

应用数学和力学讲座丛书

刘先志论文集

刘先志 著

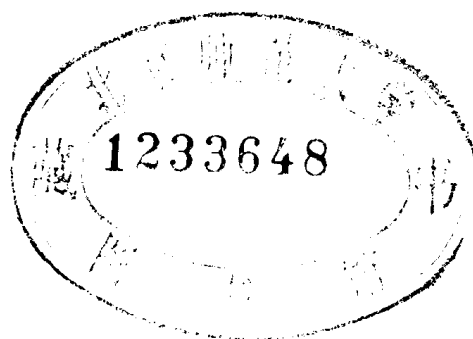


四川科学技术出版社

应用数学和力学讲座丛书

刘先志论文集

刘先志 著



四川科学技术出版社

一九八三年·成都

责任编辑：崔泽海

封面设计：李文金

本丛书原由四川人民出版社出版，一九八二年底经上级批准成立四川科学技术出版社。自一九八四年起本丛书由四川科学技术出版社继续出版。

刘先志论文集

四川科学技术出版社出版 重庆印制一厂印刷

四川省新华书店重庆发行所发行

开本787×1092毫米 1/16 印张21 插页4 字数534千

1984年6月第一版 1984年6月第一次印刷

印数：1—2,180册

书号：13298·7

定价：2.50元

序 言

本书作者刘先志教授是我国老一辈的科学工作者。早年留学德国，获博士学位，并在国外进行数学和机械工程的科学研究十多年。回国后历任同济大学教授、教务长，山东工学院副院长，山东省副省长。刘先志教授坚持科学研究和学术探讨数十年如一日，先后在国内外刊物发表学术论文近六十篇。限于篇幅，本书只包括作者所撰写论文的二十六篇，其他文稿有的已经刊出或陆续发表。这二十六篇论文中，除一篇未发表过外，余者均在中外杂志上发表过。

这些论文基本上分属理论力学、固体力学和流体力学。众所周知，我们的其他较细的力学分支，无论是古典力学或非古典力学，无论是宏观的或微观的，无不以理论力学为其共同的基础，并再配合上适量的固体力学、流体力学和热力学，从而就形成了多种而且更接近于工程实际的分支。这本论文集的内容是与理论力学、固体力学和流体力学的基本理论密切相关的。

这些论文多处表现了理论与实际的联系，课题种类也比较多样化，既有偏重于理论的，也有侧重于工程技术性的。

虽然作者曾多年从事数学专业研究工作，但这些论文所用的数学知识并不十分深奥，因此对很多读者来说，阅读本书不会产生数学上的大的困难。这些论文显示了一种可能性，即不用太深奥的数学理论也能进行力学研究。这是令人鼓舞的。

这些论文中，有的属于理论力学，但同时和机械工程有较紧密的联系。因此，有时强调对理论力学还应该继续加强，看来这仍然是不过份的。

本书可供有关科学研究人员、工程技术人员和高等院校师生参考。

编 者

目 录

1. 理想液体在不等径管道里的自主振动	(1)
2. 关于椭圆形和圆形连通管内理想液体自振问题	(8)
3. 关于连通管内理想液体自振的部分理解	(14)
4. 上端固定缠绕在轮盘上的缆索的质量对于轮盘的铅垂下降运动及缆索张力的 影响	(23)
5. 球磨绝对最高粉碎产量装载因数的推求及球磨在运用中力的关系	(44)
6. 半无限弹性体表面上的轴对称剪力负荷的位移函数以及这样的负荷所引起的 应力与位移	(80)
7. 半无限弹性体内球型热源所激起的热应力及变形	(103)
8. 用一个直接法来推求半无限弹性体表面上的定常点型热源所引起的应力及 位移	(124)
9. 半无限弹性体表面上的定常对数势函数热源的热应力问题	(139)
10. 异质圆柱体在半无限弹性体内所引起的热应力和位移	(146)
11. 矩形截面异质柱体在半无限弹性体内的热应力问题	(160)
12. 弹性平板内的定常点型热源在该板里所激起的应力和变形	(175)
13. 高温球形异质体在无限弹性平板内所引起的热应力和位移	(189)
14. 异质圆柱体在无限弹性平板内所引起的热应力和位移	(201)
15. 矩形截面异质柱体在无限弹性平板内所引起的热应力和变形	(211)
16. 平面曲轴八缸 V 型内燃机二阶往复惯性力分析平衡法	(224)
17. 平面曲轴八缸 V 型内燃机二阶往复惯性力分析平衡法的图解	(236)
18. 几种弧型倒角变直径轴段的柔度或刚度的积分算法	(244)
19. 推算楔形直杆纵振与扭振自主频率的一个方法	(252)
20. 平面曲轴八缸 V 型内燃机二阶往复惯性力二轴平衡法分析	(263)
21. 平面曲轴八缸 V 型内燃机二阶往复惯性力二轴平衡条件的直接推求及滑块平 衡方案	(274)
22. 关于非均质变截面弹性直杆的纵向自主振动	(288)
23. 连通管内理想液柱振动微分方程两种推导的比较	(297)
24. 多层压紧平板具有逐渐改变的导热系数的热传导问题	(305)
25. 非常量导热系数几例微分方程的推立	(313)
26. 关于楔形直杆的扭转自主振动	(320)

理想液体在不等径管道里的自主振动*

一、引言

在分析处理变口径管道中液体振动时常借助一个简化的计算量，即所谓的折算长度。这是几十年前已经熟知的事实。折算长度是从变口径管道液柱化成的一个长度，它在振动中起着当量作用。在振动中，一个任意形状的液柱依它的坐标也会使相应的折算长度起改变。对于很大的折算长度和很小的振幅，这项改变可以略而不计，若前者不是这样，就有时不可忽视这项改变；意即，折算长度的改变量相对于原来的折算量就不可视为是小量。本文的目的是探索折算长度的改变量对自振的影响。为简便计，这里只考虑，在振动中，液体的两端仅在等口径管段内运行。

二、符号和假定

振动系统是由图 1 的安排约定的。在静止状态，管内液体盛在从 1 到 2 的管段内，弹簧 c ，活塞 F 及其上的液柱形成这个振动系统。

设 $s_1(t)$ 是与液体接触的活塞面至固定参照平面 $o'-o$ 的距离，此外， $\dot{s}_1$ 是活塞速度， m 是活塞质量， c 是弹簧常数， F_1 是活塞截面或是活塞擦过的管段截面， $s(t)$ 是管道任意点 F 截面至固定参照平面的距离， F_2 是被活塞所推动液体的端面， $s_2(t)$ 是它的到固定参照平面的距离， $p_2 = p_0$ 是液柱自由端处的大气压强， p_1 是活塞施于液柱上的压强， $p_1 F_1$ 是相应的活塞压力。不可发生气穴。 $F \equiv F(s)$ 是一个与时间无关的恒量函数。

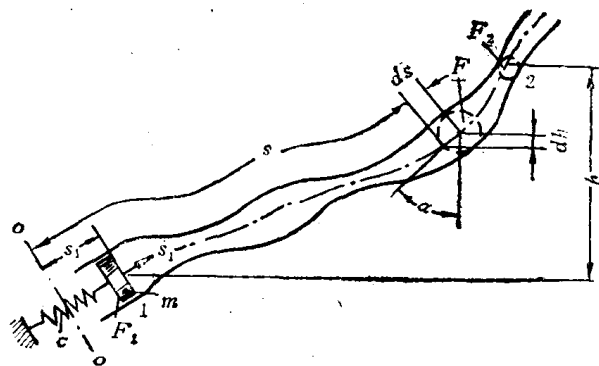


图 1 振动系统坐标的设定

在大气压强 p_0 之外，在活塞的底面上还有弹簧力 cs_1 的作用；在 $s_1=0$ 处，此力消逝。设液体无磨擦和不可压缩。活塞与管壁之间的磨擦也不考虑。更设 $\sqrt{F} \ll s_2 - s_1$ 。从而侧向速度分量可以忽视。

* 此文完成于(1943)德国柏林工业大学力学研究所。那时作者充任主任助教，该所主任是 W. Kucharski 教授。

最后, v 是在管道中任意一点处的速度, α 是在任一点上液柱中线的切线与铅垂方向之间的角, h 是液柱两端之间的高度差。

三、对于非定常流动自 Bernoulli 方程推立运动方程

自 Newton 基本方程可直接得出活塞的运动方程

$$m \frac{d^2 s_1}{dt^2} + (p_1 - p_0) F_1 + c s_1 = 0 \quad (1)$$

同样, 压强差 $p_1 - p_0 = p_1 - p_2$ 可直接由熟知的一般 Bernoulli 方程写为

$$p_1 - p_0 = \gamma h + \frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_1^2) + \rho L \frac{d^2 s_1}{dt^2}, \quad L = \int_{s_1}^{s_2} \frac{F_1}{F} ds \quad (2)$$

此处 ρ 是相比质量, γ 是液体容量。

设定 $\eta = \frac{F_1}{F}, \quad \eta_2 = \frac{F_1}{F_2} \quad (3)$

则得

$$v_2^2 - v_1^2 = (\eta_2^2 - 1) \left(\frac{ds_1}{dt} \right)^2, \quad L = \int_{s_1}^{s_2} \eta ds \quad (4)$$

从而推立出运动方程

$$\left(m + \rho F_1 \int_{s_1}^{s_2} \eta ds \right) \frac{d^2 s_1}{dt^2} + \frac{\rho}{2} F_1 (\eta_2^2 - 1) \left(\frac{ds_1}{dt} \right)^2 + c s_1 + \gamma F_1 h = 0 \quad (5)$$

此中 η, η_2, h 和 s_2 都是 s_1 的已知函数, 它依时间而起改变。在折算长度 L 里, 积分的界限是依 s_1 而起变化, 从而 L 也是 s_1 的已知函数。

四、运动方程的一种特殊情形

在图 2 里, 于 1 和 2 两处应有足够的常值 $F_1 = \text{const}$ 和 $F_2 = \text{const}$ 这两段可以有不同的倾斜度 $\alpha_1 \neq \alpha_2$ 。现在能有

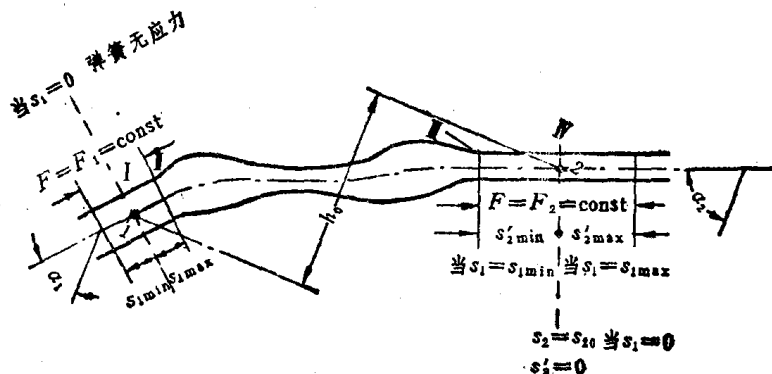


图 2 特殊管道: 在 1 处, $F=F_1=\text{const}$, 在 2 处 $F=F_2=\text{const}$

$$\eta_2^2 - 1 = \left(\frac{F_1}{F_2} \right)^2 - 1 = \text{const} \quad (6)$$

对于折算长度可以有用意地写为

$$L = \int_{s_1}^{s_2} \eta ds = \int_0^{s_{20}} \eta ds - \int_0^{s_1} \eta ds + \int_{s_{20}}^{s_2} \eta ds \quad (7)$$

其中

$$L_0 = \int_0^{s_{20}} \eta ds = \text{const}, \quad \int_0^{s_1} \eta ds = s_1, \quad \int_{s_{20}}^{s_2} \eta ds = \eta_2^2 s_1$$

从而得

$$L = L_0 + (\eta_2^2 - 1)s_1, \quad h = h_0 + (\eta_2 \cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)s_1$$

因而运动方程是

$$\begin{aligned} (m + \rho F_1 L_0 + \rho F_1 (\eta_2^2 - 1)s_1) \frac{d^2 s_1}{dt^2} + \frac{\rho}{2} F_1 (\eta_2^2 - 1) \left(\frac{ds_1}{dt} \right)^2 \\ + (\gamma F_1 (\eta_2 \cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) + c)s_1 + \gamma F_1 h_0 = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

当我们在(8)里引进诸关系

$$\gamma F_1 (\eta_2 \cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) + c = c_1, \quad m + \rho F_1 L_0 - \frac{2\alpha \gamma F_1 h_0}{c_1} = m_1$$

$$\rho F_1 (\eta_2^2 - 1) = 2a, \quad s_1 = \xi_1 - \frac{\gamma F_1 h_0}{c_1}$$

就最后推得运动方程

$$(m_1 + 2a\xi_1) \frac{d^2 \xi_1}{dt^2} + a \left(\frac{d\xi_1}{dt} \right)^2 + c_1 \xi_1 = 0 \quad (9)$$

五、对于情况 $F_1 = \text{const}$ 和 $F_2 = \text{const}$ 来求积运动方程

a) 振幅应有限制。依据管的形状, (9)里的 η_2 含有多种数值, 对于相应微分方程的解也相应是这样。由于数学上的困难, 我们在此仅限于处理 $F_1 = \text{const}$ 和 $F_2 = \text{const}$ 这样的特殊情况。基于这个限制, 液柱两端在运动时须永恒处于恒管段之内。用罗马数字 I, II, III 和 IV 把管分成三区。从而有

$$L_0 = \int_I \frac{F_1}{F} ds = s_{1\max} + \int_{II} \frac{F_1}{F} ds + \eta_2 s_{2\max} \quad (10)$$

依据上面的限制, 液柱的两端在运动中永不会到达 II—III 管段之内。因而初始偏倚 ($t=0$) 必遵守约束

$$s_{10} \leq \frac{s_{2\max}}{\eta_2} \quad (11)$$

b) 运动方程的求解。可以检证, 可用 ξ_1 遍乘(9)而得

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_1}{2} \dot{\xi}_1^2 + a_1 \xi_1 \cdot \dot{\xi}_1^2 + \frac{c_1}{2} \xi_1^2 \right) = 0$$

并积分一次得

$$\frac{m_1}{2} \dot{\xi}_1^2 + a_1 \xi_1 \cdot \dot{\xi}_1^2 + \frac{c_1}{2} \xi_1^2 = A \quad (12)$$

其中 $A = \frac{1}{2} c_1 \xi_{10}^2$ 相应于初始条件 $t=0$, $\xi_1 = \xi_{10}$ 和 $\dot{\xi}_1 = 0$. 可把(12)写成

$$\left| \frac{d\xi_1}{dt} \right| = \sqrt{c_1} \sqrt{\frac{\xi_{10}^2 - \xi_1^2}{m_1 + 2a_1 \xi_1}} \quad (12a)$$

方程(12a)说明, 在平衡位置的两侧其最大偏倚是相等的. 引人注意的是, ξ_1 出现在根号下分数式的分母里. 据此我们能结论, 相应于平衡位置两等距离处, 速度的绝对值是不等的. 当我们把 $\dot{\xi}_1$ 对 ξ_1 绘图, 我们就得出如图 4 中近似椭圆的合口曲线族, 它们的最大值都不落在 $\xi_1 = 0$ 轴上. 至于这个最大值向中间位置的哪边挪移以及挪移多少, 这要依 η_2 值而定. 式值

$$\xi_1 = -\frac{m_1}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{m_1}{2a}\right)^2 - \xi_{10}^2} \quad (13)$$

提供了 ξ_1 的最大值. 根号前的正号对情况 $a > 0$ 有效, 而负号对情况 $a < 0$ 有效. 还可验证有关系

$$\left(\frac{d\xi_1}{dt} \right)_{\max}^2 = \frac{c_1}{a} \left(\frac{m_1}{2a} \right) \mp \sqrt{\left(\frac{m_1}{2a}\right)^2 - \xi_{10}^2} \quad (14)$$

其中负号对 $a < 0$ 而正号对 $a > 0$ 有效. 此外, 也有

$$\frac{d^2 \xi_1}{dt^2} = -c_1 \frac{a \xi_{10}^2 + m_1 \xi_1 + a \xi_1^2}{(m_1 + 2a \xi_1)^2} \quad (15)$$

对于平衡位置, 加速度并非对称 (见图 3 和图 5), 意即, 在零值位置上, 在两侧它们有不

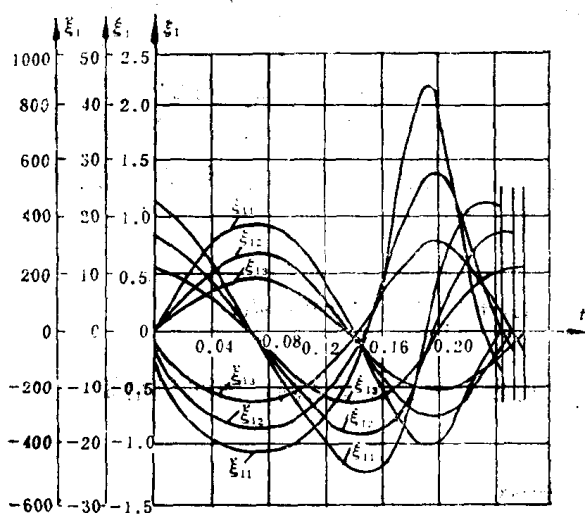


图 3 $\eta_2=6$: 位移、速度和加速度依时间的变化

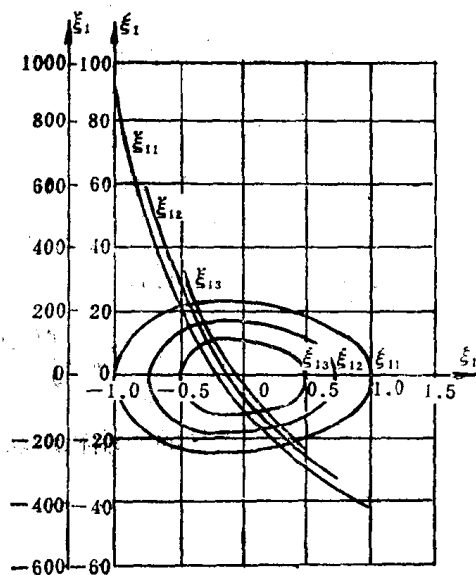


图 4 $\eta_2=6$: 速度和加速度与位移的关系

等值。跟简谐振动相对照，此处当 $\xi_1=0$ 时，加速度不等于零，而是

$$\left(\frac{d^2\xi_1}{dt^2}\right)_{\xi_1=0} = -c_1 \frac{a\xi_{10}^2}{m_1^2} \quad (16)$$

对于最大加速度，我们得

$$\left(\frac{d^2\xi_1}{dt^2}\right)_{\max} = -\frac{c_1 \xi_{\max}}{m_1 + 2a\xi_{\max}} \quad (17)$$

由于公式(17)右边对于平衡位置不是 $\xi_{\max}$ 的对称函数，在平衡位置两侧于等偏倚处不给出相等的绝对值。在折算长度依偏倚增长的那一边有较大的加速度值。

把变量分开并完成积分，则自(12a)积得

$$t-t_0 = \frac{1}{\sqrt{c_1}} \int_{\xi_{11}}^{\xi_{12}} \sqrt{\frac{m_1 + 2a\xi_1}{\xi_{10}^2 - \xi_1^2}} d\xi_1 \quad (18)$$

引进 $\xi_1 = \xi_{10} \cdot \cos\varphi$ ，则(18)化为

$$t-t_0 = \sqrt{\frac{2a\xi_{10}}{c_1}} \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \sqrt{\frac{m_1}{2a\xi_{10}} + \cos\varphi} d\varphi \quad (19)$$

再经变换，则得

$$t-t_0 = 2\sqrt{\frac{m_1 + 2a\xi_{10}}{c_1}} \int_{\psi_2}^{\psi_1} \sqrt{1-k^2 \cdot \sin^2\psi} d\psi \quad (20)$$

$$\text{其中 } a>0, \quad 2\psi=\varphi, \quad 0 < k^2 = \frac{4a\xi_{10}}{m_1 + 2a\xi_{10}} < 1 \quad (21)$$

当折算长度依偏倚增大而增长规定为正，相反情况为负，则从零到 ξ_{10} 再返回零处的时间可用第二类椭圆积分表达

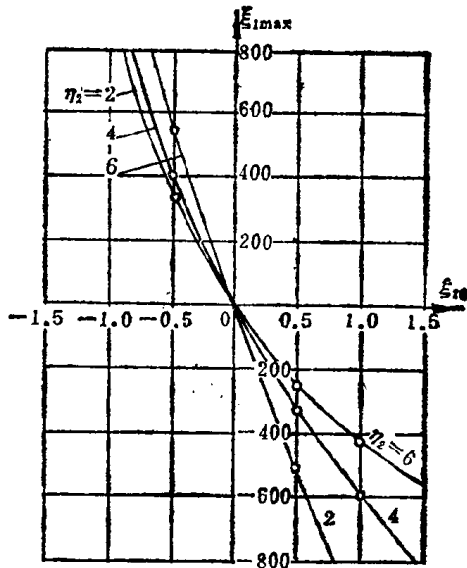


图5 η_2 是个参数，最大加速度与最偏倚之间的关系

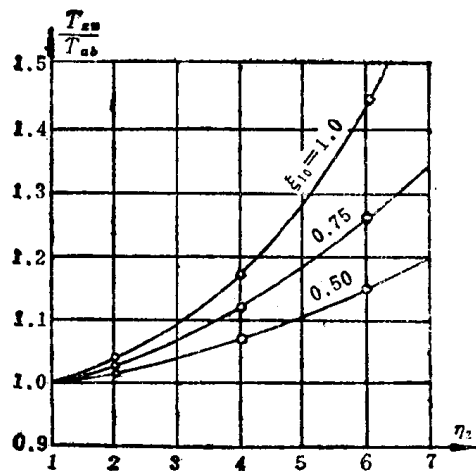


图6 初偏倚作为参数， $\frac{T_{ab}}{T_{ab}}$ 依 η_2 的改变

$$T_{zu} = 4\sqrt{\frac{m_1 + 2a\xi_{10}}{c_1}} E\left(\sqrt{\frac{4a\xi_{10}}{m_1 + 2a\xi_{10}}}, \frac{\pi}{4}\right) \quad (22)$$

相应地, 反向的半个振程从零到 $-\xi_{10}$ 再返回到零用的时间是

$$T_{ab} = 4\sqrt{\frac{m_1 + 2a\xi_{10}}{c_1}} \left[E - E\left(\sqrt{\frac{4a\xi_{10}}{m_1 + 2a\xi_{10}}}, \frac{\pi}{4}\right) \right] \quad (23)$$

(22)同(23)相加即给出一个完整振动的时间

$$T^* = T_{zu} + T_{ab} = 4\sqrt{\frac{m_1 + 2a\xi_{10}}{c_1}} E \quad (24)$$

其中 E 表示完整的第二类椭圆积分。 T^* 曾用意引进以区别于振动中折算长度不变的那种情况。把(24)的被积式展成级数, 并用

$$M = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}$$

$$\text{则得} \quad T^* = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + 2a\xi_{10}}{c_1}} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M^2}{2n-1} \left(\frac{4a\xi_{10}}{m_1 + 2a\xi_{10}} \right)^n \right] \quad (25)$$

自(22)和(23)可成立下列诸关系

$$\frac{T^*}{T_{zu}} = \frac{E}{E(k, \frac{\pi}{4})}, \quad \frac{T_{ab}}{T_{zu}} = \frac{E - E(k, \frac{\pi}{4})}{E(k, \frac{\pi}{4})}, \quad \frac{T^*}{T_{ab}} = \frac{E}{E - E(k, \frac{\pi}{4})} \quad (26)$$

由于按椭圆积分的相互关系, 我们有

$$E(k, \frac{\pi}{4}) < E < 2E(k, \frac{\pi}{4})$$

所以得下列事实

$$T_{ab} < T_{zu} \quad (\text{当 } \eta_2 \neq 1) \quad (27)$$

意即, 在折算液柱长度增加的一侧, 振程用较长的时间(见图6)。两端管径悬殊愈大, 两个相反振程所用的时间差别也愈大。此外, 初偏倚的加大也加强这个区别。

c) T^* 和 T 的比较。设 T 是一个相似的振动系的振动周期, 其中 m 是活塞质量, c 是弹簧系数, 等径管的液柱长度是 L_0 。此系的周期显然与其振幅的大小无关。这个简化系的周期 T 用来与 b) 中所述的系作一比较; 这两系的管臂倾斜度是相等的。对于简化的系统则有

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + \rho F_1 L_0}{c + \gamma F_1 (\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)}}$$

对于所要处理的课题, 则是

$$T^* = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + \rho F_1 (\eta_2^2 - 1)\xi_{10}}{c_1}} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} M^2 \left(\frac{2\rho F_1 (\eta_2^2 - 1)\xi_{10}}{m_1 + \rho F_1 (\eta_2^2 - 1)\xi_{10}} \right)^n \right]$$

从而得

$$\left(\frac{T^*}{T} \right)_{\xi_{10} \rightarrow 0} = \sqrt{\frac{c + \gamma F_1 (\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)}{c + \gamma F_1 (\eta_2^2 \cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)}} \sqrt{1 - \frac{\rho F_1 (\eta_2^2 - 1) \gamma F_1 h_0}{c_1 (m + \rho F_1 L_0)}} \quad (28)$$

考虑条件 $\eta_2 > 1, c + \gamma F_1 (\eta_2^2 \cos\alpha_2 - \cos\alpha_1) > 0$ 和 $c + \gamma F_1 (\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1) > 0$ 就可自(28)推定

$$T_{\xi_{10} \rightarrow 0}^* < T \quad (29)$$

条件 $\frac{\partial T^*}{\partial \xi_{10}} = 0$ 给出

$$-\frac{m_1}{m_1 + 2a\xi_{10}} \left[1 + 4 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{2n-1} M^2 \left(\frac{4a\xi_{10}}{m_1 + 2a\xi_{10}} \right)^{n-1} \right] - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} M^2 \left(\frac{4a\xi_{10}}{m_1 + 2a\xi_{10}} \right)^n = 1$$

其解 $\xi_{10} = 0$. 用 $\xi_{10} = 0$ 可以验证而得

$$\left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial \xi_{10}^2} \right)_{\xi_{10}=0} = -\frac{\pi \rho^2 F_1^2 (\eta_2^2 - 1)^2}{4\sqrt{c_1 m_1^3}}$$

据此可以验证, 当 $\xi_{10} = 0$ 时, T^* 有其最大值. 据此也可规定按原则而有

$$T^* < T \quad (30)$$

在 $\xi_{10} = 0$ 时, 曲线 (T^*, ξ_{10}) 有水平切线, 并且当 ξ_{10} 增长时, 这些曲线单调地朝 ξ_{10} 轴降低.

d) T_{zu} 和 T_{ab} 与 ξ_{10} 的关系. 自关系

$$\left(\frac{\partial T_{zu}}{\partial \xi_{10}} \right)_{\xi_{10}=0} = \frac{\rho F_1 (\eta_2^2 - 1)}{\sqrt{m_1 c_1}}$$

可以看清, 当 $\eta_2 = 1$ 时, 曲线 (T_{zu}, ξ_{10}) 只能在 $\xi_{10} = 0$ 时作水平前进, 意即, 当 $F_1 = F_2$. 当 $\eta_2 > 1$, 曲线随 ξ_{10} 的增大而上升, 当 $\eta_2 < 1$, 它们即下降. T_{ab} 的行进可自差数 $T^* - T_{zu}$ 推出.

e) $T/2$ 与 $(T_{zu})_{\xi_{10}=0}$ 的比较. 自(22)可得

$$(T_{zu})_{\xi_{10}=0} = \pi \sqrt{\frac{m + \rho F_1 L_0}{c + \gamma F_1 (\eta_2 \cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)} - \frac{2a\gamma F_1 h_0}{[c + \gamma F_1 (\eta_2 \cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)]^2}} \quad (31)$$

据此可推出关系

$$(T_{zu})_{\xi_{10} \rightarrow 0} < \frac{T}{2} \quad (32)$$

六、结 论

理想液体在任意形的管道中的运动导归于二阶非线性微分方程; 其中二阶微分导数的系数是偏倚的线性函数. 由于微分方程中又出现了一阶微分导数的平方一项, 这就更增强了非线性的性态. 管道两端不同口径的比数是各系数中的重要普遍参数.

当液柱两端的口径相等时, 微分方程才能获得其线性性. 当管道两端口径不等、且为常数时, 这个非线性方程可以有严格解. 两个方向的振程时间有显著的区别, 它与初始偏倚有关. 当液柱的折算长度增加, 这个振程需用较长的时间来完成; 反向振程自然需用较短的时间.

关于椭圆形和圆形连通管内 理想液体自振问题

一、引 言

本文是探索等径椭圆连通管和不等径圆形连通管内理想液体的自振规律。对于椭圆形连通管，我们限于液柱的两端都与平衡位置的一个直径密合。对于两种情况，都设液柱的端面垂直于连通管的中线。

二、在等径椭圆形连通管内理想液柱的自主振动

假设椭圆连通管是等径的，在本文中为简便计，我们暂时这样假设。此后可以认识到这个简化是不必要的。只需要约定，液柱两端都在等径管段内滑动。中间管段是什么形状是全不重要的，若我们在计算折算长度把径变情况加以考虑就可以了。当液柱运动时，两端液面上的压力也假定相等。此外，液体是非可压缩的并且不发生气穴现象。

按照图 1，可依一般 Bernoulli 方程成立

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial v}{\partial t} ds + 2gy = 0 \quad (1)$$

其中 y 是液面在运动时到平衡位置的距离，而 v 是在流线任一处 S 的速度。此外，亦有

$$L = \int_{s_1}^{s_2} ds = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} d\varphi \quad (2)$$

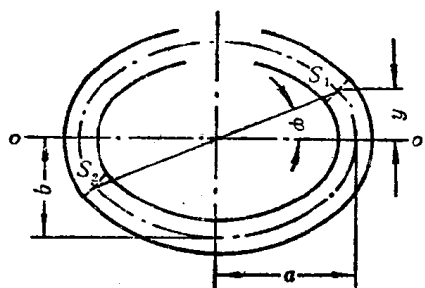


图 1 等径椭圆形连通管的几何安排

和

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{\partial^2 s}{\partial \varphi^2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{\partial s}{\partial \varphi} \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \quad (3)$$

其中 L 是任意两处 S_1 和 S_2 之间的液柱长度， φ 角相应于图 1 中所示， t 是时间。把 (2) 和 (3) 代进 (1) 内即得

$$(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + (a^2 - b^2) \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{2gb}{L_0} \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} \sin \varphi = 0 \quad (4)$$

其中 L_0 代表半个椭圆管内的液柱长度。可以检证，加速度与 φ 的关系不是线性的，但在静定位置两侧在等距离处，它们有等值。经变换之后可利用

$$M = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \quad (5)$$

而写成

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}{2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - \frac{2gab}{L_0} \cos \varphi + \frac{2gab}{L_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} M \left(\frac{a^2-b^2}{a^2} \right)^n \frac{\cos^{2n+1} \varphi}{2n+1} \right] = 0 \quad (6)$$

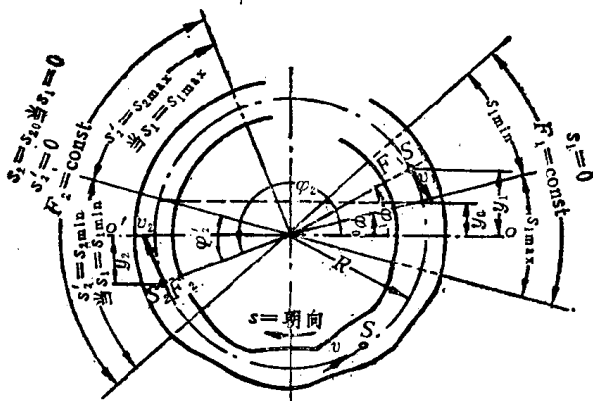
或完成积分, 并以边界条件 $\varphi = \varphi_0$, $d\varphi/dt = 0$ 规定所属常数而后得

$$T = 2 \sqrt{\frac{L_0}{gab}} \int_0^{\varphi_0} \frac{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} M \left(\frac{a^2-b^2}{a^2} \right)^n \frac{\cos^{2n+1} \varphi - \cos^{2n+1} \varphi_0}{2n+1}}} d\varphi \quad (7)$$

(7) 式的右边难于积成完整形式, 只能认为它可以原则性的求积出来。

三、具有不等口径圆弧形连通管内理想液柱的振动

依据扩大 Bernoulli 方程, (图 2) 由于 $p_1 = p_2 =$ 大气压强, 对于液柱两端则得



$$\frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} + (y_1 - y_2) = \frac{1}{g} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial v}{\partial t} ds \quad (8)$$

在图 2 里, y_0 是静止情况时液面至参照平面 $o'-o$ 的距离, φ_0 是其对应的角. 在 (8) 里, v_1 和 v_2 是液面的切向速度, v 代表两液面之间任一点处的速度, y_1 和 y_2 是两液面至参照平面的距离, ds 是流速方向上的微小长度. 此外, 由于有

图 2 对于不等端圆形连通管中理想液柱的振动

$$\eta_2 = \frac{F_1}{F_2}, \quad v_1 F_1 = v_2 F_2, \quad y_1 = R \sin \varphi_1$$

$$\varphi_1' = \eta^2 (\varphi_1 - \varphi_0), \quad \varphi_2 = \pi - \varphi_0 + \eta_2 (\varphi_1 - \varphi_0), \quad y_2 = R \sin (\varphi_0 - \varphi_1')$$

所以自 (8) 得出

$$\frac{v_1^2}{2g} (1 - \eta_2^2) + R [\sin \varphi_1 + \cos \varphi_0 \sin \eta_2 (\varphi_1 - \varphi_0) - \sin \varphi_0 \cos \eta_2 (\varphi_1 - \varphi_0)] = \frac{1}{g} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial v}{\partial t} ds \quad (9)$$

注意关系 $v_1 = -\frac{ds_1}{dt}$, $vF = v_1 F_1$, $\eta = \frac{F_1}{F}$ 和 $\int_{s_1}^{s_2} \eta ds = L$

则得

$$L \frac{d^2 s_1}{dt^2} + \frac{1}{2} (1 - \eta_2^2) \left(\frac{ds_1}{dt} \right)^2 + gR [\sin \varphi_1 + \cos \varphi_0 \sin \eta_2 (\varphi_1 - \varphi_0) - \sin \varphi_0 \cos \eta_2 (\varphi_1 - \varphi_0)] = 0 \quad (10)$$

对于假定 $F_1 = \text{const}$ 和 $F_2 = \text{const}$, 就有

$$L = \int_{s_1}^{s_2} \eta ds = \int_0^{s_{20}} \eta ds + \int_0^{s_1} \eta ds - \int_{s_{20}}^{s_2} \eta ds$$

其中
$$L_0 = \int_0^{s_{20}} \eta ds = \text{const}, \quad \int_0^{s_1} \eta ds = s_1, \quad \int_{s_{20}}^{s_2} \eta ds = \eta_2^2 s_1$$

据此而得
$$L = \int_{s_1}^{s_2} \eta ds = L_0 - (\eta_2^2 - 1)s_1$$

其中 L_0 代表静止状态时理想液柱的折算长度。当注意关系 $s_1 = R(\varphi_1 - \varphi_0)$ 和 $\lambda = \eta_2^2 - 1$, 则得

$$(L_0 + \lambda R \varphi_0 - \lambda R \varphi_1) \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} - \frac{1}{2} \lambda R \left(\frac{d\varphi_1}{dt} \right)^2 + g \{ \sin \varphi_1 + \sin [\eta_2 \varphi_1 - (1 + \eta_2) \varphi_0] \} = 0 \quad (11)$$

这就是我们所寻求的运动方程。可以检证, 对于跟静止状态任两个对称远的两处有不等的加速度。

又可把(11)写成

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{L_0 + \lambda R \varphi_0}{2} \eta_2 \dot{\varphi}_1^2 - \frac{\eta_2 \lambda R \varphi_1}{2} \dot{\varphi}_1^2 - g [\eta_2 \cos \varphi_1 + \cos (\eta_2 \varphi_1 - (1 + \eta_2) \varphi_0)] \right\} = 0 \quad (12)$$

或

$$\begin{aligned} & \eta_2 (L_0 + \lambda R \varphi_0 - \lambda R \varphi_1) \left(\frac{d\varphi_1}{dt} \right)^2 + 2g \{ \eta_2 (\cos \varphi_{10} - \cos \varphi_1) + \cos [\eta_2 \varphi_{10} - (1 + \eta_2) \varphi_0] \\ & - \cos [\eta_2 \varphi_1 - (1 + \eta_2) \varphi_0] \} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

当我们用初始条件 $d\varphi_1/dt=0$, 当 $\varphi_1 = \varphi_{10}$ 确定积分常数时。经变换后即得

$$\sqrt{\frac{2g}{\eta_2}} \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{\varphi_{10}}^{\varphi_1} \frac{\sqrt{L_0 + \lambda R \varphi_0 - \lambda R \varphi_1}}{\sqrt{\eta_2 \cos \varphi_1 - \eta_2 \cos \varphi_{10} + \cos [\eta_2 \varphi_1 - (1 + \eta_2) \varphi_0] - \cos [\eta_2 \varphi_{10} - (1 + \eta_2) \varphi_0]}} d\varphi_1 \quad (14)$$

(14)式右边的被积式是 φ_1 的奇函数, 所以在两个相反方向的振动时间不同。对于实际情况, 可用数字, 或数字和图解法来完成。

四、等径圆弧形连通管中理想液柱的振动

使 $\eta_2 = 1$ 并舍去从而使失效的 φ 的指标, 则自(11)简化出

$$L_0 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + g [\sin \varphi + \sin (\varphi - 2\varphi_0)] = 0 \quad (15)$$

完成上式的第一次积分, 则得

$$L_0 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + 2g [\cos \varphi_a - \cos \varphi + \cos (\varphi_a - 2\varphi_0) - \cos (\varphi - 2\varphi_0)] = 0 \quad (16)$$

其中 φ_a 代表相对于参照平面 $o'-o$ 的角偏倚量。利用关系

$$k = \sin \frac{\varphi_a - \varphi_0}{2}, \quad \sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2} = k \sin \psi \quad \text{和} \quad M = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}$$

即得振动周期

$$T = 4\sqrt{\frac{L_0}{2g\cos\varphi_0}} \int_0^{\pi/4} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = 2\pi\sqrt{\frac{L_0}{2g\cos\varphi_0}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} M^2 \sin^{2n} \frac{\varphi_a - \varphi_0}{2}\right) \quad (17)$$

对于特殊情况 $\varphi_0=0$, 意即, 当液体端点与平静位置的水平直径密合时, 则自(17)导得

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L_0}{2g}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} M^2 \sin^{2n} \frac{\varphi_a}{2}\right) \quad (18)$$

使圆的直径无限增长, 即得 $\varphi_a = s_a/R = 0$, 就自(18)简化出

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L_0}{2g}}$$

这就是当年牛顿的等径 U 形连通管中液柱的周期公式。

对于圆弧连通管, 我们又可写 $L_0 = R(\pi + 2\varphi_0)$, 从而得

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R(\pi + 2\varphi_0)}{2g\cos\varphi_0}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} M^2 \sin^{2n} \frac{\varphi_a - \varphi_0}{2}\right) \quad (19)$$

对于特殊情况 $\varphi_0=0$, 则得

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\pi R}{2g}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} M^2 \sin^{2n} \frac{\varphi_a}{2}\right) \quad (20)$$

五、物理摆振动周期同等径圆弧连通管内 理想液体振动周期的比较

迄今获得的结果当然有效于具有多个圈的连通管, 我们只需要换用 $L_0 = R(2\nu\pi + \pi + 2\varphi_0)$, 其中, $\nu=0, 1, 2, \dots$, 于是得出一般情况的振动周期

$$T_\nu = 2\pi\sqrt{\frac{R(2\nu\pi + \pi + 2\varphi_0)}{2g\cos\varphi_0}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} M^2 \sin^{2n} \frac{\varphi_a - \varphi_0}{2}\right) \quad (21)$$

当然多圈管段中也必须装满液体。

以 $\nu=0$, 图 3 里的曲线是用(21)计算出来的。由于流线不可撕断, 所以必有约束关系 $\varphi_a \leq \pi/2$ 。当装量角增大, 振动周期变大而最大振幅下降。振动周期也依偏倚角 φ_a 的增大而增大。

当我们只考虑 $\nu=0$, 则液体柱振动周期是

$$T_{f1} = 2\pi\sqrt{\frac{R(\pi + 2\varphi_0)}{2g\cos\varphi_0}} \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} M^2 \sin^{2n} \frac{\varphi_a - \varphi_0}{2}\right) \quad (22)$$

而物理摆的周期是

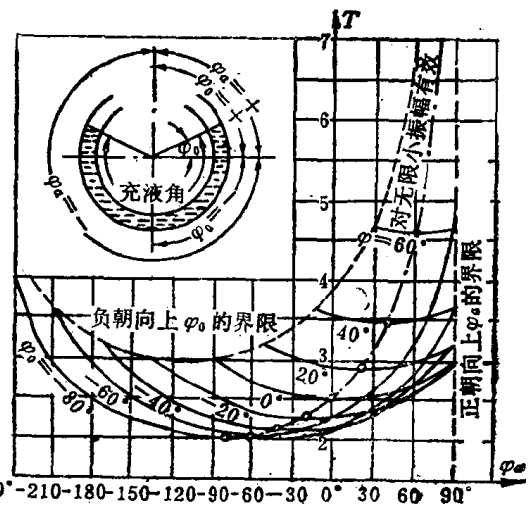


图 3 等径圆弧连通管内理想液体振动周期与 φ_a 之间的关系

$$T_{m\alpha} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} M^2 \sin^2 n \frac{\alpha}{2}\right) \quad (23)$$

其中 2α 是全部振动角, l 是摆长. (22) 里的角差 $\varphi_a - \varphi_0$ 是相应于 (23) 里的 $\alpha = \varphi_a - \varphi_0$. 对于进行比较, 必须以 $\alpha = \varphi_a - \varphi_0$, 意即两个振动系统作等角偏倚. 据此而有

$$T_{f,l} \leq T_{m\alpha}, \quad \text{当} \quad \left(\frac{\pi}{2} + \varphi_0\right) \leq \frac{l}{R} \cos \varphi_0 \quad (24)$$

(24) 的最有趣的情况是

$$T_{f,l} = T_{m\alpha}, \quad \text{当} \quad \xi = \frac{R}{l} \left(\frac{\pi}{2} + \varphi_0\right) = \cos \varphi_0 \quad (25)$$

(25) 式曾以 R/l 作为参数在图 4 里给出. 直线与余弦曲线的交点给出 φ_0 值, 于此该两振动系有相等的周期. 自 ξ 的上限得出比值 l/R 的限制

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{l}{R} \geq \frac{\pi}{2} + \varphi_0, \quad \text{当} \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi_0 < \frac{\pi}{2} \quad (26)$$

由于 $\left(\frac{\partial \xi}{\partial \varphi_0}\right)_{\varphi_0 = -\pi/2} = 1$, 就只有当 $R < l$ 时, 两个振动系统才能有相等的周期.

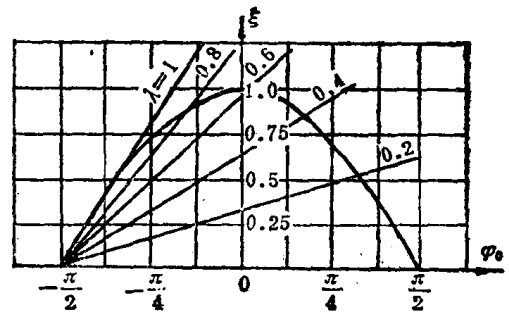


图 4 当两系统有同等周期时 φ_0 值

对于 $\varphi_0 = 0, \varphi_a \rightarrow 0$ 和 $\alpha \rightarrow 0$, 则有下列诸关系

$$T_{f,l} = 2\pi\sqrt{\frac{\pi R}{2g}}, \quad T_{m\alpha} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (27)$$

这就给出使人惊异的一个解

$$T_{f,l} = T_{m\alpha} \quad (\text{只当 } \varphi_a \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0 \text{ 和 } \pi R = 2l) \quad (28)$$

换言之: 当振幅很小时, 并且当摆长等于所属圆周四分之一时, 这两个系统才有相同的振动周期. 在此情况下, 摆长等于液柱长度的一半.

六、U形管内和圆形管内理想液体周期的比较

自 $T = 2\pi\sqrt{L/2g}$ 和 (19) 可得出

$$R(\pi + 2\varphi_0) \leq \frac{R(\pi + 2\varphi_0)}{\cos \varphi_0}$$

因此可以结论, 当两个系统中液柱等长时, U 形管内液体振动周期用较短的时间. 当 $\varphi_0 = 0$ 和 $\varphi_a \rightarrow 0$ 时, 则出现极限情况, 即圆弧中液体振动周期就等于 U 形管内液柱的振动周期.

七、物理摆周期与等径圆弧连通管内理想液体振动周期的比较

一个物理摆的周期是

$$T_{ph} = 2\pi\sqrt{\frac{J_a}{mge}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} M^2 \sin^2 n \frac{\varepsilon_0}{2}\right) \quad (29)$$