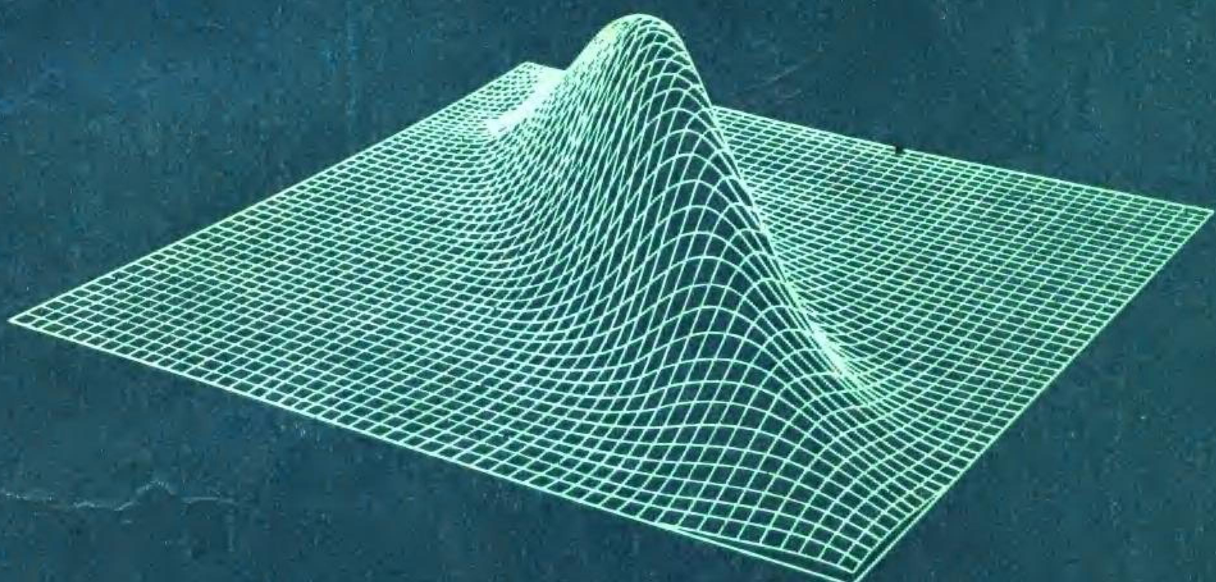
华东水利学院主编



水文学的
概率统计基础

水 利 出 版 社

前　　言

1978年6月，华东水利学院受原水利电力部的委托，于南京召开了高等学校陆地水文专业《水文学的概率统计基础》教材大纲讨论会。本书就是根据这次会议拟定的大纲编写的。

本书主要作为水文专业的大学生（不带★号内容）及研究生（带★号内容）的教材，同时也可供水文、水利专业的工程技术人员参考。

全书共十一章。第二、三、四章，由张维然同志（华东水利学院）编写；第五章由王明慈同志（成都科学技术大学）编写；第六章由刘光文同志（华东水利学院）编写；第七章由黄斌同志（成都科学技术大学）编写；其余各章由丛树铮同志（华东水利学院）编写。本书由丛树铮同志主编。水利部南京水文研究所徐映波同志负责审稿。

本书部分章节曾参考或取材于文献[1-9]、[1-10]、[1-17]、[1-18]。在此谨向有关作者表示感谢。

本书承黄万里教授、唐述钊教授、窦国仁工程师以及其他同志提供宝贵意见；刘光文教授对本书的编写工作给予了关心和指导。在此谨致诚挚的谢意。

由于编写时间仓促，特别是主编人水平所限，书中定有不少错误和缺点，恳请读者批评指正。

编　者

1980年8月

内 容 提 要

本书讲解概率统计的基本概念与原理，并在此基础上着重讲述了水文学中应用的一些数理统计方法。第一章为全书的基础；第二至第六章为概率论内容；第七章简介随机过程的一般理论及水文过程的分析方法；第八至第十一章为数理统计部分，除一般内容外，还包括水文学中应用的一些研究方法与结果，以及常用的一些随机模型。

本书的读者对象为水文及水利专业的大学生、研究生、教师及科研设计人员、水文工作者；也可供地理、气象、海洋专业的科技人员参考。

水文学的概率统计基础

华东水利学院主编

*

水利出版社出版

（北京德胜门外六铺炕）

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

水利电力印刷厂印刷

*

787×1092毫米　16开本　29$\frac{1}{4}$印张　675千字

1981年6月第一版　1981年6月北京第一次印刷

印数 0001—4810 册　定价 3.00 元

书号 15047·4121

前　言

1978年6月，华东水利学院受原水利电力部的委托，于南京召开了高等学校陆地水文专业《水文学的概率统计基础》教材大纲讨论会。本书就是根据这次会议拟定的大纲编写的。

本书主要作为水文专业的大学生（不带★号内容）及研究生（带★号内容）的教材，同时也可供水文、水利专业的工程技术人员参考。

全书共十一章。第二、三、四章，由张维然同志（华东水利学院）编写；第五章由王明慈同志（成都科学技术大学）编写；第六章由刘光文同志（华东水利学院）编写；第七章由黄斌同志（成都科学技术大学）编写；其余各章由丛树铮同志（华东水利学院）编写。本书由丛树铮同志主编。水利部南京水文研究所徐映波同志负责审稿。

本书部分章节曾参考或取材于文献[1-9]、[1-10]、[1-17]、[1-18]。在此谨向有关作者表示感谢。

本书承黄万里教授、唐述钊教授、窦国仁工程师以及其他同志提供宝贵意见；刘光文教授对本书的编写工作给予了关心和指导。在此谨致诚挚的谢意。

由于编写时间仓促，特别是主编人水平所限，书中定有不少错误和缺点，恳请读者批评指正。

编　者

1980年8月

目　　录

绪　言

概率论与数理统计，是研究受随机因素影响的各种现象的数学工具。随着人类认识能力的发展，人们发现愈来愈多的现象都受到随机因素的影响。因此，概率论与数理统计的应用范围也愈来愈广。除了熟知的一些学科，如核物理、统计物理、空间技术、控制论、可靠性、生物统计、经济学、人口统计等，还有许多其他学科也都程度不同地使用着概率统计方法，如人工智能、图象识别、心理学、医学、神经生理学、生态学、地理学、考古学、森林学以及交通运输等。甚至象天文学这样古老的学科，它的某些问题，现今也要用概率统计方法来进行研究。

作为地学一个分支的水文学，它所研究的水文现象，普遍地受到随机因素的影响。因此，概率统计方法在水文学的各个部门都逐步地得到日益广泛的应用。如在水文测验中，站网的规划、测验规范的制定、误差分析、资料整编等；在水文预报中，某些预报方案的制作、误差的分析与评定；在水文水利计算中，各种水利系统的规划设计以及管理运用；都以某种方式使用着概率统计方法。至于在随机水文学（*Stochastic Hydrology*）中，则更是主要地使用着概率统计方法。这种情况并非是水文学所特有的，在地学或与地学有关的其他学科，如气象学、海洋学、地质学、地理学；在与水利有关的一些学科，如统计流体力学、随机水力学、结构的随机振动分析、最优设计以及在结构的位移、变形的分析研究中，都广泛地使用着概率统计方法。

概率统计方法在水文学的各个部门有着广泛的应用，而且有着更为广泛、深入的进一步应用的可能性。但这并不是说概率统计方法是水文学的唯一方法。这不仅是对水文学的一般部门而言，就是对随机因素的影响最大、概率统计方法应用最多的随机水文学来说，也是如此。虽然自随机水文学逐步形成以来，一直主要地使用着概率统计方法，但近年来，人们已开始重视和开展有物理依据的随机水文学（*Physically based stochastic hydrology*）的研究。即将概率统计方法与物理分析方法结合使用。只有这样才可望对所研究的现象得到更为本质的了解。对于水文学的其他分支，自然更是如此。然而，与物理方法的结合使用，对概率统计方法的要求不是低了，而是更高。因此，正确、合理地使用概率统计方法，将在我们揭示水文现象的规律中起到重要作用。

在水文学中使用概率统计方法，至今已有将近一个世纪的历史。但由于水文现象的复杂性，致使水文学中所使用的概率统计方法仍然处于发展之中，真正成熟和完善的内容不是很多。因此，本书的重点是介绍概率论与数理统计的基本概念与原理，只有牢固地掌握了这些内容，才有可能在工作中正确、灵活和创造性地加以应用。

本书的内容包括两部分。1～7章为概率论内容，其后各章属数理统计范畴。学习本书的基础知识主要为微积分，如能对线性代数有初步了解，这对学习本书将是有帮助的。对于大学生，教学的范围可只限于不带★号的内容；对于研究生，则可着重学习带★号的部分。工程技术人员可根据需要自行选择。

第一章 集 合 概 念

集合的概念，是近代数学最基本的概念之一。自从十九世纪末集合的概念产生以后，关于集合的理论就得到了迅速的发展。同时，集合的概念与理论也广泛渗透到数学的各个领域。近代概率统计理论，就是以集合的概念与理论为基础的。概率论中一个基本的概念——事件，其确切的数学表达就是集合；集合的运算和性质与初等代数中关于数的运算和性质，是有很多不同之处的。因此，为了能够正确、牢固地掌握概率论和数理统计的基本概念及基本理论，学习一点有关集合的知识是完全必要的。应指出，集合的概念并不神秘，只要多思考和多作练习，集合的概念是不难掌握的。

本书中关于集合的讲述，仅包括最基本的内容，在需要作进一步了解时，可参看有关专著，如[1-1]～[1-5]、[3-1]、[4-1]❶ 等。

1.1 集合的一般性质

1.1.1 元素与集合（或简称为集）

集合既是一个重要的概念，初学者往往希望能得到关于集合的一个严格的定义。但是，由于集合是一个原始概念，因此它无法用更基本的数学概念来确切定义，而只能用一般语言给以描述性的说明。这就如同几何中点、线、面等概念一样。

把一个个的东西集聚在一起，这样便形成一个集合；或者说，把许多东西一起当作一个单体考虑，这便是一个集合。集合中的每一个东西（或事物）就称为该集合的元素，简称为元。

集合的元素可以是任何事物。

【例 1-1】 ①由所有正偶数构成的集合；②大于100、小于500的所有整数构成的集合；③数轴上所有实数构成的集合；④华东水利学院水文系81级全体学生组成的集合；⑤定义在直线上的所有有理函数构成的集合；⑥一部机器所有零件构成的集合；⑦平面几何中所有公理构成的集合；⑧所有英文字母构成的集合，等等。

本章中，将用大写字母A，B，X，Y…表示集合，小写字母a，b，x，y…表示元素。$x\in A$，表示x是集A的元素，读为x属于A；$x\bar{\in}A$表示x不是A的元素，读为x不属于A。为了研究的方便，往往引入不含有任何元素的集合，称为**空集**，记为ϕ。

1.1.2 有限集合与无限集合

【定义 1-1】 一个集合，如其元素为有限多个，即称为**有限集合**。如例 1-1 中的②、

❶ 方括号内的数码，表示书末参考文献编号。下同。

④、⑥、⑦、⑧；反之，包含无限多元素的集合，称为**无限集合**，如例 1-1 中的①、③、⑤。

为了比较不同集合中所包含的元素多少，在集论中采用“对应”的方法。

【定义 1-2】 若在A、B两集的元素之间，可建立一一对应的关系，即A中的每一元a有唯一的B中的元b与之对应，同时B中的每一元b有唯一的A中的元a与之对应，就称A与B为**对等**，或**等势**，记为$A \sim B$。

由上述定义不难看出，等势的概念有以下三个性质。

（1）$A \sim A$。　　　　　　　　（反射性）

（2）若$A \sim B$，则$B \sim A$。　　　　（对称性）

（3）若$A \sim B$，$B \sim C$，则$A \sim C$。　（传递性）

显然，对于两个有限集，当且只当它们具有相同数目的元素时，两者才对等。

【定义 1-3】 在无限集中，凡是和全体自然数构成的集对等的，称为**可列集**。不是可列的无限集，称为**不可列集**。

显然，例 1-1 中之①的偶数集，与自然数集是对等的。不仅如此，而且从下表可以看出：

$$
\begin{array}{l}
1、2、3 \cdots n \cdots \\
2、4、6 \cdots 2n \cdots \\
1、3、5 \cdots 2n-1 \cdots \\
1、4、9 \cdots n^2 \cdots \\
10、100、1000 \cdots 10^n \cdots
\end{array}
$$

即自然数集，偶数集，奇数集，平方数集，10的幂集，都互相对等。可以证明，例 1-1 中之③是一种不可列集。显然，从一不可列集中，如以任意方式选出任一可列集，则必剩有若干元素不包含在选出的可列集中。对此，我们说不可列集的势比可列集的势大。

有限集合与可列集合，统称为**可数集合**。

1.1.3 子集与空间

【定义 1-4】 假如凡B的元素皆为A的元素，则称A**包含**B（或B被A包含），记为$A \supset B$（或$B \subset A$），并称B为A的**子集**。例如，设以B表示例1-1中所有正偶数的集合，以A表示例1-1中所有实数的集合，则有$B \subset A$。

假如$B \subset A$，同时$A \subset B$，则说$A = B$。显然，$A = B$，表示A，B所包含的元素完全相同。例如，设B为由$+i$，$-i$两个虚数构成的集，A为由方程$x^2+1=0$的根组成的集，则$A = B$。

通常为了研究和叙述的方便，我们事先引入一个固定的集Ω，它包含了在研究的问题中可能遇到的所有元素。这样，所要研究的一切集合，都是Ω的子集。习惯上，称Ω为一个**空间**。它的元素称为**抽象的点**，并记为ω。例如，假若要研究某些实数的集合，则所有实数的全体构成的集合，就是我们的空间Ω。于是“所有正偶数构成的集合”A，“大于100、小于500的全体整数构成的集合”B，以及其它任何的数集都是Ω的子集。事实上，

这时对于任意集A，恒有

$$\phi \subset A \subset \Omega \tag{1-1}$$

根据集合的性质及子集的定义，容易证明有下列性质成立：对于Ω中的任意集合A、B、C皆有

（1）$A \subset A$。　　　　（反射性）

（2）若$A \subset B$，$B \subset C$，则$A \subset C$。　　　　（传递性）　　　　（1-2）

1.1.4 函数与集合的表示

前面主要用文字描述的方式来表示集合，但在进一步的研究中，为了表达的精确简炼，就要求采用符号的形式来表示集合。

设A为一有限集，其所包含的元素（或点）为ω_1、$\omega_2 \cdots \omega_n$，则A可用逐一列举其元素的办法，表示为$A=\{\omega_1, \omega_2 \cdots \omega_n\}$。例如，设集$A$表示投一枚硬币所得结果的集合。由于这时有且只有两种结果，即“正面向上”与“反面向上”，如以ω_1，ω_2分别表示之，则$A=\{\omega_1, \omega_2\}$。对于任一有限集，采用这种表示方法，从原则上说，都是可以的。然而，当集中所含元素很多时，这种表示方法就十分繁琐，以至于实际上无法使用。为此，考察如下的例。

【例 1-2】 设有48个房间，如表1-1所示，在晚上每一房间各有开灯（以1表示）和关灯（以0表示）两种状态。设以ω_i表示48个房间开灯关灯的一种状态，Ω表示所有可能状态的集合（事实上，Ω为48位二进制数所表示的整数的集合）。易知Ω共含有$N=2^{48}$个元素。设记为ω_0、ω_1、…ω_{N-1}，如表1-1所示。这时如要用上述方法来表示Ω中的某些子集，如设A表示“至少有十个房间开灯的各种状态的集合”，则要用上述方法来表示A，事实上十分困难。

表 1-1　　状态示意表

状态编号	状态内容								$\xi(\omega)$
	48	47	46	…………	4	3	2	1	
ω_0	0	0	0	…………	0	0	0	0	0
ω_1	0	0	0	…………	0	0	0	1	1
ω_2	0	0	0	…………	0	0	1	0	1
ω_3	0	0	0	…………	0	0	1	1	2
ω_4	0	0	0	…………	0	1	0	0	1
ω_5	0	0	0	…………	0	1	0	1	2
ω_6	0	0	0	…………	0	1	1	0	2
ω_7	0	0	0	…………	0	1	1	1	3
⋮	⋮						⋮		⋮
⋮	⋮						⋮		⋮
ω_{N-2}	1	1	1	…………	1	1	1	0	47
ω_{N-1}	1	1	1	…………	1	1	1	1	48

对于无限集，特别是不可列集，自然就更不能用上述方法来表示了。这就推动人们去研究别的表示方法。为此需要介绍定义在空间Ω上的函数（或称为变换、映象、对应）的概念。

如果对于空间Ω中的每一点ω，规定空间Ω'中一点ω'与之对应，如图 1-1 所示，这一对应的规则就称为从空间Ω到空间Ω'的**函数**[●] ξ。空间Ω称为函数ξ的**定义域空间**，Ω'称为函数ξ的**值域空间**，ω'称为函数ξ在ω处的值，记为$\xi(\omega)$。我们约定，今后所考察的函数，永远是单值的，就是说，对于每一个$\omega\epsilon\Omega$，只有一个值$\xi(\omega)$与之对应。例如，设Ω为所有英语词汇的集合，定义$\omega'=\xi(\omega)$为该词汇的第一个字母，如，$\xi(probability)=p$，$\xi(statistics)=s\cdots$等，则ξ就是定义在Ω上的一个函数，其值域空间为$\Omega'=\{a、b、c\cdots z\}$，即 26 个英文字母的集合。

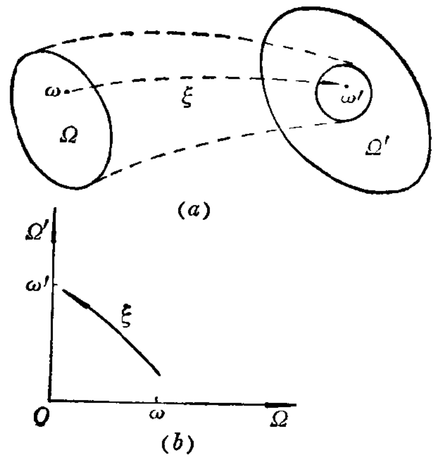


图 1-1　Ω上的函数的两种示意图

现在引进一种表示Ω中集合的符号记法：$\{\omega;\ \cdots\}$，其中$\cdots$的位置可以填入含有Ω上函数ξ的某种关系式，以此符号来表示Ω中所有能使关系式$\cdots$成立的那些ω所构成的集合。而且为了简单，在不会混淆的时候往往将$\{\omega;\ \cdots\}$中的ω省略不写，而只写成$\{\cdots\}$。例如$\{\omega;\ \xi=\omega'\}=\{\xi=\omega'\}$就表示$\Omega$中能够使$\xi(\omega)=\omega'$的那些$\omega$所构成的集合，这里$\omega'$是$\Omega'$中的一点。$\{\omega;\ \xi\epsilon A'\}=\{\xi\epsilon A'\}$，表示$\Omega$中能使$\xi(\omega)\epsilon A'$的那些$\omega$所构成的集．其中$A'\subset\Omega'$。显然，对于一个不属于$\xi$的值域空间的点$\omega'$，$\{\xi=\omega'\}$是$\Omega$中的空集$\phi$。

通常，取Ω'为一维欧氏空间$R_1=(-\infty,\ +\infty)$（在某些情况下可以取为半空间$(0,\ \infty)$）。这样通过ξ的变换，就把各种各样的空间Ω，都变换到欧氏空间，从而为研究提供了方便。

这样，在例 1-2 中要表达集合A，就十分简单。只要定义一个Ω上的函数ξ即可。设$\xi(\omega)$表示状态ω中开灯的房间数，则集A可表示为$A=\{\omega;\ \xi\geqslant 10\}=\{\xi\geqslant 10\}$。

下面再来考察几个例子。

【例 1-3】 某人自甲地到乙地旅行，可以乘船、火车、汽车、飞机，共四种方式，其旅费分别为50、100、150、200元。我们来研究旅行方式的集合。设以ω_1、ω_2、ω_3、ω_4分别表示这四种方式。以ξ表示每一旅行方式的旅费，则如下表所列。

ω	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$\xi(\omega)$	50	100	150	200

这时，$\Omega=\{\omega_1、\omega_2、\omega_3、\omega_4\}$。显然，$\Omega$的任一子集（包括$\Omega$本身），都可用$\{\cdots\}$的形式来表达。例如，设$A=\{\omega_3,\ \omega_4\}$，则$A$可表示为$A=\{\xi\geqslant 150\}$，因为只有$\omega_3$，$\omega_4$能使$\xi\geqslant 150$。另外，对于值域空间$\Omega'=(0,\ +\infty)$中除去 50，100，150，200 四个数值外，对其余任意一点ω'，都有$\{\xi=\omega'\}=\phi$。

● 有时只在Ω'为（全体或部分）实数集合时，ξ才称为函数，对其余情况ξ称为变换、或映象、或对应。本书中将不作区分，因为在多数情况下，Ω'都是（全体或部分）实数的集合。另外，我们并不要求Ω'中所有元都是Ω中某元的对应元。

【例 1-4】 观测南京各年7月1日的日降雨量。由于各年该日的降雨量各不相同，设以 ω_x 表示该日降雨量等于 x 毫米这一状态，则从理论上说，可有无限多种状态。由于日降雨量总为大于或等于零的一个实数，故设定义函数 ξ 如下

$$\xi(\omega)=x,\quad \text{当}\omega=\omega_x \tag{1-3}$$

则值域空间可取为 $\Omega'=[0,\ +\infty)$。这样，Ω 中的任一集合，都可以用 $\{\cdots\}$ 的形式表示出来，其中…为包含 ξ 的某一关系式。例如，设 A 表示该日降雨量小于或等于500毫米的所有状态的集合，则 $A=\{\xi\leqslant 500\}$，其余类推。显然，$\Omega=\{\xi\geqslant 0\}$。

此例中的 Ω，ξ，以及 Ω' 在水文统计中具有广泛的代表性，这是因为在水文统计的绝大多数问题中，其 Ω，ξ，Ω' 都具有这种形式。

与函数概念相对应的，还有反函数的概念，但后者牵涉问题较多，因而不再讨论，有兴趣的读者可参看[1-3]。这里只指出：$\{\omega;\ \cdots\}=\{\cdots\}$，这一记号固然是表示 Ω 中的某一集合，但也可看成是 Ω' 中的相应的集合，以后，我们将经常采用这后一种观点。例如，例1-3中的 $A=\{\xi\geqslant 150\}$，这也是 $\Omega'=[0,\ +\infty)$ 中的一个集合，即由 Ω' 中大于或等于150的所有实数组成的集合，即 $[150,\ \infty)$。例1-4中的 $A=\{\xi\leqslant 500\}$，也是 $\Omega'=[0,\ +\infty)$ 中的一个集合，小于或等于500的所有实数所组成的集合，即 $[0,\ 500]$。

1.1.5 集合的运算

一、和集

【定义 1-5】 设 A、B 为两集合。由集 A 与集 B 的一切元素所组成的集，称为集 A 与 B 的**和集**，简称为 A 与 B 之和，记为 $A+B$ 或 $A\cup B$。用符号来表示，即为 $A+B=\{\omega;\ \omega\in A$ 或 $\omega\in B\}$。必须注意，在作和 $A+B$ 时，A 与 B 所共有的元素，只"算"一次。例如：$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$，$B=\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$，则 $A+B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$，而不是 $A+B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$。

上述和的定义，也可以推广到可数的情形。设 A_1，A_2，$\cdots A_n$，…是一串集合，则 $A_1+A_2+\cdots+A_n$，记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 或 $\sum\limits_{i=1}^{n}A_i$，表示由 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 所包含的一切元素构成的集；$A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots$，记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 或 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_i$，表示由一切 A_i 的元素所构成的集。

【例 1-5】 设 $A_i=\{i\}$，$i=1,\ 2,\ \cdots n,\cdots$ 则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$，$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ \cdots\}$。

【例 1-6】 设 $A_i=\{i-1\leqslant\xi<i\}$，$i=1,\ 2,\ \cdots n,\ \cdots$ 则有 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\{0\leqslant\xi<n\}=[0,\ n)$，$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=\{0\leqslant\xi<\infty\}=[0,\ \infty)$。

【例 1-7】 设 $A_i=\left\{-1+\dfrac{1}{i}<\xi<1-\dfrac{1}{i}\right\}$，$i=1,\ 2,\ \cdots n,\ \cdots$ 则有 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\left\{-1+\dfrac{1}{n}<\xi<1-\dfrac{1}{n}\right\}=\left(-1+\dfrac{1}{n},\ 1-\dfrac{1}{n}\right)$；$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=\{-1<\xi<+1\}=(-1,\ +1)$。

二、交集（或称积集，或通集）

【定义 1-6】 设 A、B 为两集合。如果将它们共有的元素取出来构成一个新的集合，

此新集就称为A与B之**交集**，记为AB或$A\cap B$。用符号表示，则为$AB=\{\omega;\ \omega\in A$且$\omega\in B\}$。例如：设$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$，$B=\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$，则$AB=\{3,\ 4\}$。

类似于和集，交集也可以推广到可数的情形。设A_1，A_2，$\cdots A_n$，$\cdots$是一串集合，则$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i=\{\omega;$ 对$\leqslant n$的所有自然数i都有$\omega\in A_i\}=\{\omega;\ \omega\in A_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots n\}$，$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i=\{\omega;$ 对一切自然数i都有$\omega\in A_i\}=\{\omega;\ \omega\in A_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots n\cdots\}$。

【例 1-8】 $A_i=\left\{0\leqslant\xi<1+\dfrac{1}{i}\right\},i=1,2,\cdots$则$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i=\left\{0\leqslant\xi<1+\dfrac{1}{n}\right\}=\left[0,\ 1+\dfrac{1}{n}\right)$，$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i=\{0\leqslant\xi\leqslant1\}=[0,\ 1]$。

三、差集

【定义 1-7】 设A，B为两集。由集A中不属于B的所有元素组成的集，称为集A与集B的**差集**，记为$A-B$。采用符号记法，即为$A-B=\{\omega;\ \omega\in A$且$\omega\bar{\in}B\}$（注意，$A-B$并不要求$A\supset B$）。由差集定义可以推知，$(A-B)+B\neq A$。

如果$A=\Omega$为整个空间，于是$A-B$变成$\Omega-B$，习惯上$\Omega-B$称为B的**余集**（或**补集**），记为$\bar{B}=\Omega-B$。显然，对任意集A，有

$$A+\bar{A}=\Omega,\ A\bar{A}=\phi,\ \overline{(\bar{A})}=A \tag{1-4}$$

四、集合运算的有关性质

根据集的和、积、差以及包含、相等的定义，可以推出有以下关系成立。

（1）$A+A=A$，$AA=A$ （1-5）

（2）若$A\subset B$，则$A+C\subset B+C$，$AC\subset BC$ （1-6）

（3）$A+\phi=A$，$A\phi=\phi$ （1-7）

（4）$A+B=B+A$（和的交换律），$AB=BA$（积的交换律） （1-8）

（5）$(A+B)+C=A+(B+C)$（和的结合律），$(AB)C=A(BC)$（积的结合律） （1-9）

（6）$(A+B)C=AC+BC$（和的分配律），$A+(BC)=(A+B)(A+C)$（积的分配律） （1-10）

（7）若$A\subset B$，则$A-B=\phi$ （1-11）

（8）$(A-B)C=AC-BC$（减法分配律） （1-12）

（9）$(C-A)-B=C-(A+B)$ （1-13）

（10）$A-B=A\bar{B}$ （1-14）

集的和、积、差三个基本运算以及集的包含关系，如图1-2所示。一般用一个矩形表示空间Ω，矩形内的点表示元素，矩形内的某一范围表示某一集合（Ω的子集）。

图形不仅可以帮助我们直观地理解一些概念，启发我们去思考一些问题，而且图示也是论证集合关系式的一种简明直观的有用工具，下面将经常采用。例如，从图 1-3(a)中的图形可以清楚看出

$$A+B=(A-B)+(B-A)+AB$$

由图1-3(b)可看出

$$A+(B\cap C)=(A+B)\cap(A+C)$$

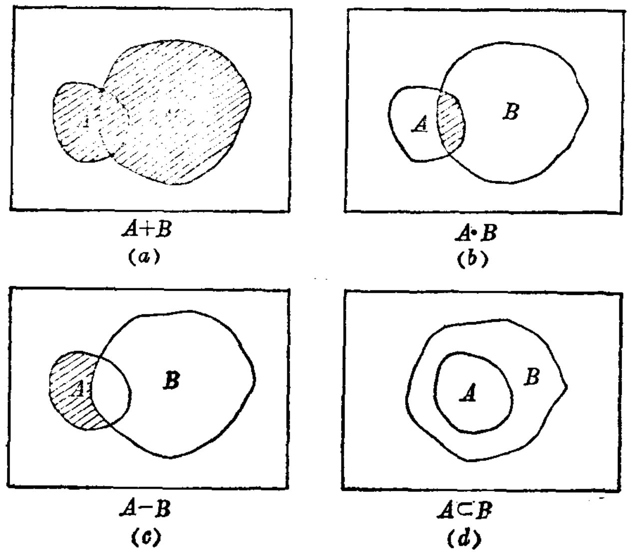


图 1-2 集合的图示

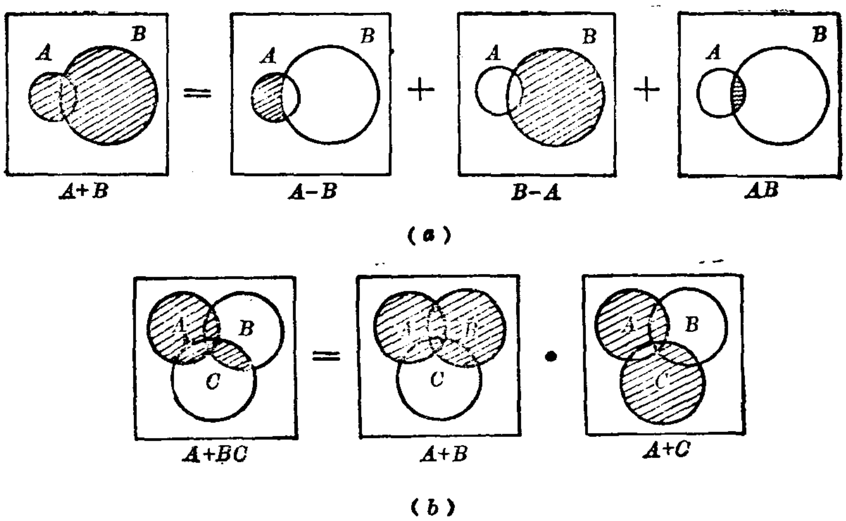


图 1-3

用图形进行论证的基本步骤为：首先在图上划出任意的给定集合，如A，B，C等，然后分别划出欲证等式左侧和右侧的区域，最后说明两侧的区域是否相符。相符表示等式成立，不符表示等式不能成立。

应该注意，图示不能看成是严格的证明。因为从数学的严谨性来说，定理的论证，必须经过严格的逻辑步骤。这里以和积公式为例，介绍一下证明集合关系式的这种方法。读者可仿此来证明前面的十条性质。

【定理 1-1】 和积公式（或称*De Morgan*公式）

设有一串任意集合A_1，A_2，$\cdots A_n$，$\cdots$则有

$$\overline{\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{A}_i,\quad \overline{\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A}_i \tag{1-15}$$

即和集的余集等于每个集合的余集的交集，交集的余集等于每个集合的余集之和集。

证： 先证第一式。将集$\overline{\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)}=\Omega-\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$记为$P$，集$\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{A}_i$记为$Q$，现要证明$P=Q$。

设$x\in P$，则按定义有$x\in\Omega$且$x\overline{\in}\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$。因此，对所有$i$，必有$x\overline{\in}A_i$，也即$x\in\Omega-A_i=\overline{A}_i$，于是$x\in Q$。即凡是$P$中的元素，都一定属于$Q$，所以$P\subset Q$。反之，设$x\in Q$，则对所有$i$，皆有$x\in\overline{A}_i=\Omega-A_i$，即$x\in\Omega$且$x\overline{\in}A_i$，因此，$x\overline{\in}\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$，所以$x\in\Omega-\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=P$，即凡$Q$中的元素皆属于$P$，于是$Q\subset P$。综合$P\subset Q$及$Q\subset P$，故有$P=Q$。仿此可证第二式。

统观以上所得结果（1-5）～（1-15）式，可以发现在集的运算关系中存在一个所谓**对偶性法则**：集合之间通过取余集、和集与交集而得到的任一真确关系式，如将其中的等号与取余号保持不变，而将其中的$\cap$、$\subset$与ϕ分别换成$\cup$、$\supset$与Ω，则所得结果仍为一真确关系。读者可就以上结果进行检验。

1.1.6 集列（或集合序列）

类似于数列x_1，x_2，$\cdots x_n$，$\cdots$指的是一串数，集列是指一串集合A_1，A_2，$\cdots$，A_n，$\cdots$，一般简记为$\{A_n\}$。

本节主要是证明下述定理。

【定理 1-2】 一串可列集之和（或称可列集的集列之和）也是可列的。

证： 为此，先来研究一种变换。设有任一集列$\{A_n\}$，其和为$A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$，现要求对集列$\{A_n\}$进行变换，以便把$A$表示成任意两集都没有共同元素的集列之和。这可通过如下的变换来实现。令

$$\left.\begin{array}{l} B_1=A_1,\ B_2=\overline{A}_1A_2,\cdots \\ B_n=\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{n-1}\ A_n,\cdots \end{array}\right\} \tag{1-16}$$

即B_n是由不属于A_1，A_2，$\cdots A_{n-1}$而属于A_n的所有元素所组成的集合。于是当$i\neq j$时，B_i与B_j无共同元素。例如，假定$i<j$，则B_i为A_i的子集，而B_j则为$\overline{A}_i$的子集，故$B_iB_j=\phi$。设令$A'=\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i$，因为$B_n\subset A_n$对所有$n$都成立，故$A'\subset A$。反之，设$x\in A$，则由$A$的定义可知，至少有某一个$A_i$，使$x\in A_i$，令$A_n$为集列$A_1$，$A_2$，$\cdots$中第一个包含元素$x$的集。由$B_n$的定义可知$x\in B_n$，从而$x\in A'$。由此即得$A\subset A'$，于是$A=A'$。

现用上述变换即可证明可列集的序列之和，仍为一可列集。若A_n为可列，则因B_n为A_n的子集，故B_n必为有限或可列。设B_n中包含的元素为x_{n1}，x_{n2}，$\cdots$，则$A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i$中的元素形成一个重序列

而此重序列可以排成一个简单的序列，如上式箭头所示。由此可知，A中的任一元素，都