换。图 1-5 给出离散时间系统的简单表示。输入 $x(n)$与输出 $y(n)$之间的关系为

$$y(n)=T[x(n)]$$

式中符号$T[\cdot]$表示变换关系，由具体的系统确定。对$T[\cdot]$加上不同的约束条件，可定义各类离散时间系统。

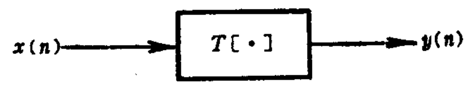


图1-5 离散时间系统

一、线性移不变系统

一个离散时间系统，设输入分别为$x_1(n)$和$x_2(n)$时，输出分别为$y_1(n)$和$y_2(n)$，即

$$y_1(n)=T[x_1(n)]$$

$$y_2(n)=T[x_2(n)]$$

将$ax_1(n)+bx_2(n)$作为系统的输入，如果输出为

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]=ay_1(n)+by_2(n)$$

这里 a 和 b 为任意常数，则该系统满足叠加原理，称为线性系统。

一个系统，设输入为 $x(n)$时，输出为 $y(n)$，即

$$T[x(n)]=y(n)$$

当输入为 $x(n-n_0)$时，如果输出为

$$T[x(n-n_0)]=y(n-n_0)$$

n_0为任意整数，则该系统特性（即运算关系$T[\cdot]$）不随时间（即序列到来的早晚）改变，称为移不变系统。

既满足线性条件又满足移不变条件的系统，称为线性移不变系统。这是一种最常用的系统，可以用常系数线性差分方程和单位抽样响应来描述。

二、单位抽样响应

单位抽样响应是当系统的输入为单位抽样序列$\delta(n)$时系统的输出序列，用符号$h(n)$表示，

$$h(n)=T[\delta(n)] \tag{1-13}$$

若已知线性移不变系统的$h(n)$，可以求得该系统对任意输入序列$x(n)$的响应$y(n)$。由式(1-12)，任一输入序列可表示为

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)$$

则系统输出为

$$y(n)=T[x(n)]=T\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)\right]$$

由于系统是线性的，

$$T\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)\right]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)T[\delta(n-m)]$$

又由于系统是移不变的，

$$T[\delta(n-m)]=h(n-m)$$

所以

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m) \qquad (1\text{-}14)$$

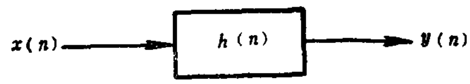


图1-6　线性移不变系统

这说明，任何线性移不变系统都可以完全地由它的单位抽样响应表示，如图 1-6 所示。

三、线性卷积

式(1-14)的运算与线性时不变连续时间系统的卷积积分运算类似，故称为卷积，或离散卷积。为了与以后定义的周期卷积、循环卷积相区别，式(1-14)定义的运算又称为线性卷积。当不致于引起误会时也简称卷积。

式(1-14)的物理意义是：线性移不变系统的输出序列等于输入序列与系统的单位抽样响应之线性卷积。

令$m'=n-m$，对式(1-14)进行变量代换，则

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)=\sum_{m'=-\infty}^{\infty}h(m')x(n-m') \qquad (1\text{-}15)$$

用符号$*$表示线性卷积运算，上式可简写为

$$y(n)=x(n)*h(n)=h(n)*x(n) \qquad (1\text{-}16)$$

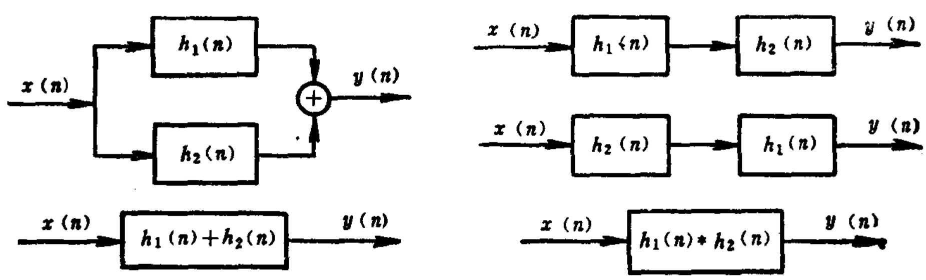
这表明，线性卷积运算满足交换律，运算结果与参加运算的两个序列之先后次序无关。因此，序列$x(n)$输入到具有单位抽样响应$h(n)$的线性移不变系统，或序列$h(n)$输入到具有单位抽样响应$x(n)$的线性移不变系统，将产生相同的输出。

卷积运算还满足分配律和结合律，即

$$x(n)*[h_1(n)+h_2(n)]=x(n)*h_1(n)+x(n)*h_2(n)$$

$$[x(n)*h_1(n)]*h_2(n)=x(n)*[h_1(n)*h_2(n)]$$

若$h_1(n)$和$h_2(n)$分别为两个子系统的单位抽样响应，$x(n)$为输入序列，如图 1-7 所示，则根据线性卷积运算的性质可知，并联系统的等效系统具有单位抽样响应



a)　　b)

图1-7　系统组合及等效系统（一）

a）并联组合　b）级联组合

$$h(n)=h_1(n)+h_2(n) \qquad (1\text{-}17)$$

级联系统的等效系统具有单位抽样响应

$$h(n)=h_1(n)*h_2(n)=h_2(n)*h_1(n)$$

由于线性卷积运算满足交换律，上式后一等号成立。也就是说，若干系统级联时可以不考虑级联顺序。

由上述可见，线性卷积除了理论上的重要性之外，还可用于实现一个线性移不变系统。因此，熟练掌握线性卷积运算很有必要。

当使用线性卷积式(1-14)求 $y(n)$ 时，式右边求和的变量是 m，而 n 以参变量形式出现。对每个既定 n 值，计算序列 $x(m)$ 与 $h(n-m)$ 的乘积，然后在 m 的全部区间内求新序列 $x(m)h(n-m)$ 各项之和，即得该给定 n 值时输出的抽样值 $y(n)$。对所有 n 值逐个重复上述过程，即得序列 $y(n)$ 的各个抽样值。这里的序列 $x(m)$ 和 $h(n-m)$ 是将原序列 $x(n)$ 和 $h(n)$ 的变量 n 换为 m，并将 $h(m)$ 对称于纵轴卷褶成 $h(-m)$、再右移 n 所得。运算时可借助于图形、表格等。下面举例说明。

例1-1 已知系统的单位抽样响应为

$$h(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & 0\leqslant n\leqslant 4\\ 0 & \text{其它 } n\end{cases}$$

也就是 $h(n)=\frac{1}{2}[u(n)-u(n-5)]$。求系统对输入序列 $x(n)=u(n)-u(n-3)$ 的响应。

解 用作图法，见图 1-8。

(1) 将序列 $x(n)$ 和 $h(n)$ 的变量 n 换为 m，得序列 $x(m)$ 和 $h(m)$。

(2) 将 $h(m)$ 对称于纵轴卷褶，得 $h(-m)$。

(3) 将 $h(-m)=h(0-m)$ 移序 n 点，得序列 $h(n-m)$，再与 $x(m)$ 相乘，得新序列 $x(m)h(n-m)$。

(4) 求新序列各项之和，得 n 时刻系统输出的一个抽样。

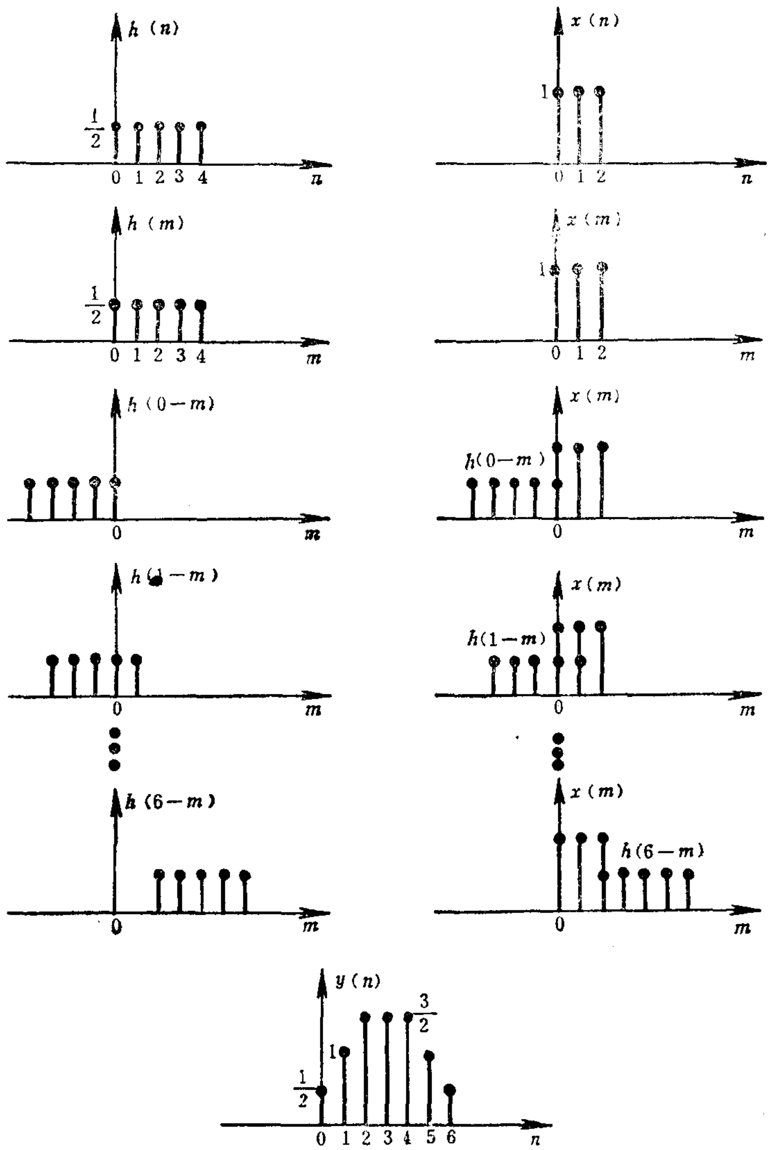


图1-8 线性卷积运算的图解

对 $n=\cdots,-1,0,1,\cdots$ 重复上述第(3)、(4)两步，可得输出序列 $y(n)$ 的各个抽样值。

由图可见，当 $n<0$ 和 $n>6$ 时，$x(m)$与$h(n-m)$的非零项不相重叠，因此乘积序列$x(m)h(n-m)$的各项均为零，故$y(n)=0$。本题中$x(n)$与$h(n)$的长度分别为 3 和 5（即有非零抽样的区间长 3 点和 5 点），能使$x(m)$与$h(n-m)$有重叠的非零项的n值只有 7 个，因此$y(n)$的长度为 7 点。一般说来，若参加线性卷积运算的两个序列的长度分别为N_1和N_2，则得到的新序列的长度为N_1+N_2-1。

表1-1 线性卷积运算的表格法

m	$\cdots$	-1	0	1	2	3	$\cdots$	
$h(m)$	$\cdots$	0	-1	2	1	0	$\cdots$	
$x(m)$	$\cdots$	0	2	-1	0	0	$\cdots$	
$x(0-m)$	$\cdots$	-1	2	0	0	0	$\cdots$	$y(0)=(-1)\times 2=-2$
$x(1-m)$	$\cdots$	0	-1	2	0	0	$\cdots$	$y(1)=(-1)\times(-1)+2\times 2=5$
$x(2-m)$	$\cdots$	0	0	-1	2	0	$\cdots$	$y(2)=2\times(-1)+1\times 2=0$
$x(3-m)$	$\cdots$	0	0	0	-1	2	$\cdots$	$y(3)=1\times(-1)=-1$

例1-2 已知$x(n)=2\delta(n)-\delta(n-1)$，$h(n)=-\delta(n)+2\delta(n-1)+\delta(n-2)$，求$y(n)=x(n)*h(n)$。

解 用表格法。先作变量代换，将$x(m)$、$h(m)$填入表 1-1 中。线性卷积运算的结果与两序列的次序无关，故本例中将$x(m)$卷褶并移序。$h(m)$只有三个非零项，表中用虚线框起。$x(-m)$移序后，只有位于框内的部分对相乘、求和结果有贡献。因而，只需对那些使$x(n-m)$有非零项落于框内的n（本例中为 0、1、2、3）列出$x(n-m)$，并求$y(n)$。结果得输出序列$y(n)=-2\delta(n)+5\delta(n-1)-\delta(n-3)$。$y(n)$的长度为$2+3-1=4$。

例1-3 某系统的单位抽样响应$h(n)=a^n u(n)$。求系统对输入$x(n)=u(n)-u(n-N)$的响应$y(n)$。

解 $x(n)$是无限长序列，因而$y(n)$的长度也必定无限。用解析法求线性卷积。画出$x(m)$和$n=0,4,-4$时的$h(n-m)$于图 1-9。将n分成三个区间：

（1）$n<0$。当$m<0$时，$x(m)=0$；而$m\geqslant 0$时，$n-m<0$，故有$h(n-m)=0$；因此对所有m，都有$x(m)h(n-m)=0$，故$y(n)=0$。

（2）$0\leqslant n<N$。当$m<0$时，$x(m)$

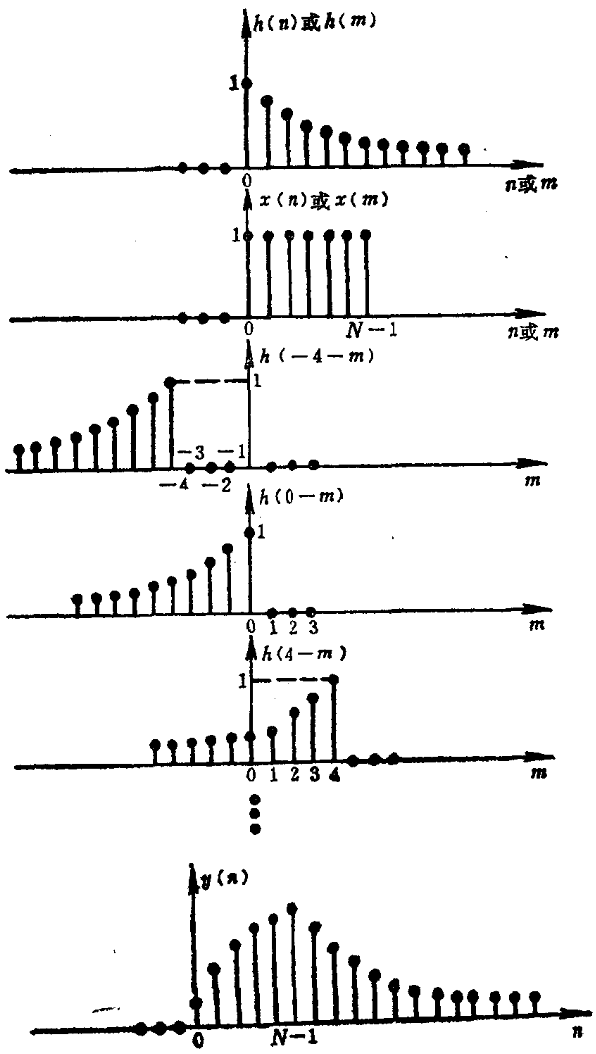


图1-9 例1-3求线性卷积示意