

陆承祖 编
王克起

静电原理及防灾

天津大学出版社

前 言

随着工业生产的不断发展，特别是高分子材料工业、石油化学工业、化纤工业、爆破器材工业以及航空、航天工业的不断发展，静电的危害显得越来越突出了。因静电发生的灾害日益增多，因此，人们对静电危害的认识也越来越深入，并给予足够的重视和研究。本书是为静电及其防灾研究的科技工作者提供理论和实际知识编写的。其目的在于，通过阅读本书使科技工作者在静电防灾研究方面打下初步基础。

本书是作者在多年为爆破器材与技术专业讲授《静电安全技术》课程经验的基础上编写的。全书共分六章。第一、二两章，系统地阐述了静电场的基本规律和性质，同时还介绍了简单的静电场的求解方法；第三章从晶体的能带理论出发，着重介绍固体、液体、粉体、气体和人体的静电产生规律以及影响起电电量的因素，还介绍了电荷在导体和绝缘体上积累及流散的规律；第四章在列举了一些静电事故的实例之后，系统地阐述了静电事故产生的条件和静电事故的预测、判断和分析处理方法；第五章介绍了静电防灾技术的主要部分，即减少静电产生的静电抑制、导走已产生静电的静电泄漏以及中和已产生静电的静电消除；第六章全面系统地介绍了静电防灾中各种静电量的测量方法和测量原理。本书附录编入了各种物质的电气性能参数。

本书第一至第六章及附录由淮南矿业学院陆承祖同志编写。书中全部插图由天津大学王克起同志绘制。

本书承天津市物理学会副理事长、天津大学物理系教授李金镔审查。李教授在审查过程中提出了不少宝贵的意见。编者谨在此致以深切的谢意。

由于编者水平有限，书中不妥和错误之处可能不少，衷心欢迎阅读本书的科技工作者批评指正。

编者

1990.4.

目 录

第一章 静电学的基本原理

§ 1-1 库仑定律	(1)
§ 1-2 电场强度	(1)
§ 1-3 高斯定理	(3)
§ 1-4 电场强度 $\vec{E}$ 的散度	(7)
§ 1-5 电位及电位梯度	(9)
§ 1-6 电场的无旋性	(13)
§ 1-7 静电场的基本方程	(16)

第二章 静电场中的导体和电介质

§ 2-1 静电场中的导体	(20)
§ 2-2 电容和部分电容	(22)
§ 2-3 静电场中的电介质	(29)
§ 2-4 电介质中的高斯定理 边界条件	(31)
§ 2-5 介质的击穿	(33)
§ 2-6 静电场的能量和电场力	(42)
§ 2-7 静电场的求解法	(48)

第三章 静电的产生、积累和流散

§ 3-1 能带理论	(66)
§ 3-2 固体与固体的接触起电	(68)
§ 3-3 影响接触起电量的因素	(75)
§ 3-4 固体起电的其它形式	(79)
§ 3-5 液体起电的偶电层理论	(82)
§ 3-6 液体介质的起电	(87)
§ 3-7 影响液体介质起电量的因素	(93)
§ 3-8 粉体介质的起电	(98)
§ 3-9 气体的起电	(105)
§ 3-10 电荷的积累和流散	(108)
§ 3-11 人体的静电	(114)

第四章 静电的障害和灾害

§ 4-1 静电障害举例和分析	(119)
§ 4-2 静电的灾害	(122)
§ 4-3 静电灾害的预测和判别	(132)
§ 4-4 静电电击	(138)
§ 4-5 静电灾害的分析方法	(139)

第五章 静电灾害的防护

§ 5-1 静电的抑制	(145)
§ 5-2 静电的泄漏	(151)
§ 5-3 静电的消除	(160)
§ 5-4 静电消除器的选择、安装和维护	(173)

第六章 静电测量

§ 6-1 静电电位的测量	(176)
§ 6-2 静电电量的测量	(185)
§ 6-3 电场强度的测量	(193)
§ 6-4 静电放电能量的测量	(193)
§ 6-5 静电测量中的几个问题	(196)
§ 6-6 电阻的测量	(197)
§ 6-7 电阻率或电导率的测量	(200)
§ 6-8 电容的测量	(205)
§ 6-9 介电常数的测量	(208)
§ 6-10 时间常数、半值时间和松弛时间的测量	(212)
§ 6-11 最小点火能的测量	(213)
§ 6-12 防静电用品的静电测量	(216)

附录1 静电系列	(224)
----------------	-------

附录2 气体、液体的物理特性	(225)
----------------------	-------

附录3 气体、液体蒸汽和粉体的引燃危险性	(234)
----------------------------	-------

1. 各种可燃性气体、液体蒸汽的引燃危险性 (和氧混合)

2. 粉末的引燃危险性

附录4 绝缘性固体的体电阻率和介电常数	(237)
---------------------------	-------

附录5 电介质的击穿场强	(239)
--------------------	-------

附录6 固体物质的功函数	(242)
--------------------	-------

附录7 $\nabla \cdot E$ 、 $\nabla \Phi$ 、 $\nabla \times E$ 和 ∇^2 在圆柱坐标和球面坐标中的展开式	(243)
---	-------

主要参考文献	(245)
--------------	-------

第一章 静电学的基本原理

§ 1-1 库仑定律

1875年, 库仑在实验基础上总结出点电荷之间相互作用的基本规律——库仑定律。这个定律可表述如下: 在真空中, 两个点电荷 q_1 、 q_2 之间相互作用力的大小 F , 和它们的带电量 q_1 、 q_2 的乘积成正比, 和它们之间距离 r 的平方成反比, 作用力的方向在它们的联线上。

若以 $\vec{F}$ 表示 q_1 作用于 q_2 上的力, $\vec{r}_0$ 表示 q_1 到 q_2 方向上的单位矢量 (图1-1), 则库仑定律可表示成矢量的形式, 即

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2 \vec{r}_0}{r^2} \quad (1-1)$$

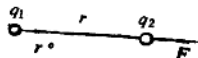


图 1-1

式中, ϵ_0 是真空介电常数。它的数值等于 $10^{-9}/3\pi = 8.85 \times 10^{-12}$ (F/m)。

q_2 作用于 q_1 上的力形式上与式(1-1)相同。但单位矢量 $\vec{r}_0$ 的方向则由 q_2 指向 q_1 。

在无限大均匀介质中, 两个相距为 r 的点电荷 q_1 和 q_2 之间的作用力可表示为

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1 q_2 \vec{r}_0}{r^2} \quad (1-2)$$

式中, $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ 称为介质的介电常数。 ϵ_r 称为介质的相对介电常数, 它是一个纯数。一些物质的相对介电常数 ϵ_r 见附录6。

真空的相对介电常数 $\epsilon_r = 1$ 。

库仑定律是静电学的实验基础。它在从 10^{-15} cm至若干公里的巨大范围内都是正确的。

§ 1-2 电场强度

1. 电场

电荷周围空间存在着的一种特殊物质, 称为电场。相对于观察者 $\bullet$ 为静止的, 且其电量不随时间而变的电荷所产生的电场, 称为静电场。静电场对外有下述两方面的重要表现:

- ①对引入电场中的任何带电体有力的作用, 这种力称为电场力;
- ②当带电体在电场中移动时, 电场作用于带电体上的力对带电体作功。

应从电场上这两个表现研究静电场的基本性质。

2. 电场强度

为了研究电场中各点的性质, 引入试验电荷的概念。所谓试验电荷是一个占有空间很小、带电量很少的正电荷。

实验表明, 试验电荷 q_0 置于电场中不同点时, 它受到的电场力 $\vec{F}$ 的大小和方向是不同的, 表明电场各点的强弱和方向是不同的。为此, 引入矢量 $\vec{E}$ 描述静电场的这种性质, 称为电场强度, 简称场强。定义为

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \quad (1-3)$$

在上式中, 当试验电荷为一个单位电量的点电荷, 即 $q_0 = +1$ 个单位时, $\vec{E} = \vec{F}$ 。这表示电场中某点的电场强度在数值上和方向上都等于一个单位电量的正电荷在该点所受的力。电场强度的单位为 N/C 或 V/m 。

3. 场强的计算*

现在推导不同电荷所建立电场中任意一点的场强公式。

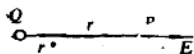


图1-2

(1) 点电荷电场中的场强 设在真空中有一个点电荷 Q , 在距离点电荷 r 处的 P 点上 (图1-2) 试验电荷 q_0 所受的力, 根据库仑定律为 $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq_0}{r^2} \vec{r}$, 所以该点的场强为

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{r} \quad (1-4)$$

式中, $\vec{r}$ 是由源点 (电荷所在点) 指向场点的单位矢量。

(2) 点电荷系电场中的场强 对于 n 个点电荷产生的电场, 实验指出, 线性介质 (其介电常数不随电场强度而变的电介质) 中, 试验电荷 q_0 在电场中某点所受的力等于各个点电荷对 q_0 作用力的矢量和, 即

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$$

上式两边都除以 q_0 , 得

$$\frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{\vec{F}_1}{q_0} + \frac{\vec{F}_2}{q_0} + \dots + \frac{\vec{F}_n}{q_0}$$

根据场强的定义, 上式右边各项分别是各点电荷在场中任意一点产生的场强, 而左边为合成场强。

由此可见, 线性介质中, 电场中任意一点的合成场强等于各个点电荷分别在该点产生场强的矢量和, 即

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i^2} \vec{r}_i \quad (1-5)$$

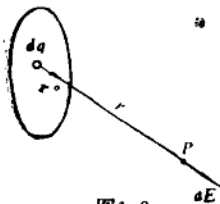


图1-3

上式被称为场强的叠加原理。

(3) 带电体电场中的场强 任意一个带电体都可以看成是许许多多极小的电荷元 dq 的集合, 这些电荷元均可视为点电荷, 其中任一电荷元 dq 在 P 点产生的场强 (图1-3) 为

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{r}$$

式中, $\vec{r}$ 是由 dq 指向 P 点的单位矢量。整个带电体在 P 点产生的场强, 根据场强的叠加原理, 应等于各电荷元分别在 P 点产生场强的矢量和, 即

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \vec{r} \quad (1-6)$$

已经知道,任何带电体上的电荷分布从微观结构来看是不连续的,但当考察宏观现象时,可以把电荷看成是连续分布的,在这种情况下可以引入电荷密度概念。

当电荷分布在截面可以忽略的线状物体上时,可定义电荷的线密度为

$$\tau = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl}$$

τ 的单位为 C/m(库/米)。由于 $dq = \tau dl$, 所以整个线状带电体在电场中任意一点所产生的场强按 (1-6) 式得

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\tau d\vec{l}}{r^2} \quad (1-7)$$

当电荷分布在可以忽略厚度的面上时,可定义电荷的面密度为

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS}$$

σ 的单位为 C/m²。由于 $dq = \sigma dS$, 因此,全部分布在面上的电荷在电场中一点 P 所产生的场强,按式 (1-6) 可写为

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma d\vec{S}}{r^2} \quad (1-8)$$

当电荷作体分布时,定义其体电荷密度为

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}$$

ρ 的单位是 C/m³。由于 $dq = \rho dV$, 因此,所有分布在一定体积内的电荷在电场中任意一点产生的场强,按式 (1-6) 可写成

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho d\vec{V}}{r^2} \quad (1-9)$$

§ 1-3 高斯定理

静电场是矢量场。如果从矢量沿闭合面的通量和矢量沿闭合路径的环量这两方面去研究它,则可揭示出该矢量场的性质。本节先研究电场强度矢量沿闭合面通量揭示的静电场性质。

1. 电通量

通过电场中任意给定面上电力线的总数,称为该面上的电通量或 $\vec{E}$ 通量,用 Ψ 表示。

在电场中任意面 S 上取一面积元 dS , 由于它在空间取向不同同时通过的电通量不相同,所以它被表示为一个矢量,称为面积元矢量 $d\vec{S}$ 。它的模等于该面积元面积的大小,方向是它法线的正方向,而法线的正方向与规定的沿面积元边缘绕行方向之间符合右手螺旋关系。

在面积元 $d\vec{S}$ 上,电场强度矢量沿此面积元的通量为

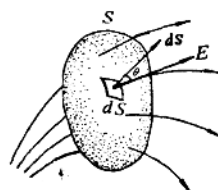


图 1-4

* 在无限大均匀介质中将式中的 ϵ_0 改为 ϵ 即可。

$$d\psi_s = E ds \cos\theta = \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

式中, θ 是面积元矢量 $d\vec{s}$ 与该处 $\vec{E}$ 矢量之间的夹角 (图1-4)。

电场强度 $\vec{E}$ 沿任意面 S 的通量为

$$\psi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_S E \cdot ds \cos\theta \quad (1-10)$$

如果 S 是一闭合面, 则

$$\psi_s = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (1-11)$$

对于闭合面, 取它的外法线方向作为面积元矢量 $d\vec{s}$ 的法线正方向。因此, ψ_s 的正值表示从闭合面内穿出的通量, 负值表示穿入闭合面的通量。

电通量是一个标量。它的单位为 V/m 。

2. 高斯定理

物理学中已证明, 在真空中, $\vec{E}$ 矢量沿闭合面的通量恒等于闭合面所包围电荷的代数和与真空介电常数的比值, 即

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\Sigma q}{\epsilon_0} \quad (1-12)$$

这就是真空中静电场的高斯定理。在无限大均匀介质中, 高斯定理在形式上与式 (1-12) 相同, 只是式 (1-12) 中的 ϵ_0 被 ϵ 所代替。

式 (1-12) 表明, 当 $\Sigma q > 0$, 即闭合面包围的净电荷为正时, $\psi_s > 0$, $\vec{E}$ 矢量沿闭合面的积分为正, 表示有净的 $\vec{E}$ 通量从闭合面内穿出来; 当 $\Sigma q < 0$, 即闭合面包围的净电荷为负时, $\psi_s < 0$, $\vec{E}$ 矢量沿闭合面的积分为负, 表示有净的 $\vec{E}$ 通量进入闭合面; 当 $\Sigma q = 0$, 即闭合面包围的净电荷等于零 (闭合面没有包围电荷或包围的正负电荷相等) 时, $\psi_s = 0$, $\vec{E}$ 矢量沿闭合面的积分等于零, 表示进入闭合面的 $\vec{E}$ 通量和穿出闭合面的相等。这说明高斯定理反映出: 电荷是 $\vec{E}$ 通量的“源”, 正电荷为正“源”, 负电荷为负“源”, $\vec{E}$ 线发源于正电荷而终止于负电荷, 也就是说高斯定理反映出了场和“源”的关系。

3. 高斯定理的应用

高斯定理的意义, 不仅在于它揭示出静电场的有“源”性, 还在于它对求解具有对称性的电场比用式 (1-6) 方便得多。下面举几个在静电场中经常碰到的、具有对称电荷分布的例子, 来说明高斯定理的应用。

例1-1 求均匀带电介质球内、外任一点的场强。

解: 如图1-5所示。设带电球体的半径为 R_0 , 体电荷密度为

$$\rho, \text{ 则球体总带电量 } Q = \frac{4}{3} \pi R_0^3 \rho.$$

由于电荷分布的均匀性和对称性, 球内外电场中各点的场强 $\vec{E}$ 都是径向的, 且在半径为定值的球面上, 场强的数值处处相等。因此, 无论在球内和球外, 都取以 O 点为球心, 并通过任意点 P 的球面为闭合面。

对于球内 ($r < R_0$) 一点 P , 应用 (1-12) 有

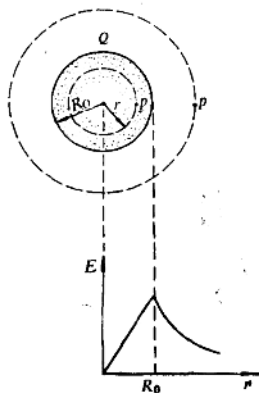


图1-5

$$\oint_S \vec{E}_s \cdot d\vec{s} = E_s \oint d\vec{s} = E_s \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon}$$

由此得球内任意的场强为

$$E_s = \frac{Q}{4\pi \epsilon r^2} \quad (1-13)$$

将 Q 代入上式后得

$$E_s = \frac{\rho r}{3\epsilon} \quad (1-14)$$

式中, ϵ 为球体介质的介电常数。

若 P 点在球外 ($r > R_s$), 应用高斯定理求得场强为

$$E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_s r^2} \quad (1-15)$$

将 Q 代入上式后, 则

$$E = \frac{R_s^3 \rho}{3\epsilon_s r^2} \quad (1-16)$$

式中, ϵ_s 为球外介质 (一般为空气) 的介电常数。

例1-2 求无限大均匀带电平面外一点的场强。

解: 设均匀带电平面上的面电荷密度为 σ ($\sigma > 0$)。由于电荷分布的均匀性和对称性, 又因为平面是无限大的, 所以, 电力线一定是两侧对称、分布均匀且垂直于平面的平行线 (图 1-6(a))。根据电场分布的这个特点, 选择如图 1-6(b) 所示的圆柱面作为闭合面。这个圆柱面的侧面垂直于带电的无限大平面, 两底面与带电平面平行。应用高斯定理

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = 2E \cdot \Delta s = \frac{\Delta s \cdot \sigma}{\epsilon_s}$$

可得均匀带电无限大平面外一点的场强为

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_s} \quad (1-17)$$

这个结果可以用来推导均匀偶电平板的电场, 如图 1-7 所示。由于偶电平板是由带 $+\sigma$ 和

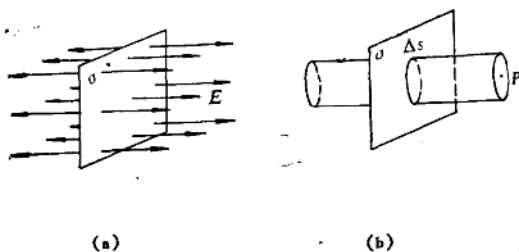


图1-6

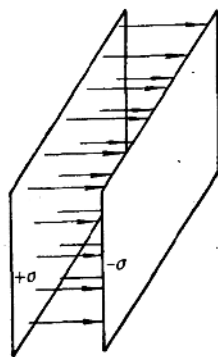


图1-7

$-\sigma$ 电荷两无限大平面构成, 正板上的电力线从平面垂直向外, 负板上的电力线垂直指向平面, 所以, 叠加的结果是: 两板之外互相抵消, $E = 0$, 两板之间互相加强, 变为无限大均匀

带电平面场强的两倍。由式 (1-17) 得

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (1-18)$$

平行板电容器两极板中部的电场属于这种情况。

例1-3 求无限长均匀带电介质圆柱体的场强。

解： 设带电介质圆柱体的体电荷密度为 ρ 。由于带电体是轴对称的，电力线一定垂直于圆柱体的轴线，并且在离轴线等距离处场强的大小相等。因此，在求圆柱体内和体外任一点 P 的场强时，均取过该点的圆柱面（其轴线与带电介质圆柱体轴线重合）为闭合面，如图 1-8 所示

过圆柱外一点 P 的闭合面高为 h ，半径为 r 。应用高斯定理，则

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = 2\pi r h \cdot E = \frac{\rho \cdot \pi R_0^2 h}{\epsilon_0}$$

由此可得圆柱体外一点 P 的场强为

$$E = \frac{\rho R_0^2}{2\epsilon_0 r} \quad (1-19)$$

同理，可求得圆柱体内任一点 P 的场强为

$$E = \frac{\rho r}{2\epsilon} \quad (1-20)$$

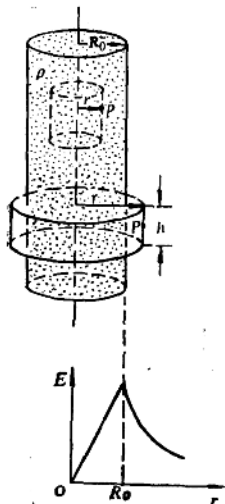


图1-8

式中， ϵ 是介质圆柱体本身的介电常数。

由式 (1-19) 和式 (1-20) 可知，当 $r = R_0$ 时，场强最大。可见，在用金属管道输送均匀带电的介质时，管道内壁处场强最大。若介质的体电荷密度 ρ 较大，管道半径 R_0 也较大时，管道内壁处的场强就可能很大而使这里的空气击穿。因此，当体电荷密度 ρ 一定时，管道半径 R_0 应有限制；反之，在管道半径给定时，介质内的体电荷密度不能超过一个极限值。金属的圆柱状介电物质贮仓的设计也应该考虑类似的问题。

例1-4 无限大匀厚度、匀带电介质层的场强。

解： 设在厚度为 d 的无限大介质层内，均匀地带有体密度为 ρ 的电荷。在介质层中间，做一个平行于介质层上、下表面的平面 A ，如图 1-9 所示。由于介质层无限大，且均匀地带有电荷，所以，介质层两侧电力线必然垂直于介质表面，并且在离平面 A 等距离处，两侧场强是相等的。为此，取对称于平面 A 、底面积为 ΔS 的正柱体的表面作为闭合面，如图 1-9 中的 S 和 S' 。这样介质外一点 P 的场强可以对通过它的闭合面 S' 应用高斯定理求得

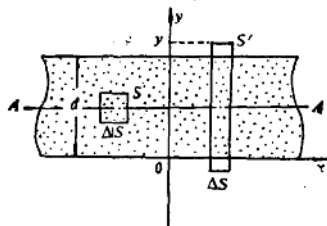


图1-9

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = 2E\Delta S = \frac{\rho\Delta S}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho d}{2\epsilon_0} \quad (1-21)$$

介质层内任一点 P 的场强, 可对闭合面 S 应用高斯定理求得, 即

$$\oint_S \vec{E}_s \cdot d\vec{S} = 2E_s \cdot \Delta S = \frac{\rho(2y-d)\Delta S}{\epsilon}$$

$$E_s = \frac{\rho(2y-d)}{2\epsilon} \quad (1-22)$$

由式 (1-22) 可知, 当 $y = \frac{d}{2}$ 时, 即在平面 A 上, $E = 0$; 当 $y = 0$ 或 $y = d$ 时, 场强有最大值。它们的绝对值均为 $\frac{\rho d}{2\epsilon}$ 。很明显, 当 ρ 和 d 都很大时, 就可能因场强过大而发生静电击穿现象, 这是很危险的。在生产中, 均匀地铺着凉干的粉体带电介质, 近似地属于这种情况。根据上述分析, 若粉体中 ρ 为定值时, 则粉体铺放的厚度应有限制。

如果上述介质层铺放在无限大接地的金属板上, 则又是另一种情况。这时金属板表面上感应出符号相反的电荷。若考虑介质层上表面的电位达到极大值这种极限情况, 则金属板表面单位面积上的感应电荷量与介质单位面积内的电量相等, 为 $-\rho d$, 由式 (1-17) 求得该无限大均匀带电金属板上部空间的空气中和介质层中产生的场强分别为 $-\frac{\rho d}{2\epsilon_0}$ 和 $-\frac{\rho d}{2\epsilon}$ 。这样, 均匀介质层内、外的合成场强为

$$\begin{aligned} \text{介质外: } E &= 0 \\ \text{介质内: } E_s &= \frac{\rho(y-d)}{\epsilon} \end{aligned} \quad (1-23)$$

式 (1-23) 表明, 在 $y = 0$ 处, 即在介质层与金属板相接触处, 场强最大, 并且比无金属板时增大了一倍。

作为上述情况的实例, 分析体密度为 ρ 的均匀带电粉体均匀地铺在接地的金属板上的情况。如果该粉体与金属板间的空气隙内场强不得超过 20 kV/cm , 则由式 (1-23), 在令 $y = 0$ 及 $\epsilon = \epsilon_0$ 之后, 求得最大铺放的厚度为

$$d = \frac{\epsilon_0 E}{\rho} = \frac{8.85 \times 10^{-12} \times 20 \times 10^5}{10^{-4}} = 0.177 (\text{m})$$

§ 1-4 电场强度 $\vec{E}$ 的散度

1. 场强 $\vec{E}$ 的散度

高斯定理反映了通量及其“源”之间的关系。但积分形式的高斯定理表示的是一个大范围内的关系。对场的研究还要求知道场中各点的这种关系。因为只有这样才能反映出场沿空间坐标的变化规律。

为了确定电场中一个点附近通量及其“源”之间的关系, 把闭合面缩小, 使包含这一点在内的体积 ΔV 趋近于零, 再取下面的极限

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}}{\Delta V}$$

这个极限值称为场强矢量 $\vec{E}$ 在该点的散度, 记为 $\text{div } \vec{E}$ 或 $\nabla \cdot \vec{E}$, 即

$$\operatorname{div} \vec{E} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s}}{\Delta V} \quad (1-24)$$

由此可见, 电场中某点场强 $\vec{E}$ 的散度即为该点电通量密度的极限值。它是一个标量点函数, 单位为 V/m^3 。

把高斯定理应用于此小闭合面, 则得 $\vec{E}$ 的散度为

$$\nabla \cdot \vec{E} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s}}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q / \epsilon_0}{\Delta V} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1-25)$$

式 (1-25) 指出, 电场中某点电场强度矢量 $\vec{E}$ 的散度等于该点上电荷体密度 ρ 和真空介电常数 ϵ_0 的比值, 即

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1-26)$$

(1-26) 式指出: 若在电场的某点上 $\rho > 0$, 即有正电荷存在, 则 $\nabla \cdot \vec{E} > 0$, 表示该点有 $\vec{E}$ 通量发出; 在 $\rho < 0$ 的点上, 即在有负电荷存在处, $\nabla \cdot \vec{E} < 0$, 表示有 $\vec{E}$ 通量终止于该点; 而在 $\rho = 0$, 即无电荷存在的点上, $\nabla \cdot \vec{E} = 0$, $\vec{E}$ 通量是连续的, $\vec{E}$ 线只是通过该点, 如图 1-10 所示。正电荷发出 $\vec{E}$ 通量, 是正“源”, 负电荷吸收 $\vec{E}$ 通量, 是负“源”。由此可见, $\vec{E}$ 的散度方程 (1-26) 反映了每一点上通量及其“源”的关系, 它被称为静电场高斯定理的微分形式。

2. $\nabla \cdot \vec{E}$ 在直角坐标系中的表达式

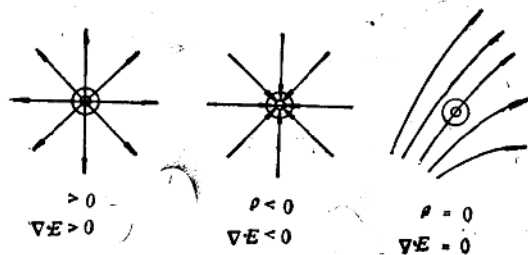


图1-10

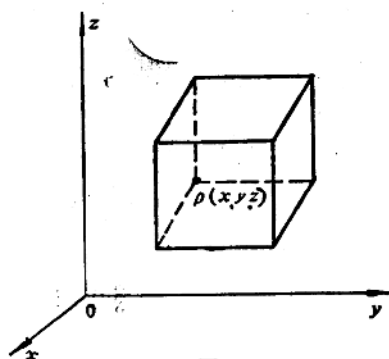


图1-11

由于 $\vec{E}$ 的散度是 $\vec{E}$ 通量密度的极限值, 因此, 它与所取体积元的形状无关, 只要在取极限时, 体积元所有线度均趋于零即可。取三边分别为 Δx 、 Δy 和 Δz 的一个平行六面体, 如图 1-11。现在分别计算出此六面体三对表面穿出的 $\vec{E}$ 通量。

从前后一对表面穿出的净通量为

$$-E_x \Delta y \Delta z + \left(E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z = \frac{\partial E_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

从左右一对表面穿出的净通量为

$$-E_y \Delta z \Delta x + \left(E_y + \frac{\partial E_y}{\partial y} \Delta y \right) \Delta z \Delta x = \frac{\partial E_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$$

从上下一对表面穿出的净通量为

$$-E_z \Delta x \Delta y + \left(E_z + \frac{\partial E_z}{\partial z} \Delta z \right) \Delta x \Delta y = \frac{\partial E_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

根据上面的计算, 可得从整个平行六面体内穿出的净通量为

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} &= \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z \\ &= \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \Delta V \end{aligned}$$

式中, $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ 为所取平行六面体的体积。

由式 (1-24) 得到电场强度 $\vec{E}$ 的散度在直角坐标系中的表达式为

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad (1-27)$$

由此可见, $\vec{E}$ 矢量的散度等于它在各坐标轴上的投影沿各自坐标的变化率之和。

$\Delta \cdot \vec{E}$ 在柱坐标系和球坐标系中的表达式见附录。

均匀介质中高斯定理的微分形式为

$$\Delta \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (1-28)$$

式中, ϵ 为介质的介电常数。

§ 1-5 电位及电位梯度

1. 电场力的功

前面讨论了电场强度 $\vec{E}$, 并用它描述了静电场的一个基本性质——场与“源”的关系。

由于 $\vec{E}$ 是矢量, 它的求解往往是比较困难的, 甚至是不可能的。因此, 想找出一个标量来表征静电场。众所周知, 力虽是矢量, 但它所做的功却是标量。因此, 先分析试验电荷 q_0 在电场中沿某一路径从一点移动到另一点时电场力所作的功。

在图1-12所示的电场中, 试验电荷 q_0 作 $d\vec{l}$ 的位移时, 电场力所作的功为

$$dA = \vec{f} \cdot d\vec{l} = q_0 \cdot \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

试验电荷从 a 点移动到 b 点过程中电场力所做的功为

$$A_{ab} = q_0 \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1-29)$$

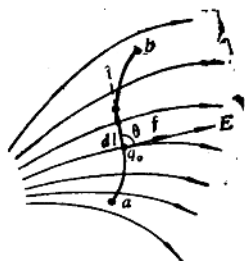


图1-12

2. 电压

试验电荷从电场的一点移动到另一点电场力所作的功和其所带电量之比, 称为电场该两点间的电位差, 或称电压。因此, 图1-12中 a 、 b 两点间的电压可表示为

$$U_{ab} = \frac{A_{ab}}{q_0} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1-30)$$

即电场中任意两点间的电压，其数值等于电场力把单位正电荷从一点推到另一点所做的功。电压的单位是V。

电场中任意两点间的电压与所取的积分路径无关。为了证明这一重要特性，考虑由点电荷Q在无限大真空中产生的电场（图1-13）。将点电荷场强公式（1-4）代入式（1-30）中，则有

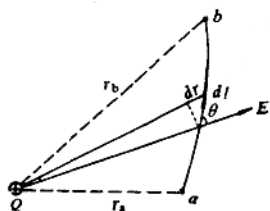


图1-13

$$\begin{aligned} U_{ab} &= \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b E \cos \theta dl \\ &= \int_{r_a}^{r_b} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right) \end{aligned} \quad (1-31)$$

式中， r_a 和 r_b 分别表示从点电荷所在处到路径起点和终点的距离。由此可见，在点电荷Q的电场中，a、b两点间的电压，只和a、b两点的位置有关，与积分路径无关。

上述结论对于任何分布的电荷都是正确的。因为可以把任意一个带电体看成是无数点电荷dq的集合，每一个元电荷dq产生的场具有此特性，那末由无数dq集合成的分布电荷产生的场当然也具有这样的性质。

3. 电位

在电场中，若任意选定一点b作为参考点（图1-13），则a、b两点间的电压有完全确定的值。电场中任一点对参考点的电压，称为该点的电位，用符号φ表示，即

$$\varphi_a = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1-32)$$

在理论研究时，通常取无限远处为参考点，这样a点的电位可表示为

$$\varphi_a = \int_a^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1-33)$$

参考点一经选定，电场中每一点都有完全确定的电位，即电位成了电场中点的单值函数，因此，用电位来描述电场的特性是完全可以的。但参考点的选择完全是任意的，对不同的参考点，电场中同一点的电位是不同的。实际工作中，常常选大地作为参考点。

电位的单位和电压一样，也是V。

4. 电位分布计算*

不同电荷的计算方法不同。

（1）点电荷电场中的电位 由式（1-36）求得无限大真空中一点电荷Q在离它r远处的一点（图1-14）P产生的电位

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (1-34)$$

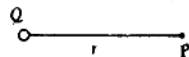


图1-14

（2）点电荷系电场中的电位 在线性介质中，电位和电压的计算，也都应用叠加原理。由式（1-34），应用叠加原理，可以写出n个点电荷置于无限大真空中时的电位为

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^n \frac{Q_k}{r_k} \quad (1-35)$$

式中, Q_k 为第 k 号电荷的带电量, r_k 为该电荷 Q_k 到电场中某点的距离。

(3) 带电体电场中的电位 对于带电体电场中的某点, 若取无限远处为参考点, 则其电位计算式由点电荷电位计算式 (1-34) 写出, 为

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} \quad (1-36)$$

式中, r 为源点到场点的距离。

线、面、体分布电荷电位的计算式可写成:

$$\text{线电荷} \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\tau dl}{r} \quad (1-37)$$

$$\text{面电荷} \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_s \frac{\sigma ds}{r} \quad (1-38)$$

$$\text{体电荷} \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{r} \quad (1-39)$$

例1-5 求均匀带电介质球内、外场中一点的电位。

解: 设球的半径为 R_0 , 电荷的体密度为 ρ , 如图1-15所示。

均匀带电球内、外任一点的场强为

$$\text{球内} \quad E_0 = \frac{\rho r}{3\epsilon} \quad (r < R_0)$$

$$\text{球外} \quad E = \frac{R_0^3 \rho}{3\epsilon_0 r^2} \quad (r > R_0)$$

球外任一点的电位为

$$\varphi = \int_P^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^\infty E \cdot dr = \int_r^\infty \frac{R_0^3 \rho}{3\epsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho R_0^3}{3\epsilon_0 r} \quad (1-40)$$

球内任一点的电位为

$$\varphi_0 = \int_P^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^{R_0} E_0 dr + \int_{R_0}^\infty E dr = \frac{\rho(R_0^2 - r^2)}{6\epsilon} + \frac{\rho R_0^3}{3\epsilon_0} \quad (1-41)$$

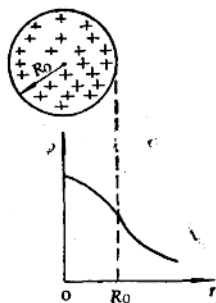


图1-15

5. 电位梯度

电场强度和电位是分别从单位正电荷所受电场力和电场力做功这两方面来描述静电场的物理量。由于电场力和它所作的功有一定的联系, 所以, 场强和电位之间必然有密切的联系。

图1-16所示的是电场中两个靠得很近的等位面, 它们的电位分别为 φ_A 和 φ_B , 且 $\varphi_B = \varphi_A + d\varphi$, 则有

$$d\varphi = \varphi_B - \varphi_A = -\vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1-42)$$

式中的负号是因为电场强度 $\vec{E}$ 总是指向电位降落的方向, 所以当 $\vec{E}$ 与 $d\vec{l}$ 夹锐角, 即电场力对单位正电荷作功时, $d\varphi < 0$ 。

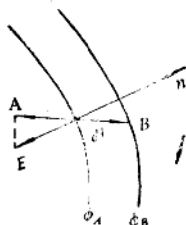


图1-16

由式 (1-42) 得

* 在无限大均匀介质中的电位, 只需将真空中电位式中的 ϵ_0 改为 ϵ 。

$$-d\varphi = \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_l \cdot dl$$

式中, E_l 是场强 $\vec{E}$ 在 $d\vec{l}$ 方向上的投影, 由上式得

$$E_l = -\frac{\partial\phi}{\partial l} \quad (1-43)$$

$\frac{\partial\phi}{\partial l}$ 为电位沿 $d\vec{l}$ 方向的方向导数。式(1-43)表明, 电场强度沿任意方向 $d\vec{l}$ 上的投影等于电位沿该方向增加率的负值。

如果分别将直角坐标轴 x 、 y 和 z 方向作为 $d\vec{l}$ 的方向, 就可以得到 $\vec{E}$ 沿三个坐标轴上的投影为

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} \quad (1-44)$$

于是, 电场强度 $\vec{E}$ 可表示为

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \vec{k}\right) \quad (1-45)$$

上式括号中为一矢量, 称为电位梯度, 用符号 $\text{grad}\varphi$ (或 $\nabla\varphi$) 表示, 则有

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi$$

或

$$\vec{E} = -\nabla\varphi \quad (1-46)$$

由此可见, 电场强度等于电位梯度的负值。由梯度的定义可知, 电场某点电场强度 $\vec{E}$ 的数值等于该点电位的最大变化率, 方向电位减小最快的方向。电位梯度的单位为 V/m 。

梯度在柱坐标系和球坐标系中的表达式, 见附录 7。

作为应用式(1-46)的例子, 现在讨论偶极子电场。两个带电量相等、符号相反、相互间距离 l 很小的点电荷系统, 称为电偶极子, 简称偶极子, 如图1-17。这里只讨论远离偶极子的电场, 因为任何源点(偶极子)到场点的宏观距离, 都比 l 大得多。

由于偶极子电场的特殊性, 采用球坐标系。将原点置于偶极子的中心, 并使 l 和 z 轴重合(图1-17)。电场中 $P(r, \theta, \varphi)$ 点的电位为

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) = \frac{q(r_- - r_+)}{4\pi\epsilon_0 r_+ r_-} \quad (1-47)$$

式中, r_+ 、 r_- 分别为

$$r_+ = \left[r^2 + \left(\frac{l}{2} \right)^2 - rl \cos\theta \right]$$

$$r_- = \left[r^2 + \left(\frac{l}{2} \right)^2 + rl \cos\theta \right]$$

在远离偶极子处, 有 $r \gg l$, 将 r_+ 、 r_- 应用二项式定理展开, 并略去高次项, 得

$$r_+ \approx r - \frac{l}{2} \cos\theta \quad r_- \approx r + \frac{l}{2} \cos\theta$$

所以

$$r_- - r_+ \approx l \cos\theta \quad r_+ r_- \approx r^2$$

偶极子在电场 P 点的电位由式(1-47)得

$$\varphi \approx \frac{ql \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2} \quad (1-48)$$

从 $-q$ 引到 $+q$ 而大小为 ql 的矢量 $\vec{P}$, 称为电偶极子的偶极矩。在图 1-17 中 $\vec{P}$ 沿 z 轴方向, 它与位置矢量 $\vec{r}$ 的夹角为 θ 。因此, $\vec{P} \cdot \vec{r} = qlr \cos \theta$, 这样, 可将偶极子的电位写成下面的形式

$$\varphi = \frac{P \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{4\pi \epsilon_0 r^3} \quad (1-49)$$

偶极子电场中任一点的场强, 可以由式 (1-49) 取梯度并冠以负号求得, 即

$$\begin{aligned} \vec{E} &= - \left(\vec{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) \\ &= \vec{r} \frac{ql \cos \theta}{2 \epsilon_0 r^3} + \theta \frac{ql \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} \end{aligned} \quad (1-50)$$

式 (1-50) 表明, 偶极子的 $\vec{E}$ 线分布在子午面上。 $\vec{E}$ 和坐标 φ 无关说明所有子午面上的图都一样, 这种场称为子午面场。它在一个子午面上的场图如图 1-18 所示。

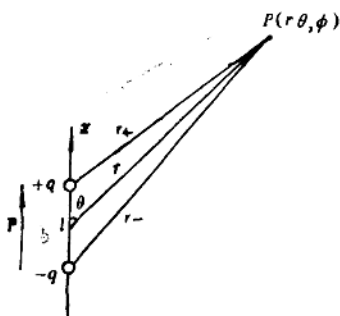


图1-17

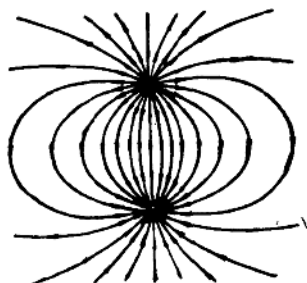


图1-18

偶极子电场有很重要的意义。因为它不仅适用于理想的点电荷, 而且也适用于真实原子。自然界实际存在的电介质, 它们的原子或分子有些本来就是正负电荷质心不相重合的偶极子, 而有些则是在外电场作用下正负电荷质心分开时成为偶极子的。

§ 1-6 电场的无旋性

1. 电场强度 $\vec{E}$ 的环量

§1-3中, 从 $\vec{E}$ 矢量沿闭合面的通量方面研究了静电场的性质。这一节中我们将揭示由场强 $\vec{E}$ 沿一闭合路径的环量所反映的静电场性质。

由电场中任意两点间的电压与积分路径无关性, 在图 1-19 所示的电场中得



图1-19