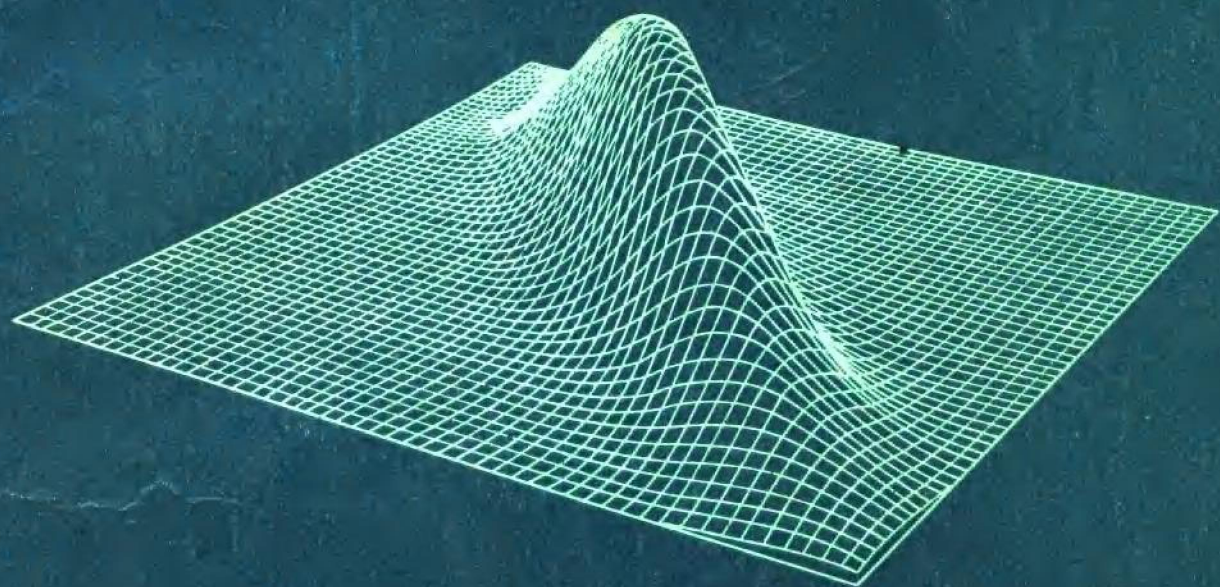


华东水利学院主编



水文学的 概率统计基础

水利出版社

前 言

1978年6月,华东水利学院受原水利电力部的委托,于南京召开了高等学校陆地水文专业《水文学的概率统计基础》教材大纲讨论会。本书就是根据这次会议拟定的大纲编写的。

本书主要作为水文专业的大学生(不带★号内容)及研究生(带★号内容)的教材,同时也可供水文、水利专业的工程技术人员参考。

全书共十一章。第二、三、四章,由张维然同志(华东水利学院)编写;第五章由王明慈同志(成都科学技术大学)编写;第六章由刘光文同志(华东水利学院)编写;第七章由黄斌同志(成都科学技术大学)编写;其余各章由丛树铮同志(华东水利学院)编写。本书由丛树铮同志主编。水利部南京水文研究所徐映波同志负责审稿。

本书部分章节曾参考或取材于文献[1-9]、[1-10]、[1-17]、[1-18]。在此谨向有关作者表示感谢。

本书承黄万里教授、唐述钊教授、窦国仁工程师以及其他同志提供宝贵意见;刘光文教授对本书的编写工作给予了关心和指导。在此谨致诚挚的谢意。

由于编写时间仓促,特别是主编人水平所限,书中定有不少错误和缺点,恳请读者批评指正。

编 者

1980年8月

期 限 表

请于下列日期前将书还回

内 容 提 要

本书讲解概率统计的基本概念与原理，并在此基础上着重讲述了水文学中应用的一些数理统计方法。第一章为全书的基础；第二至第六章为概率论内容；第七章简介随机过程的一般理论及水文过程的分析方法；第八至第十一章为数理统计部分，除一般内容外，还包括水文学中应用的一些研究方法与结果，以及常用的一些随机模型。

本书的读者对象为水文及水利专业的大学生、研究生、教师及科研设计人员、水文工作者；也可供地理、气象、海洋专业的科技人员参考。

水文学的概率统计基础

华东水利学院主编

*

水利出版社出版

(北京德胜门外六铺炕)

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

水利电力印刷厂印刷

*

787×1092毫米 16开本 29 $\frac{1}{2}$ 印张 675千字

1981年6月第一版 1981年6月北京第一次印刷

印数 0001—4810册 定价 3.00元

书号 15047·4121

前 言

1978年6月,华东水利学院受原水利电力部的委托,于南京召开了高等学校陆地水文专业《水文学的概率统计基础》教材大纲讨论会。本书就是根据这次会议拟定的大纲编写的。

本书主要作为水文专业的大学生(不带★号内容)及研究生(带★号内容)的教材,同时也可供水文、水利专业的工程技术人员参考。

全书共十一章。第二、三、四章,由张维然同志(华东水利学院)编写;第五章由王明慈同志(成都科学技术大学)编写;第六章由刘光文同志(华东水利学院)编写;第七章由黄斌同志(成都科学技术大学)编写;其余各章由丛树铮同志(华东水利学院)编写。本书由丛树铮同志主编。水利部南京水文研究所徐映波同志负责审稿。

本书部分章节曾参考或取材于文献[1-9]、[1-10]、[1-17]、[1-18]。在此谨向有关作者表示感谢。

本书承黄万里教授、唐述钊教授、窦国仁工程师以及其他同志提供宝贵意见;刘光文教授对本书的编写工作给予了关心和指导。在此谨致诚挚的谢意。

由于编写时间仓促,特别是主编人水平所限,书中定有不少错误和缺点,恳请读者批评指正。

编 者

1980年8月

目 录

前 言	
绪 言	1
第一章 集合概念	2
1.1 集合的一般性质	2
1.1.1 元素与集合(或简称为集)	1.1.2 有限集合与无限集合
1.1.3 子集与空间	1.1.4 函数与集合的表示
1.1.5 集合的运算	1.1.6 集列(或集合序列)
1.1.7 单调集列	1.1.8 集合的完全可加族
1.2 直线上的点集	11
1.2.1 区间	1.2.2 R_1 中集合的各种特性
★1.2.3 Borel 集	1.2.4 R_n 中的集合
1.3 R_1 中的非负可加集函数	15
1.3.1 集函数与点函数	1.3.2 有界集函数
1.3.3 分布	
习题一	19
第二章 事件和概率	21
2.1 事件	21
2.1.1 事件的类型	2.1.2 基本事件和复合事件
2.1.3 事件的运算	2.1.4 事件之间的关系
2.2 概率	25
2.2.1 概率的统计定义	2.2.2 概率的古典定义
2.2.3 几何概率	2.2.4 概率空间
2.3 条件概率和概率的基本运算法则	34
2.3.1 条件概率	2.3.2 概率的基本运算法则
2.3.3 独立性	2.3.4 应用举例
2.4 重复独立试验概型(或贝努利概型)	39
习题二	40
第三章 随机变数及其分布	43
3.1 一元随机变数及分布函数	43
3.1.1 随机变数	3.1.2 分布函数
3.2 多元随机变数及其分布	54
3.2.1 n 元随机变数及其分布函数	3.2.2 分布函数的性质
3.2.3 概率函数和密度函数	3.2.4 边际分布、边际概率、边际密度
3.2.5 条件分布函数	3.2.6 独立随机变数
3.3 随机变数的函数及其分布	66
3.3.1 一元随机变数的函数及其分布	3.3.2 n 元随机变数的函数及其分布
习题三	74
第四章 随机变数的数字特征	82
4.1 数学期望	82
4.1.1 数学期望及众值、中位数	4.1.2 多元随机变数的数学期望
4.1.3 条件数学期望(简称条件期望值)	

4.2 方差	90
4.2.1 方差、均方差及变差系数(或称离势系数) 4.2.2 多元随机变数的方差	
4.3 数学期望和方差的性质	96
4.3.1 数学期望的性质 4.3.2 方差的性质 4.3.3 相关系数的性质	
4.4 矩	99
4.4.1 原点矩和中心矩 4.4.2 原点矩和中心矩的关系 4.4.3 偏态系数 C_s 及峰度系数 C_k	
4.4.4 用矩表示数字特征 4.4.5 随机变数的矩母函数(<i>Generating function</i>)	
4.5 多元随机变数的矩	103
习题四	104
★第五章 特征函数与极限定理	107
5.1 特征函数和矩	107
5.1.1 特征函数的定义 5.1.2 特征函数的性质 5.1.3 特征函数与矩的关系	
5.2 用特征函数确定分布函数	110
5.3 多元随机变数的特征函数	114
5.4 随机变数的三种收敛的概念	115
5.4.1 几乎处处收敛(概率为1地收敛) 5.4.2 依概率收敛(随机收敛) 5.4.3 弱收敛	
5.4.4 分布函数列与特征函数列收敛性之间的关系	
5.5 大数定律	117
5.6 强大数定理	120
5.7 中心极限定理	121
习题五	124
第六章 一些概率分布	126
6.1 一维离散随机变数的一些分布	126
6.1.1 一点分布 6.1.2 二点分布 6.1.3 二项分布 6.1.4 泊松分布	
6.2 一维连续随机变数的一些分布	129
6.2.1 均匀分布 6.2.2 正态分布 6.2.3 对数正态分布 6.2.4 皮尔逊III型分布	
6.2.5 极值分布 6.2.6 几种抽样分布简介	
6.3 二维正态分布	151
习题六	154
★第七章 随机过程	155
7.1 随机过程概述	155
7.1.1 随机过程的概念 7.1.2 两个重要的随机过程	
7.2 马尔科夫过程	157
7.2.1 马氏链 7.2.2 马氏过程	
7.3 平稳过程	170
7.3.1 平稳性与遍历性 7.3.2 相关函数 7.3.3 谱分析 7.3.4 线性外推	
7.4 水文过程分析方法举例	182
7.4.1 极差(Range)分析 7.4.2 轮次分析(<i>Analysis by Runs</i>)	
习题七	190
第八章 估计理论与方法	193
8.1 样本的概念和抽样分布	194

8.1.1 总体和样本	8.1.2 经验分布函数(或称样本分布函数)	8.1.3 作为 n 元随机变
数的样本及其分布	8.1.4 抽样分布的概念及抽样分布的数字特征	★8.1.5 多元随机
变数函数的数字特征的近似公式	★8.1.6 几个统计量的抽样分布	
8.2 估计理论与方法		211
8.2.1 基本概念	8.2.2 估计量好坏的标准	8.2.3 估计方法
★8.3 洪水频率计算中估计方法的研究概况		234
8.3.1 概述	8.3.2 国外研究概况	8.3.3 我国的研究概况
8.4 区间估计		255
8.4.1 正态分布均值的区间估计	8.4.2 正态分布方差的区间估计	8.4.3 单侧置信区
间	8.4.4 其它概率分布的参数的区间估计	
习题八		259
第九章 假设检验		261
9.1 概述		261
9.2 基本概念与定义		261
9.2.1 定义与例	9.2.2 假设检验的基本概念	9.2.3 信度 α 的选择及 $\alpha \sim \beta$ 关系
9.2.4 基本概念的具体说明		
9.3 对于简单 H_1 关于简单 H_0 的检验		268
9.4 对于复合 H_1 关于简单 H_0 的检验		271
9.5 对于复合 H_1 关于复合 H_0 的检验——似然比检验		272
9.5.1 t -检验	9.5.2 两个平均数相等的检验	9.5.3 χ^2 检验
9.5.4 F 检验		
9.5.5 零相关检验		
9.6 拟合优度检验		282
9.6.1 χ^2 检验	9.6.2 Колмогоров-Смирнов 检验	9.6.3 列联表检验
习题九		294
第十章 回归分析		295
10.1 概述		295
10.2 一元线性回归		296
10.2.1 什么叫回归分析	10.2.2 一元线性回归的数学模型	10.2.3 回归系数的最小
二乘估计	10.2.4 回归方程的显著性检验	10.2.5 回归方程的误差
10.2.6 回归		
直线在水文分析中的一种应用		
10.3 多元线性回归		309
10.3.1 多元线性回归的数学模型	10.3.2 正规方程组及其解	10.3.3 多元线性回 归
数学模型的其它形式	10.3.4 回归方程的显著性检验	10.3.5 回归系数的显著性检 验
10.3.6 回归方程的误差		
★10.4 逐步回归分析		331
10.4.1 最优回归方程的选择	10.4.2 线性代数的有关知识	10.4.3 逐步回归分 析的
基本公式	10.4.4 几点说明	10.4.5 一个算例
10.4.6 程序与框图		
习题十		353
★第十一章 统计试验方法		355
11.1 概述		355
11.2 伪随机数的产生		357

11.2.1 产生随机数的一般方法	11.2.2 产生随机数的数学方法	
11.3 随机变量、随机向量与随机过程的抽样		361
11.3.1 随机变量的抽样	11.3.2 随机向量的抽样	11.3.3 随机过程的模拟
11.4 随机数的检验		338
11.4.1 参数检验	11.4.2 均匀性检验	11.4.3 独立性检验
		11.4.4 其它检验
11.4.5 检验的一般结果与检验的局限性		
11.5 降低方差的概念		391
11.6 统计试验方法在水文学中的某些应用		395
11.6.1 概述	11.6.2 在回归分析方面的应用	11.6.3 在水库设计方面的应用
11.6.4 运筹研究举例	11.6.5 在研究参数估计方法及线性选择方面的应用	
习题十一		402
附录 I 水文统计常用表格		403
表 1 $\Gamma(n)$ 值表		403
表 2 极大似然法计算用表 $\left[\frac{\Gamma'(\gamma)}{\Gamma(\gamma)} - \ln \gamma \sim \gamma \sim C_\gamma \sim L_1(\gamma) \text{ 关系表} \right]$		406
表 3 (1) 正态分布纵坐标表 (2) 正态分布概率表		408
表 4 皮尔逊 III 型分布 ϕ 值表		412
表 5 耿贝尔曲线离均系数 ϕ_p 值表		416
表 6 对数正态曲线的离均系数 ϕ_p 值表		417
表 7 χ^2 分布表		419
表 8 t 分布表		421
表 9 F 分布表		422
表 10 相关系数检验表		428
表 11 经验频率 $p_m = \frac{m}{n+1} \times 100\%$ 值表		429
表 12 经验频率 $p_m = \frac{m-0.3}{n+0.4} \times 100\%$ 值表		430
表 13 (1) $[0,1]$ 上均匀分布的随机数表 (2) 标准正态分布的随机数表		431
附录 II 水文统计常用程序		435
一、适线法计算	二、极大似然法计算	三、逐步回归计算
参考文献		455

绪 言

概率论与数理统计,是研究受随机因素影响的各种现象的数学工具。随着人类认识能力的发展,人们发现愈来愈多的现象都受到随机因素的影响。因此,概率论与数理统计的应用范围也愈来愈广。除了熟知的一些学科,如核物理、统计物理、空间技术、控制论、可靠性、生物统计、经济学、人口统计等,还有许多其他学科也都程度不同地使用着概率统计方法,如人工智能、图象识别、心理学、医学、神经生理学、生态学、地理学、考古学、森林学以及交通运输等。甚至象天文学这样古老的学科,它的某些问题,现今也要用概率统计方法来进行研究。

作为地学一个分支的水文学,它所研究的水文现象,普遍地受到随机因素的影响。因此,概率统计方法在水文学的各个部门都逐步地得到日益广泛的应用。如在水文测验中,站网的规划、测验规范的制定、误差分析、资料整编等;在水文预报中,某些预报方案的制作、误差的分析与评定;在水文水利计算中,各种水利系统的规划设计以及管理运用;都以某种方式使用着概率统计方法。至于在随机水文学(*Stochastic Hydrology*)中,则更是主要地使用着概率统计方法。这种情况并非是水文学所特有的,在地学或与地学有关的其他学科,如气象学、海洋学、地质学、地理学;在与水利有关的一些学科,如统计流体力学、随机水力学、结构的随机振动分析、最优设计以及在结构的位移、变形的分析研究中,都广泛地使用着概率统计方法。

概率统计方法在水文学的各个部门有着广泛的应用,而且有着更为广泛、深入的进一步应用的可能性。但这并不是说概率统计方法是水文学的唯一方法。这不仅是对水文学的一般部门而言,就是对随机因素的影响最大、概率统计方法应用最多的随机水文学来说,也是如此。虽然自随机水文学逐步形成以来,一直主要地使用着概率统计方法,但近年来,人们已开始重视和开展有物理依据的随机水文学(*Physically based stochastic hydrology*)的研究。即将概率统计方法与物理分析方法结合使用。只有这样才可望对所研究的现象得到更为本质的了解。对于水文学的其他分支,自然更是如此。然而,与物理方法的结合使用,对概率统计方法的要求不是低了,而是更高。因此,正确、合理地使用概率统计方法,将在我们揭示水文现象的规律中起到重要作用。

在水文学中使用概率统计方法,至今已有将近一个世纪的历史。但由于水文现象的复杂性,致使水文学中所使用的概率统计方法仍然处于发展之中,真正成熟和完善的内容不是很多。因此,本书的重点是介绍概率论与数理统计的基本概念与原理,只有牢固地掌握了这些内容,才有可能在工作中正确、灵活和创造性地加以应用。

本书的内容包括两部分。1~7章为概率论内容,其后各章属数理统计范畴。学习本书的基础知识主要为微积分,如能对线性代数有初步了解,这对学习本书将是有帮助的。对于大学生,教学的范围可只限于不带★号的内容;对于研究生,则可着重学习带★号的部分。工程技术人员可根据需要自行选择。

第一章 集合 概念

集合的概念,是近代数学最基本的概念之一。自从十九世纪末集合的概念产生以后,关于集合的理论就得到了迅速的发展。同时,集合的概念与理论也广泛渗透到数学的各个领域。近代概率统计理论,就是以集合的概念与理论为基础的。概率论中一个基本的概念——事件,其确切的数学表达就是集合;集合的运算和性质与初等代数中关于数的运算和性质,是有很多不同之处的。因此,为了能够正确、牢固地掌握概率论和数理统计的基本概念及基本理论,学习一点有关集合的知识是完全必要的。应指出,集合的概念并不神秘,只要多思考和多作练习,集合的概念是不难掌握的。

本书中关于集合的讲述,仅包括最基本的内容,在需要作进一步了解时,可参看有关专著,如[1-1]~[1-5]、[3-1]、[4-1]①等。

1.1 集合的一般性质

1.1.1 元素与集合(或简称为集)

集合既是一个重要的概念,初学者往往希望能得到关于集合的一个严格的定义。但是,由于集合是一个原始概念,因此它无法用更基本的数学概念来确切定义,而只能用一般语言给以描述性的说明。这就如同几何中点、线、面等概念一样。

把一个个的东西集聚在一起,这样便形成一个集合;或者说,把许多东西一起当作一个单体考虑,这便是一个集合。集合中的每一个东西(或事物)就称为该集合的元素,简称为元。

集合的元素可以是任何事物。

【例 1-1】 ①由所有正偶数构成的集合;②大于100、小于500的所有整数构成的集合;③数轴上所有实数构成的集合;④华东水利学院水文系81级全体学生组成的集合;⑤定义在直线上的所有有理函数构成的集合;⑥一部机器所有零件构成的集合;⑦平面几何中所有公理构成的集合;⑧所有英文字母构成的集合,等等。

本章中,将用大写字母 $A, B, X, Y \cdots$ 表示集合,小写字母 $a, b, x, y \cdots$ 表示元素。 $x \in A$,表示 x 是集 A 的元素,读为 x 属于 A ; $x \notin A$ 表示 x 不是 A 的元素,读为 x 不属于 A 。为了研究的方便,往往引入不含有任何元素的集合,称为空集,记为 ϕ 。

1.1.2 有限集合与无限集合

【定义 1-1】 一个集合,如其元素为有限多个,即称为有限集合。如例 1-1 中的②、

① 方括号内的数码,表示书末参考文献编号。下同。

④、⑥、⑦、⑧；反之，包含无限多元素的集合，称为**无限集合**，如例1-1中的①、③、⑤。

为了比较不同集合中所包含的元素多少，在集论中采用“对应”的方法。

【定义 1-2】 若在 A 、 B 两集的元素之间，可建立一一对应的关系，即 A 中的每一元 a 有唯一的 B 中的元 b 与之对应，同时 B 中的每一元 b 有唯一的 A 中的元 a 与之对应，就称 A 与 B 为**对等**，或**等势**，记为 $A \sim B$ 。

由上述定义不难看出，等势的概念有以下三个性质。

(1) $A \sim A$ 。 (反射性)

(2) 若 $A \sim B$ ，则 $B \sim A$ 。 (对称性)

(3) 若 $A \sim B$ ， $B \sim C$ ，则 $A \sim C$ 。 (传递性)

显然，对于两个有限集，当且只当它们具有相同数目的元素时，两者才对等。

【定义 1-3】 在无限集中，凡是和全体自然数构成的集对等的，称为**可列集**。不是可列的无限集，称为**不可列集**。

显然，例1-1中之①的偶数集，与自然数集是对等的。不仅如此，而且从下表可以看出：

1、2、3... n ...
2、4、6... $2n$...
1、3、5... $2n-1$...
1、4、9... n^2 ...
10、100、1000... 10^n ...

即自然数集，偶数集，奇数集，平方数集，10的幂集，都互相对等。可以证明，例1-1中之③是一种不可列集。显然，从一不可列集中，如以任意方式选出任一可列集，则必剩有若干元素不包含在选出的可列集中。对此，我们说不可列集的势比可列集的势大。

有限集合与可列集合，统称为**可数集合**。

1.1.3 子集与空间

【定义 1-4】 假如凡 B 的元素皆为 A 的元素，则称 A 包含 B （或 B 被 A 包含），记为 $A \supset B$ （或 $B \subset A$ ），并称 B 为 A 的**子集**。例如，设以 B 表示例1-1中所有正偶数的集合，以 A 表示例1-1中所有实数的集合，则有 $B \subset A$ 。

假如 $B \subset A$ ，同时 $A \subset B$ ，则说 $A = B$ 。显然， $A = B$ ，表示 A 、 B 所包含的元素完全相同。例如，设 B 为由 $+i$ ， $-i$ 两个虚数构成的集， A 为由方程 $x^2 + 1 = 0$ 的根组成的集，则 $A = B$ 。

通常为了研究和叙述的方便，我们事先引入一个固定的集 Ω ，它包含了在研究的问题中可能遇到的所有元素。这样，所要研究的一切集合，都是 Ω 的子集。习惯上，称 Ω 为一个**空间**。它的元素称为抽象的点，并记为 ω 。例如，假若要研究某些实数的集合，则所有实数的全体构成的集合，就是我们的空间 Ω 。于是“所有正偶数构成的集合” A ，“大于100、小于500的全体整数构成的集合” B ，以及其它任何的数集都是 Ω 的子集。事实上，

这时对于任意集 A ，恒有

$$\phi \subset A \subset \Omega \quad (1-1)$$

根据集合的性质及子集的定义，容易证明有下列性质成立：对于 Ω 中的任意集合 A 、 B 、 C 皆有

$$(1) A \subset A. \quad (\text{反射性})$$

$$(2) \text{若 } A \subset B, B \subset C, \text{ 则 } A \subset C. \quad (\text{传递性}) \quad (1-2)$$

1.1.4 函数与集合的表示

前面主要用文字描述的方式来表示集合，但在进一步的研究中，为了表达的精确简炼，就要求采用符号的形式来表示集合。

设 A 为一有限集，其所包含的元素（或点）为 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ ，则 A 可用逐一列举其元素的办法，表示为 $A = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ 。例如，设集 A 表示投一枚硬币所得结果的集合。由于这时有且只有两种结果，即“正面向上”与“反面向上”，如以 ω_1, ω_2 分别表示之，则 $A = \{\omega_1, \omega_2\}$ 。对于任一有限集，采用这种表示方法，从原则上说，都是可以的。然而，当集中所含元素很多时，这种表示方法就十分繁琐，以至于实际上无法使用。为此，考察如下的例。

【例 1-2】设有 48 个房间，如表 1-1 所示，在晚上每一房间各有开灯（以 1 表示）和关灯（以 0 表示）两种状态。设以 ω_i 表示 48 个房间开灯关灯的一种状态， Ω 表示所有可能状态的集合（事实上， Ω 为 48 位二进制数所表示的整数的集合）。易知 Ω 共含有 $N = 2^{48}$ 个元素。设记为 $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{N-1}$ ，如表 1-1 所示。这时如要用上述方法来表示 Ω 中的某些子集，如设 A 表示“至少有十个房间开灯的各种状态的集合”，则要用上述方法来表示 A ，事实上十分困难。

表 1-1 状态示意见表

状态编号	状态内容								$\xi(\omega)$
	48	47	46		4	3	2	1	
ω_0	0	0	0		0	0	0	0	0
ω_1	0	0	0		0	0	0	1	1
ω_2	0	0	0		0	0	1	0	1
ω_3	0	0	0		0	0	1	1	2
ω_4	0	0	0		0	1	0	0	1
ω_5	0	0	0		0	1	0	1	2
ω_6	0	0	0		0	1	1	0	2
ω_7	0	0	0		0	1	1	1	3
$\vdots$	$\vdots$						$\vdots$		$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$						$\vdots$		$\vdots$
ω_{N-2}	1	1	1		1	1	1	0	47
ω_{N-1}	1	1	1		1	1	1	1	48

对于无限集，特别是不可列集，自然就更不能用上述方法来表示了。这就推动人们去研究别的表示方法。为此需要介绍定义在空间 Ω 上的函数（或称为变换、映象、对应）的概念。

如果对于空间 Ω 中的每一点 ω , 规定空间 Ω' 中一点 ω' 与之对应, 如图 1-1 所示, 这一对应的规则就称为从空间 Ω 到空间 Ω' 的函数^① ξ 。空间 Ω 称为函数 ξ 的定义域空间, Ω' 称为函数 ξ 的值域空间, ω' 称为函数 ξ 在 ω 处的值, 记为 $\xi(\omega)$ 。我们约定, 今后所考察的函数, 永远是单值的, 就是说, 对于每一个 $\omega \in \Omega$, 只有一个值 $\xi(\omega)$ 与之对应。例如, 设 Ω 为所有英语词汇的集合, 定义 $\omega' = \xi(\omega)$ 为该词汇的第一个字母, 如, $\xi(\text{probability}) = p$, $\xi(\text{statistics}) = s \cdots$ 等, 则 ξ 就是定义在 Ω 上的一个函数, 其值域空间为 $\Omega' = \{a, b, c \cdots z\}$, 即 26 个英文字母的集合。

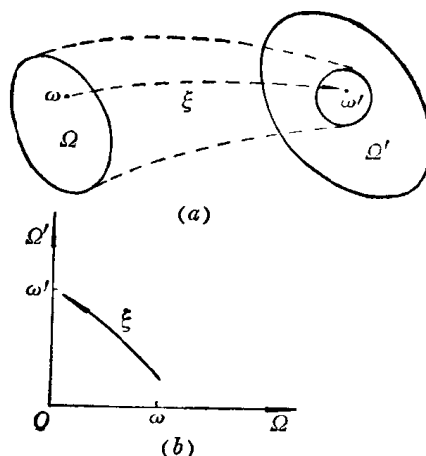


图 1-1 Ω 上的函数的两种示意图

现在引进一种表示 Ω 中集合的符号记法: $\{\omega; \cdots\}$, 其中 $\cdots$ 的位置可以填入含有 Ω 上函数 ξ 的某种关系式, 以此符号来表示 Ω 中所有能使关系式 $\cdots$ 成立的那些 ω 所构成的集合。而且为了简单, 在不会混淆的时候往往将 $\{\omega; \cdots\}$ 中的 ω 省略不写, 而只写成 $\{\cdots\}$ 。例如 $\{\omega; \xi = \omega'\} = \{\xi = \omega'\}$ 就表示 Ω 中能够使 $\xi(\omega) = \omega'$ 的那些 ω 所构成的集合, 这里 ω' 是 Ω' 中的一点。 $\{\omega; \xi \in A'\} = \{\xi \in A'\}$, 表示 Ω 中能使 $\xi(\omega) \in A'$ 的那些 ω 所构成的集, 其中 $A' \subset \Omega'$ 。显然, 对于一个不属于 ξ 的值域空间的点 ω' , $\{\xi = \omega'\}$ 是 Ω 中的空集 ϕ 。

通常, 取 Ω' 为一维欧氏空间 $R_1 = (-\infty, +\infty)$ (在某些情况下可以取为半空间 $(0, \infty)$)。这样通过 ξ 的变换, 就把各种各样的空间 Ω , 都变换到欧氏空间, 从而为研究提供了方便。

这样, 在例 1-2 中要表达集合 A , 就十分简单。只要定义一个 Ω 上的函数 ξ 即可。设 $\xi(\omega)$ 表示状态 ω 中开灯的房间数, 则集 A 可表示为 $A = \{\omega; \xi \geq 10\} = \{\xi \geq 10\}$ 。

下面再来考察几个例子。

【例 1-3】 某人自甲地到乙地旅行, 可以乘船、火车、汽车、飞机, 共四种方式, 其旅费分别为 50、100、150、200 元。我们来研究旅行方式的集合。设以 $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ 分别表示这四种方式。以 ξ 表示每一旅行方式的旅费, 则如下表所列。

ω	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$\xi(\omega)$	50	100	150	200

这时, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ 。显然, Ω 的任一子集 (包括 Ω 本身), 都可用 $\{\cdots\}$ 的形式来表达。例如, 设 $A = \{\omega_3, \omega_4\}$, 则 A 可表示为 $A = \{\xi \geq 150\}$, 因为只有 ω_3, ω_4 能使 $\xi \geq 150$ 。另外, 对于值域空间 $\Omega' = (0, +\infty)$ 中除去 50, 100, 150, 200 四个数值外, 对其余任意一点 ω' , 都有 $\{\xi = \omega'\} = \phi$ 。

① 有时只在 Ω' 为 (全体或部分) 实数集合时, ξ 才称为函数, 对其余情况 ξ 称为变换、或映象、或对应。本书中将不作区分, 因为在多数情况下, Ω' 都是 (全体或部分) 实数的集合。另外, 我们并不要求 Ω' 中所有元都是 Ω 中某元的对应元。

【例 1-4】观测南京各年 7 月 1 日的日降雨量。由于各年该日的降雨量各不相同，设以 ω_x 表示该日降雨量等于 x 毫米这一状态，则从理论上说，可有无限多种状态。由于日降雨量总为大于或等于零的一个实数，故设定义函数 ξ 如下

$$\xi(\omega) = x, \text{ 当 } \omega = \omega_x \quad (1-3)$$

则值域空间可取为 $\Omega' = [0, +\infty)$ 。这样， Ω 中的任一集合，都可以用 $\{\dots\}$ 的形式表示出来。其中 $\dots$ 为包含 ξ 的某一关系式。例如，设 A 表示该日降雨量小于或等于 500 毫米的所有状态的集合，则 $A = \{\xi \leq 500\}$ ，其余类推。显然， $\Omega = \{\xi \geq 0\}$ 。

此例中的 Ω ， ξ ，以及 Ω' 在水文统计中具有广泛的代表性，这是因为在水文统计的绝大多数问题中，其 Ω ， ξ ， Ω' 都具有这种形式。

与函数概念相对应的，还有反函数的概念，但后者牵涉问题较多，因而不再讨论，有兴趣的读者可参看[1-3]。这里只指出： $\{\omega; \dots\} = \{\dots\}$ ，这一记号固然是表示 Ω 中的一集合，但也可看成是 Ω' 中的相应的集合，以后，我们将经常采用这后一种观点。例如，例 1-3 中的 $A = \{\xi \geq 150\}$ ，这也是 $\Omega' = [0, +\infty)$ 中的一个集合，即由 Ω' 中大于或等于 150 的所有实数组成的集合，即 $[150, \infty)$ 。例 1-4 中的 $A = \{\xi \leq 500\}$ ，也是 $\Omega' = [0, +\infty)$ 中的一个集合，小于或等于 500 的所有实数所组成的集合，即 $[0, 500]$ 。

1.1.5 集合的运算

一、和集

【定义 1-5】设 A 、 B 为两集合。由集 A 与集 B 的一切元素所组成的集，称为集 A 与 B 的**和集**，简称为 A 与 B 之**和**，记为 $A+B$ 或 $A \cup B$ 。用符号来表示，即为 $A+B = \{\omega; \omega \in A \text{ 或 } \omega \in B\}$ 。必须注意，在作和 $A+B$ 时， A 与 B 所共有的元素，只“算”一次。例如： $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ， $B = \{3, 4, 5, 6\}$ ，则 $A+B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ，而不是 $A+B = \{1, 2, 3, 4, 3, 4, 5, 6\}$ 。

上述和的定义，也可以推广到可数的情形。设 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 是一串集合，则 $A_1 + A_2 + \dots + A_n$ ，记为 $\bigcup_{i=1}^n A_i$ 或 $\sum_{i=1}^n A_i$ ，表示由 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 所包含的一切元素构成的集； $A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots$ ，记为 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 或 $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$ ，表示由一切 A_i 的元素所构成的集。

【例 1-5】设 $A_i = \{i\}$ ， $i=1, 2, \dots, n, \dots$ 则 $\bigcup_{i=1}^n A_i = \{1, 2, \dots, n\}$ ， $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ 。

【例 1-6】设 $A_i = \{i-1 \leq \xi < i\}$ ， $i=1, 2, \dots, n, \dots$ 则有 $\bigcup_{i=1}^n A_i = \{0 \leq \xi < n\} = [0, n)$ ， $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{0 \leq \xi < \infty\} = [0, \infty)$ 。

【例 1-7】设 $A_i = \left\{-1 + \frac{1}{i} < \xi < 1 - \frac{1}{i}\right\}$ ， $i=1, 2, \dots, n, \dots$ 则有 $\bigcup_{i=1}^n A_i = \left\{-1 + \frac{1}{n} < \xi < 1 - \frac{1}{n}\right\} = \left(-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right)$ ； $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{-1 < \xi < +1\} = (-1, +1)$ 。

二、交集（或称积集，或通集）

【定义 1-6】设 A 、 B 为两集合。如果将它们共有的元素取出来构成一个新的集合。

此新集就称为 A 与 B 之交集, 记为 AB 或 $A \cap B$ 。用符号表示, 则为 $AB = \{\omega; \omega \in A \text{ 且 } \omega \in B\}$ 。
例如: 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, 则 $AB = \{3, 4\}$ 。

类似于和集, 交集也可以推广到可数的情形。设 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 是一串集合, 则

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \{\omega; \text{对} \leq n \text{的所有自然数 } i \text{ 都有 } \omega \in A_i\} = \{\omega; \omega \in A_i, i=1, 2, \dots, n\}, \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{\omega;$$

 对一切自然数 i 都有 $\omega \in A_i\} = \{\omega; \omega \in A_i, i=1, 2, \dots, n, \dots\}$ 。

【例 1-8】 $A_i = \{0 \leq \xi < 1 + \frac{1}{i}\}, i=1, 2, \dots$ 则 $\bigcap_{i=1}^n A_i = \{0 \leq \xi < 1 + \frac{1}{n}\} = [0, 1 + \frac{1}{n})$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{0 \leq \xi \leq 1\} = [0, 1]$ 。

三、差集

【定义 1-7】 设 A, B 为两集。由集 A 中不属于 B 的所有元素组成的集, 称为集 A 与集 B 的差集, 记为 $A - B$ 。采用符号记法, 即为 $A - B = \{\omega; \omega \in A \text{ 且 } \omega \notin B\}$ (注意, $A - B$ 并不要求 $A \supset B$)。由差集定义可以推知, $(A - B) + B \neq A$ 。

如果 $A = \Omega$ 为整个空间, 于是 $A - B$ 变成 $\Omega - B$, 习惯上 $\Omega - B$ 称为 B 的余集 (或补集), 记为 $\bar{B} = \Omega - B$ 。显然, 对任意集 A , 有

$$A + \bar{A} = \Omega, A\bar{A} = \phi, \overline{(\bar{A})} = A \quad (1-1)$$

四、集合运算的有关性质

根据集的和、积、差以及包含、相等的定义, 可以推出有以下关系成立。

$$(1) A + A = A, AA = A \quad (1-5)$$

$$(2) \text{若 } A \subset B, \text{ 则 } A + C \subset B + C, AC \subset BC \quad (1-6)$$

$$(3) A + \phi = A, A\phi = \phi \quad (1-7)$$

$$(4) A + B = B + A \text{ (和的交换律)}, AB = BA \text{ (积的交换律)} \quad (1-8)$$

$$(5) (A + B) + C = A + (B + C) \text{ (和的结合律)}, (AB)C = A(BC) \text{ (积的结合律)} \quad (1-9)$$

$$(6) (A + B)C = AC + BC \text{ (和的分配律)}, A + (BC) = (A + B)(A + C) \text{ (积的分配律)} \quad (1-10)$$

$$(7) \text{若 } A \subset B, \text{ 则 } A - B = \phi \quad (1-11)$$

$$(8) (A - B)C = AC - BC \text{ (减法分配律)} \quad (1-12)$$

$$(9) (C - A) - B = C - (A + B) \quad (1-13)$$

$$(10) A - B = A\bar{B} \quad (1-14)$$

集的和、积、差三个基本运算以及集的包含关系, 如图1-2所示。一般用一个矩形表示空间 Ω , 矩形内的点表示元素, 矩形内的某一范围表示某一集合 (Ω 的子集)。

图形不仅可以帮助我们直观地理解一些概念, 启发我们去思考一些问题, 而且图示也是论证集合关系式的一种简明直观的有用工具, 下面将经常采用。例如, 从图 1-3(a)中的图形可以清楚看出

$$A + B = (A - B) + (B - A) + AB$$

由图1-3(b)可看出

$$A + (B \cap C) = (A + B) \cap (A + C)$$

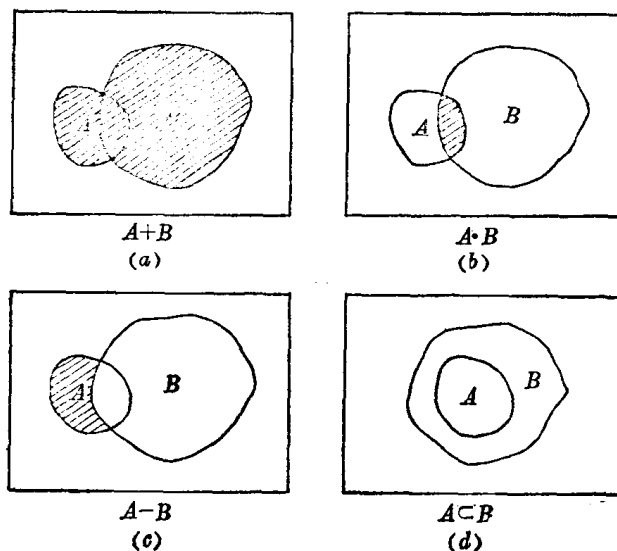


图 1-2 集合的图示

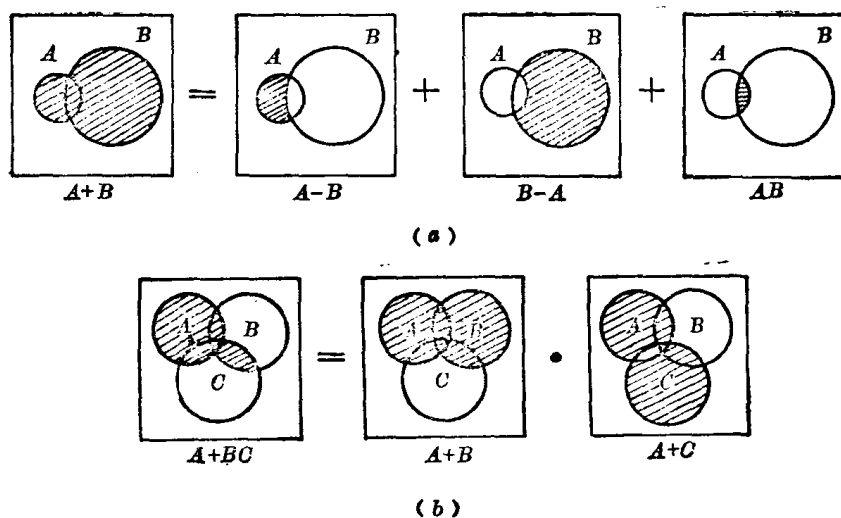


图 1-3

用图形进行论证的基本步骤为：首先在图上划出任意的给定集合，如 A ， B ， C 等，然后分别划出欲证等式左侧和右侧的区域，最后说明两侧的区域是否相符。相符表示等式成立，不符表示等式不能成立。

应该注意，图示不能看成是严格的证明。因为从数学的严谨性来说，定理的论证，必须经过严格的逻辑步骤。这里以和积公式为例，介绍一下证明集合关系式的这种方法。读者可仿此来证明前面的十条性质。

【定理 1-1】 和积公式（或称 De Morgan 公式）

设有一串任意集合 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 则有

$$\overline{\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}, \quad \overline{\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i} \quad (1-15)$$

即和集的余集等于每个集合的余集的交集，交集的余集等于每个集合的余集之和集。

证： 先证第一式。将集 $\overline{\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)} = \Omega - \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 记为 P ，集 $\bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$ 记为 Q ，现要证明 $P = Q$ 。

设 $x \in P$ ，则按定义有 $x \in \Omega$ 且 $x \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 。因此，对所有 i ，必有 $x \notin A_i$ ，也即 $x \in \Omega - A_i = \overline{A_i}$ ，于是 $x \in Q$ 。即凡是 P 中的元素，都一定属于 Q ，所以 $P \subset Q$ 。反之，设 $x \in Q$ ，则对所有 i ，皆有 $x \in \overline{A_i} = \Omega - A_i$ ，即 $x \in \Omega$ 且 $x \notin A_i$ ，因此， $x \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ，所以 $x \in \Omega - \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = P$ ，即凡 Q 中的元素皆属于 P ，于是 $Q \subset P$ 。综合 $P \subset Q$ 及 $Q \subset P$ ，故有 $P = Q$ 。仿此可证第二式。

统观以上所得结果 (1-5) ~ (1-15) 式，可以发现在集的运算关系中存在一个所谓 **对偶性法则**：集合之间通过取余集、和集与交集而得到的任一真确关系式，如将其中的等号与取余号保持不变，而将其中的 $\cap$ 、 $\subset$ 与 ϕ 分别换成 $\cup$ 、 $\supset$ 与 Ω ，则所得结果仍为一真确关系。读者可就以上结果进行检验。

1.1.6 集列 (或集合序列)

类似于数列 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ 指的是一串数，集列是指一串集合 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ ，一般简记为 $\{A_n\}$ 。

本节主要是证明下述定理。

【定理 1-2】 一串可列集之和 (或称可列集的集列之和) 也是可列的。

证： 为此，先来研究一种变换。设有任一集列 $\{A_n\}$ ，其和为 $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ，现要求对集列 $\{A_n\}$ 进行变换，以便把 A 表示成任意两集都没有共同元素的集列之和。这可通过如下变换来实现。令

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= A_1, \quad B_2 = \overline{A_1} A_2, \dots \\ B_n &= \overline{A_1} \overline{A_2} \dots \overline{A_{n-1}} A_n, \dots \end{aligned} \right\} \quad (1-16)$$

即 B_n 是由不属于 $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ 而属于 A_n 的所有元素所组成的集合。于是当 $i = j$ 时， B_i 与 B_j 无共同元素。例如，假定 $i < j$ ，则 B_i 为 A_i 的子集，而 B_j 则为 $\overline{A_i}$ 的子集，故 $B_i B_j = \phi$ 。

设令 $A' = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ ，因为 $B_n \subset A_n$ 对所有 n 都成立，故 $A' \subset A$ 。反之，设 $x \in A$ ，则由 A 的定义可知，至少有某一个 A_i ，使 $x \in A_i$ ，令 A_n 为集列 $A_1, A_2, \dots$ 中第一个包含元素 x 的集。由 B_n 的定义可知 $x \in B_n$ ，从而 $x \in A'$ 。由此即得 $A \subset A'$ ，于是 $A = A'$ 。

现用上述变换即可证明可列集的序列之和，仍为一可列集。若 A_n 为可列，则因 B_n 为 A_n 的子集，故 B_n 必为有限或可列。设 B_n 中包含的元素为 $x_{n1}, x_{n2}, \dots$ ，则 $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ 中的元素形成一个重序列

而此重序列可以排成一个简单的序列，如上式箭头所示。由此可知， A 中的任一元素，都