

微积分教学参考用书 (中)

导数与微分

李 长 明

贵 州 人 民 出 版 社

责任编辑 何伊德
封面设计 李华年
技术设计 荀新馨

导数与微分

李长明

贵州人民出版社出版发行

(贵阳市延安中路5号)

贵州新华印刷厂印刷 贵州省新华书店经销

787×1092毫米 32开本 25.75印张 552千字

1987年1月第1版 1987年1月第1次印刷

印数1—2,040

书号7115·856 定价4.95元

序

实践诚然是科学诞生和发展的原动力，但也不能否认。科学内在的逻辑、它的完善和严密化的要求，也能促进科学向着高、深发展并进而开拓出新的园地。

事实上，当我们回顾数学发展的历史时，不难看出，实践的需要在很多方面都起着主导作用：如几何学起源于田土测量，微积分诞生于力学的摇篮，计算数学的发展依赖于计算机的广泛使用，……；但是，另一方面，理论内在的要求，也常居于首要地位：如现在应用已很普遍，而原以为是空幻缥缈的虚数，最早出现于求解二次方程之中；作为近世代数的基础，十分抽象的群论，萌芽于求解五次方程碰壁之后；在几何上以至整个数学中都具有革新意义的非欧几何，却是长期孕育在企图证明欧氏平行公理的过程之中；……；反过来，这些新兴数学分支的大量运用，又促进了近代科学技术的飞跃发展。

历史的发展有它的复杂性和局限性，然而，教材的编写及课堂教学就没有必要、也不应该重演这种有局限性的过程。一本好的教材、一堂成功之课，都应当把内、外的需要有机地结合在一起，这样，既能深入揭示此门学科的本质和各个问题的来龙去脉，又能激发学生强烈的求知欲和浓厚的学习兴趣，从而体现出科学性、系统性、主动性和积极性等教学原则。特别是学习的主动性和积极性更为可贵，因为在学习的园地里，获得成功的公开秘诀是：积极地独立思考，主动地深思穷究，潜在的智慧就会迸发出创新的火花。

另一方面，鉴于初学者在每学一个单元之后，常常抓不住要领。因此，本书在各章之末，都尽力作了小结，既明确基本概念，指出主要内容和它们之间的联系，又突出数学研究中常用的一些思路和方法。对于后一点，笔者更费了一番功夫，因为近年来，许多著名的科学家、教育家都大声疾呼：

“能力的培养胜于知识的传授”。

这种真知灼见若能在教学中得以普遍的贯彻，教育质量无疑将大大地提高。因此，本书除了处处都注意阐明来源和思路、着重分析和应用以外，在小结里，特别强调数学中某些常用的思路、方法和技巧，为了真正掌握和运用它们，本书不惜多费一点篇幅，精选一些典型且有说服力的实例，使抽象的原则生动地显现出来；同时，还以方法为主线，试图熔初等数学和高等数学于一炉。如此，既明这些方法产生的渊源和发展的脉络，又见其应用的广泛与效力之宏大，这些尝试效果如何，有待广大读者审评。

本书上册《数列与极限》出版后，受到中国科学院数学研究所李培信副研究员的热情鼓励，倘若《数列与极限》中有可取之处，又能在本书得以保持和发扬，首先应该感谢李培信老师的悉心指教；另外，本书初稿完成之后，叶凤常、林敬藩、庞之垣、张国滨、张明义、马文、李虎航几位同志分别看过部分章节，都提过宝贵意见，在此一并表示深切的谢意！

本书初稿早于一九八一年冬写于南宁，三年来虽数易其稿，然限于水平，仍难尽人意，缺点错误在所难免，敬请读者不吝指正！

李长明

一九八四年十二月于贵州教育学院

目 录

第一章 函数的极限

- § 1. 函数在无穷远处的极限…………… 2
一、问题的引入(2) 二、极限的描述与定义(8) 三、函数的
无界与无穷大量(12) 四、依定义求极限之例(15) 五、几个数
列极限的推广(19)
- § 2. 函数在 ∞ 处极限的等价定义——序列语言
…………… 25
一、与数列极限的关系(25) 二、函数极限的等价定义(29)
三、柯西准则(30)
- § 3. 函数在有限点处的极限…………… 31
一、问题的引入(31) 二、极限的描述与定义(37) 三、依定义
求极限之例(46)
- § 4. 复合函数的极限…………… 51
一、复合函数的极限(52) 二、极限在不同处的转化(54) 三、 e
的一般形式(55)
- § 5. 函数极限的序列语言…………… 56
一、函数极限的等价定义(56) 二、柯西准则(58)
- § 6. 函数极限的基本理论…………… 59
一、基本性质(60) 二、极限的四则运算(62) 三、不等式的极限与
夹值定理(66) 四、一个重要的极限—— $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (67)
- § 7. 无穷小量…………… 71
一、研究无穷小量的重要性(71) 二、无穷小分析(82) 三、等价
无穷小(85) 四、无穷小量的主部(87)

§ 8. 函数极限的各种求法.....

- 一、直接利用极限定义(88) 二、运用极限的四则运算(92) 三、解因式以消去趋于零的公因式(94) 四、有理化后约去趋于零的公因式(99) 五、重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 的运用(101) 六、
- 限 e 的运用(104) 七、夹值定理的应用(110) 八、等价无穷小的代换(114) 九、函数连续性的利用(118) 十、中值定理的应用(118)
- 十一、洛彼塔法则(118) 十二、泰勒级数的利用(118)

本章小结.....118

- 一、基本概念(118) 二、主要内容(120) 三、常用方法(122) 1. $\epsilon \cdot \delta$ 方法(122) 2. 转化法(125)

习题.....129

第二章 连续函数及其性质

§ 1. 连续与间断的意义134

- 一、区分连续与间断的重要性(134) 二、连续与间断的定义(142)
- 三、连续与极限的异同(147)

§ 2. 初等函数的连续性148

- 一、连续函数与四则运算(149) 二、单调函数的连续之判定(149)
- 三、几类初等函数的连续性(154) 四、复合函数的连续性(155)

§ 3. 间断的类型及其例159

- 一、可去间断点(159) 二、广义可去间断点(无穷间断点)(160)
- 三、单方连续的间断点——跳跃性的间断点(163) 四、无任何极限的间断点——振荡间断点(166) 五、杂例(167)

§ 4. 连续函数的性质175

- 一、收敛子数列的存在性(175) 二、连续函数的基本性质 I——有界性(176) 三、连续函数的基本性质 II——确界可达性(181)
- 四、连续函数的基本性质 III——介值性(186)

§ 5. 应用191

- 一、根的存在与唯一(191) 二、拉格朗日定理(195) 三、二分法——

根的逐次逼近法之一(200) 四、一维的不动点原理(202) (根的逐次逼近法之二)(208) 五、媒介作用(213) 六、反函数的连续性(218)

本章小结.....220

一、基本概念(220) 二、主要内容与体系(221) 三、常用方法——
归谬法与举反例(222) 1. 归谬法(222) 2. 举反例(226) 1) 找特殊、走
极端(227) 2) 利用直观(236) 3) 借鉴和改造(242)

习题.....244

第三章 一致性

§ 1. 函数的一致连续250

一、问题的引入(250) 二、一致连续的定义(254) 三、一致连续
的性质(258) 四、一致连续的判定(260)

§ 2. 函数列的一致收敛
.....265

一、问题的引入(265) 二、一致收敛的定义(269) 三、一致收敛
的性质(271) 四、一致收敛的判定(282)

§ 3. 函数列的一致有界288

一、问题的引入(288) 二、一致有界的定义(289) 三、一致有界
的性质(289)

§ 4. 普遍的一致性296

一、记号与术语(296) 二、一致性的普遍定义(298)

§ 5. 等度连续性298

一、问题的引入(298) 二、等度连续的性质(299) 三、阿采拉
Arzela定理——收敛子函数列的存在定理(304)

本章小结.....307

一、基本概念(307) 二、主要内容与体系(308) 三、常用方法
(308) 1. 抽象化(309) 2. 构造性证法(311) i) 逐步逼近(312)
ii) 几何启示(313)

习题.....315

第四章 导数及其应用

- § 1. 导数的意义320
- 一、导数的来源(320) 二、瞬变与均变(326) 三、导数的定义(329) 四、几何意义(332) 五、导数的基本性质(333) 六、几个基本初等函数的导数(334)
- § 2. 求导法则337
- 一、复合函数的导数(338) 二、导数的四则运算(340) 三、初等函数的导数(342) 四、运用求导法则的几点注意(347) 五、隐函数的求导法则(351) 六、高阶导数的求法(354)
- § 3. 不可导的类型及其例360
- 一、有单边导数的情况(361) 二、无单边导数的情形(366) 三、导数存在但导函数不连续(369) 四、孤立可导点(376)
- § 4. 处处不可导的连续函数378
- 一、构造的思路和步骤(378) 二、意义与简史(385)
- § 5. 单调性与不等式393
- 一、函数的单调性(394) 二、一元不等式(396) 三、二元不等式(401) 四、多元(三元以上)不等式(412)
- § 6. 凸性与密切圆415
- 一、凸函数的引入(415) 二、凸函数的定义(418) 三、凸函数的判定(421) 四、琴生不等式及其应用(425) 五、曲率与密切圆(429)
- § 7. 极值问题437
- 一、研究极值的重要性(437) 二、极值的意义(439) 三、极值的判定(442) 四、极值和最大、最小的求法(445) 五、应用之例(445)
- § 8. 洛彼塔法则 I470
- § 9. 导数在代数中的应用473
- 一、求和问题(473) 二、切线法(牛顿法)——根的逐步逼近法之三(479) 三、根的判定(481)
- 本章小结484

- 一、基本概念(484) 二、主要内容和体系(486) 三、常用方法(486)
 1. 分解法(487) 2. 降维法(492) i) 变量代换(495) ii) 权把变量当常量(496)

习题.....499

第五章 微分、中值定理和泰勒公式

§ 1. 微分510

- 一、微分的引入(510) 二、微分与导数的关系(513) 三、微分法则(514) 四、参数方程的求导法则(515) 五、微分在近似计算中的作用(519)

§ 2. 拉格朗日中值定理521

- 一、中值定理的导出(521) 二、罗尔定理(523) 三、中值定理的改进——拉格朗日中值定理(530) 四、柯西中值定理(532) 五、柯西中值定理的应用(534) 六、柯西中值定理的推广(538) 七、三点附注(539)

§ 3. 中值定理的应用541

- 一、导数恒为零的函数必为常量(542) 二、单调性的判定与不等式的证明(544) 三、在求极限中的应用(548) 四、在级数中的应用(555)

§ 4. 洛彼塔法则564

- 一、洛彼塔法则 2——不定式“ $\frac{0}{0}$ ”的解法(564) 二、洛彼塔法则 1、2 的比较(566) 三、一点技巧(569) 四、洛彼塔法则 3——“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”的定值法(573) 五、其他不定式的求法(581) 六、局限性(585) 七、重根的中值定理(588)

§ 5. 泰勒公式591

- 一、问题的引入(591) 二、泰勒公式的导出(592) 三、泰勒级数(594)

- 四、 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$ 与泰勒级数的异同(596) 五、初等函

数的展开之一(598) 六、欧拉公式(603)

§ 6. 双曲函数605

一、双曲函数的引入(605) 二、与三角函数的异同(605) 三、
面积角——角的概念之推广(607) 四、双曲函数的几何意义(613)
五、双曲函数的展开(614)

§ 7. 对数函数及二项式展开614

一、柯西型余项(614) 二、对数函数的展开(618) 三、二项式
展开(619)

§ 8. 泰勒公式和泰勒级数的应用630

一、极值存在的充要条件(631) 二、泰勒级数与高阶导数的求法
(632) 三、利用泰勒公式求极限(633) 四、根的近似求法与误差
估算(637)

§ 9. 多项式的一致逼近649

一、问题的引入(649) 二、多项式的一致逼近(651) 三、伯恩
斯坦多项式(656)

本章小结657

一、基本概念(657) 二、主要内容与体系(659) 三、常用方法(660)1.
特殊化(660) (1)特殊化的意义(660) (2)特殊化与举反例(661)
(3)特殊化运用之例(662) (4)特殊化的功效(670) (5)沟通普遍
与特殊的手段(671) 2. 辅助函数的引法(672) (1)意义(672)
(2)作用和引法(672)

习题681

第六章 函数项级数

§ 1. 研究函数项级数的必要性689

一、数项级数的普遍化(689) 二、泰勒展开的捷径(692) 三、构
造函数的工具(693)

§ 2. 敛散性694

一、敛散性的定义(694) 二、敛散判别法(695)

§ 3. 与函数列的关系697

§ 4. 一致收敛性	699
一、一致收敛的重要性(699) 二、一致收敛的定义(700) 三、一致收敛的判别法(701) 四、几点附注(703) 五、阿贝尔变换(707) 六、阿贝尔判别法(709) 七、二项式展开的一致收敛性(711)	
§ 5. 级数和的连续性	712
一、级数和的连续性(712) 二、二项式展开的补遗(713) 三、逐项取极限(713)	
§ 6. 级数和的导数	714
一、逐项求导(714) 二、改进(716) 三、应用之例(718)	
§ 7. 幂级数	722
一、幂级数的意义(722) 二、幂级数的特性(723) 三、收敛域的类型(725) 四、类型的异同(726) 五、类型的判定和半径的确定(727)	
§ 8. 幂级数的可导性与泰勒展开	728
一、幂级数的一致收敛性(729) 二、幂级数的连续性(730) 三、幂级数的导数(731) 四、幂级数的泰勒展开(736) 五、幂级数的唯一性(737) 六、反正弦、反余弦的展开(738) 七、反正切、反余切的展开(741)	
§ 9. 幂级数的四则运算与泰勒展开	744
一、级数的和、差(745) 二、幂级数的可换性(746) 三、级数的乘积(750) 四、级数的倒数(753) 五、级数的商(754) 六、正、余割的展开(755) 七、正、余切的展开(756)	
§ 10. 级数的求和	757
一、直接求和法(758) (1)表出 S_n (758) (2)找出 S_n 所满足的方程(759) (3)两边夹(761) 二、幂级数法(768) (1)逐项求导(769) (2)分解化简(772) (3)组合消元(779)	
本章小结	781
一、基本概念(781) 二、本章体系一览表(783) 三、常用方法(784) 1 组合法(785) (1)组合与分解(785) (2)组合的手段(786) i)精选典型、集腋成裘(787) ii)寻联系、觅规律,组合本天成(789) iii)着意搭配、组成反例(792) iv)重新巧安排、旧貌换新颜	

(793) v) 分合相济、各显神通(798) 2 普遍化(801) (1) 与特殊化的比较(801) (2) 普遍化的意义(804) (3) 普遍化的功效(805) i) 适用面广(805) ii) 加深认识(806) (4) 普遍化应用的范围(806)

习题.....807

第一章 函数的极限

在上册《数列与极限》中，曾系统地研究了数列的极限，其实，数列只不过是函数的一种特殊形式——自变量是离散变量。对于函数，无论是理论研究中，抑或是解决实际问题时，大量遇到的则是自变量为连续变量的情形。例如在几何中，圆面积是半径的函数，而半径可以取任意的正实数；又如物理中，运动着的物体，其位移、速度，都是时间的函数，而时间在某个期间内却是连续地改变着。再如，气体的体积也随温度的升降而变化，可温度的改变也是连续地变化着，……，诸如此类，举不胜举。

既然函数是比数列更为普遍的形式，而在《数列与极限》一书中，我们已经看到：极限方法，是研究数列变化状态的有力工具。因此，很有必要把数列的极限推广为函数的极限，以便利用极限方法，深入地研究函数的各种性质。事实上，一些如连续、间断等貌似简单的概念，只有用极限才能正确、严格地表达出来；而微积分中诸如导数、微分、积分等基本概念也都是离不开极限的；至于泛函分析和拓扑学等，则是极限的发展和深化，由此可见：极限理论不但是研究函数的重要工具，而且它的方法，内容和思想也都渗透到近代数学的各个分支。因此，若不深刻地理解和牢固地掌握极限的思想和方法，就难以深入到近代数学的各个领域之中。

本章是在数列极限的基础上，先研究自变量无限增大时

函数相应的极限，然后，再进而讨论，自变量趋于某一定值时，函数相应的极限。

§1. 函数在无穷远处的极限

(一) 问题的引入

1. 实际的需要

① 电磁单位的确定

十九世纪初(1819年),丹麦的奥斯特(Oersted 1777—1851)发现了电流可使磁针偏转的磁效应,为深刻揭示电和磁之间的关系开辟了道路。

电流的磁效应是很容易验证的,只要把一个小磁针放在导线下面,当导线有电流通过时,就会看到磁针在电流的作用下必然产生旋转,这就是运动着的电荷,在它周围激发出磁场的有力证据。然而,为了精确地描述这种现象,还需要确切地算出这类磁场的方向和大小,为此,应先定出这种磁场的强度单位。

为简单计,假定导线为直线段 AB (如图1.1),通过它的

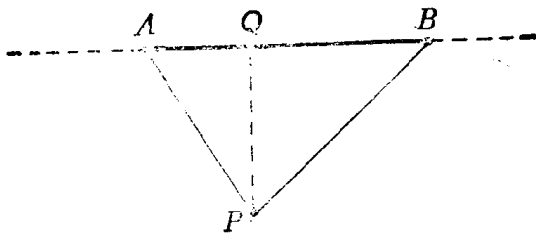


图1.1

电流之强度为 J ，又 P 为它周围的一点，设 Q 是 AB 上与 P 最近的点，令 $PQ = R$ ， $AQ = l_1$ ， $QB = l_2$ ，则导线 AB 的电流在 P 处所激发的磁场，其总强度 H 通过计算应为

$$H = \frac{J}{R} \left[\frac{l_2}{\sqrt{R^2 + l_1^2}} + \frac{l_1}{\sqrt{R^2 + l_2^2}} \right]$$

当导线两端很长时，两端的电流对 P 点几乎没有影响，这时，不妨设导线为无限长，相应的，总强度 H 的极限为

$$H_0 = \frac{2J}{R}$$

在物理学中，正是以此作为规定磁场强度单位的依据。实际上，取 J 为 1 个绝对电磁单位， R 为 2 厘米时，便将 P 点处的磁场强度定义为 1 个奥斯特。

由此看出：为规定磁场强度的单位，需要解决当 $x \rightarrow \infty$ 时，函数

$$\frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

所趋的极限，而在物理学中经常采用的办法是：把有限的长，设想为无限长，以便使计算的结果比较简捷，并因此突出主要的物理内容。由此可见，研究函数 $y = f(x)$ 在 $x \rightarrow \infty$ 时的极限有着广泛的实际意义。

② 宇航中的轨道问题

根据牛顿的万有引力定律，可以算出物体挣脱太阳引力的束缚，飞到太阳系以外的宇宙空间去，至少具有 16.7 千米/秒的速度。这个速度叫做逃逸速度，通常也叫第三宇宙速度（第二宇宙速度为 11.2 千米/秒，可以挣脱地球引力的束缚，故也叫脱离速度；第一宇宙速度为 7.9 千米/秒，是物体围绕

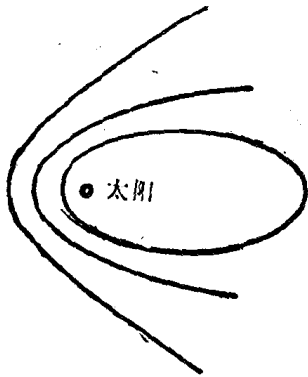


图1.2

地球作匀速圆周运动必需的速度，故也叫环绕速度)。

以第三宇宙速度或大于它的速度，虽然都可挣脱太阳引力的束缚，飞向太阳系以外的宇宙空间去，但它们的轨道却不相同(如图1.2)。等于第三宇宙速度时，轨道是以太阳为焦点的抛物线；而大于第三宇宙速度时，轨道却是以太阳为焦点的一支双曲线。

粗略地看，抛物线和双曲线的一支也有相似之处。譬如，二者都是凸的，又都无限延伸。但却不能把抛物线与双曲线的一支等同起来，因为二者无限远离的趋势有着重大的差异。事实上，沿一支双曲线无限远离时，存在着一个渐近方向(如图1.3a)，而沿抛物线远离时，却无任何渐近方向(如图1.3b)

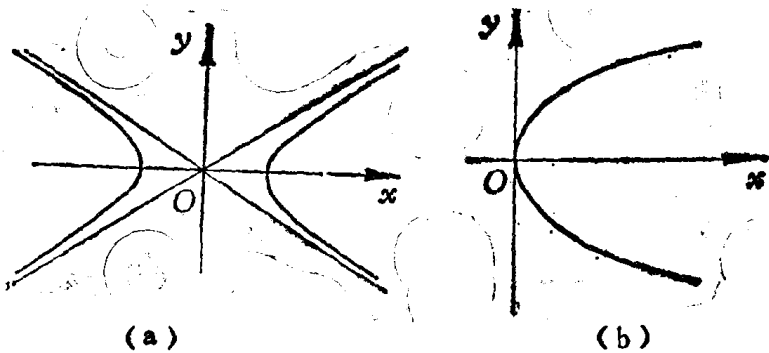


图1.3

有无渐近方向，是我们把握轨道形状的一个重要方面。这时，判断渐近方向的有无，实质上是研究函数在无穷处有无极限；而指明渐近线之方向，则依赖于极限的大小。推而广之，对任一无限延伸的曲线，也很有必要去研究它是否具有渐近方向，因为它是反映曲线形状的一个重要特征。

2. 数列极限的深入

① 数列的普遍情形

在复利和稀释问题中，曾遇到形如

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{\frac{\alpha}{n}}\right)^{\frac{\alpha}{n}}$$

的数列，但它们都可看成函数

$$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

把定义域限制在 $x = \frac{\alpha}{n} (n=1, 2, \dots)$ 的特殊情形。因此，

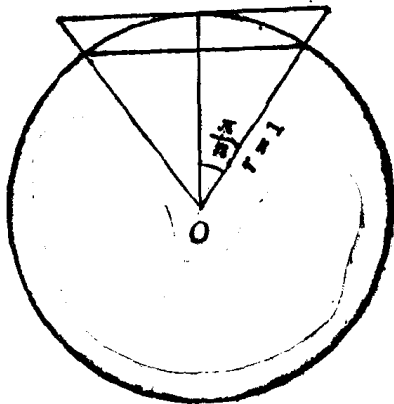


图1.4