微积分教学参考用书（中）

导数与微分

李 长 明

贵州人民出版社

责任编辑　何伊德
封面设计　李华年
技术设计　荀新馨

导数与微分
李　长　明
贵州人民出版社出版发行
（贵阳市延安中路5号）
贵州新华印刷厂印刷　　贵州省新华书店经销
787×1092毫米　32开本　25.75印张　552千字
1987年1月第1版　1987年1月第1次印刷
印数1——2,040
书号7115·856　定价4.95元

序

实践诚然是科学诞生和发展的原动力，但也不能否认科学内在的逻辑、它的完善和严密化的要求，也能促进科学向着高、深发展并进而开拓出新的园地。

事实上，当我们回顾数学发展的历史时，不难看出，实践的需要在很多方面都起着主导作用：如几何学起源于田土测量，微积分诞生于力学的摇篮，计算数学的发展依赖于计算机的广泛使用，……；但是，另一方面，理论内在的要求，也常居于首要地位：如现在应用已很普遍，而原以为是空幻缥渺的虚数，最早出现于求解二次方程之中；作为近世代数的基础，十分抽象的群论，萌芽于求解五次方程碰壁之后；在几何上以至整个数学中都具有革新意义的非欧几何，却是长期孕育在企图证明欧氏平行公理的过程之中；……；反过来，这些新兴数学分支的大量运用，又促进了近代科学技术的飞跃发展。

历史的发展有它的复杂性和局限性，然而，教材的编写及课堂教学就没有必要、也不应该重演这种有局限性的过程。一本好的教材、一堂成功之课，都应当把内、外的需要有机地结合在一起，这样，既能深入揭示此门学科的本质和各个问题的来龙去脉，又能激发学生强烈的求知欲和浓厚的学习兴趣，从而体现出科学性、系统性、主动性和积极性等教学原则。特别是学习的主动性和积极性更为可贵，因为在学习的园地里，获得成功的公开秘诀是：积极地独立思考，主动地深思穷究，潜在的智慧就会迸发出创新的火花。

另一方面，鉴于初学者在每学一个单元之后，常常抓不住要领。因此，本书在各章之末，都尽力作了小结，既明确基本概念，指出主要内容和它们之间的联系，又突出数学研究中常用的一些思路和方法。对于后一点，笔者更费了一番功夫，因为近年来，许多著名的科学家、教育家都大声疾呼：

“能力的培养胜于知识的传授”。

这种真知灼见若能在教学中得以普遍的贯彻，教育质量无疑将大大地提高。因此，本书除了处处都注意阐明来源和思路、着重分析和应用以外，在小结里，特别强调数学中某些常用的思路、方法和技巧，为了真正掌握和运用它们，本书不惜多费一点篇幅，精选一些典型且有说服力的实例，使抽象的原则生动地显现出来；同时，还以方法为主线，试图熔初等数学和高等数学于一炉。如此，既明这些方法产生的渊源和发展的脉络，又见其应用的广泛与效力之宏大，这些尝试效果如何，有待广大读者审评。

本书上册《数列与极限》出版后，受到中国科学院数学研究所李培信副研究员的热情鼓励，倘若《数列与极限》中有可取之处，又能在本书得以保持和发扬，首先应该感谢李培信老师的悉心指教；另外，本书初稿完成之后，叶凤常、林敬藩、庞之垣、张国滨、张明义、马文、李虎航几位同志分别看过部分章节，都提过宝贵意见，在此一并表示深切的谢意！

本书初稿早于一九八一年冬写于南宁，三年来虽数易其稿，然限于水平，仍难尽人意，缺点错误在所难免，敬请读者不吝指正！

李长明

一九八四年十二月于贵州教育学院

目　　录

第一章　函数的极限

第二章 连续函数及其性质

第三章 一致性

第四章 导数及其应用

第五章 微分、中值定理和泰勒公式

第六章　函数项级数

第一章　函数的极限

在上册《数列与极限》中，曾系统地研究了数列的极限，其实，数列只不过是函数的一种特殊形式——自变量是离散变量。对于函数，无论是理论研究中，抑或是解决实际问题时，大量遇到的则是自变量为连续变量的情形。例如在几何中，圆面积是半径的函数，而半径可以取任意的正实数；又如在物理中，运动着的物体，其位移、速度，都是时间的函数，而时间在某个期间内却是连续地改变着。再如，气体的体积也随温度的升降而变化，可温度的改变也是连续地变化着，……，诸如此类，举不胜举。

既然函数是比数列更为普遍的形式，而在《数列与极限》一书中，我们已经看到：极限方法，是研究数列变化状态的有力工具。因此，很有必要把数列的极限推广为函数的极限，以便利用极限方法，深入地研究函数的各种性质。事实上，一些如连续、间断等貌似简单的概念，只有用极限才能正确、严格地表达出来；而微积分中诸如导数、微分、积分等基本概念也都是离不开极限的；至于泛函分析和拓扑学等，则是极限的发展和深化，由此可见：极限理论不但是研究函数的重要工具，而且它的方法，内容和思想也都渗透到近代数学的各个分支。因此，若不深刻地理解和牢固地掌握极限的思想和方法，就难以深入到近代数学的各个领域之中。

本章是在数列极限的基础上，先研究自变量无限增大时

函数相应的极限；然后，再进而讨论，自变量趋于某一定值时，函数相应的极限。

§1. 函数在无穷远处的极限

（一）问题的引入

1. 实际的需要

①电磁单位的确定

十九世纪初（1819年），丹麦的奥斯特（Oersted 1777—1851）发现了电流可使磁针偏转的磁效应，为深刻揭示电和磁之间的关系开辟了道路。

电流的磁效应是很容易验证的，只要把一个小磁针放在导线下面，当导线有电流通过时，就会看到磁针在电流的作用下必然产生旋转，这就是运动着的电荷，在它周围激发出磁场的有力证据。然而，为了精确地描述这种现象，还需要确切地算出这类磁场的方向和大小，为此，应先定出这种磁场的强度单位。

为简单计，假定导线为直线段AB（如图1.1），通过它的

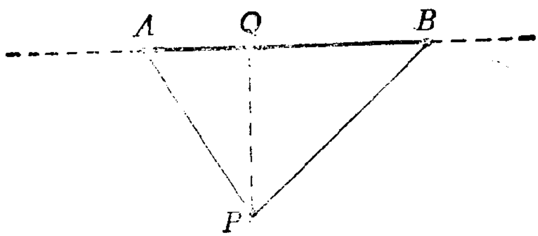

图1.1

电流之强度为 J，又P为它周围的一定点，设Q是AB上与P最近的点，令 $PQ=R$，$AQ=l_1$，$QB=l_2$，则导线AB的电流在P处所激发的磁场，其总强度H通过计算应为

$$H=\frac{J}{R}\left[\frac{l_2}{\sqrt{R^2+l_1^2}}+\frac{l_1}{\sqrt{R^2+l_1^2}}\right]$$

当导线两端很长时，两端的电流对P点几乎没有影响，这时，不妨设导线为无限长，相应的，总强度H的极限为

$$H_0=\frac{2J}{R}$$

在物理学中，正是以此作为规定磁场强度单位的依据。实际上，取J为1个绝对电磁单位，R为2厘米时，便将P点处的磁场强度定义为1个奥斯特。

由此看出：为规定磁场强度的单位，需要解决当$x\to\infty$时，函数

$$\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

所趋的极限，而在物理学中经常采用的办法是：把有限的长，设想为无限长，以便使计算的结果比较简捷，并因此突出主要的物理内容。由此可见，研究函数$y=f(x)$在$x\to\infty$时的极限有着广泛的实际意义。

②宇航中的轨道问题

根据牛顿的万有引力定律，可以算出物体挣脱太阳引力的束缚，飞到太阳系以外的宇宙空间去，至少具有16.7千米/秒的速度。这个速度叫做逃逸速度，通常也叫第三宇宙速度（第二宇宙速度为11.2千米/秒，可以挣脱地球引力的束缚，故也叫脱离速度；第一宇宙速度为7.9千米/秒，是物体围绕

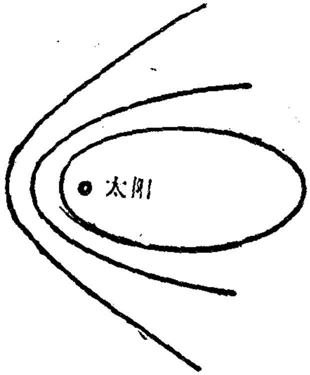

图1.2

地球作匀速圆周运动必需的速度，故也叫环绕速度）。

以第三宇宙速度或大于它的速度，虽然都可挣脱太阳引力的束缚，飞向太阳系以外的宇宙空间去，但它们的轨道却不相同（如图1.2）。等于第三宇宙速度时，轨道是以太阳为焦点的抛物线；而大于第三宇宙速度时，轨道却是以太阳为焦点的一支双曲线。

粗略地看，抛物线和双曲线的一支也有相似之处。譬如，二者都是凸的，又都无限延伸。但却不能把抛物线与双曲线的一支等同起来，因为二者无限远离的趋势有着重大的差异。事实上，沿一支双曲线无限远离时，存在着一个渐近方向（如图1.3a)，而沿抛物线远离时，却无任何渐近方向（如图1.3 b）

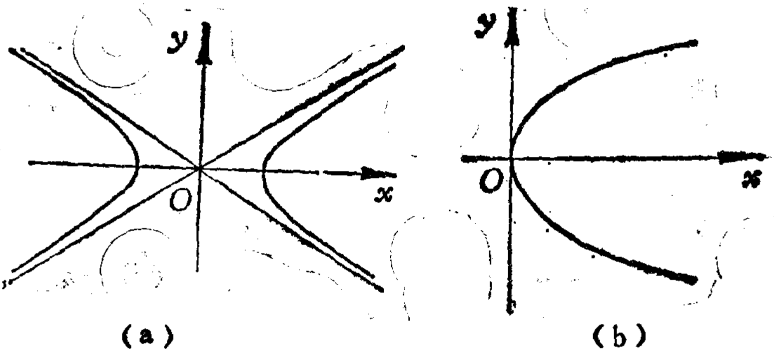

图1.3

有无渐近方向，是我们把握轨道形状的一个重要方面。这时，判断渐近方向的有无，实质上是研究函数在无穷处有无极限；而指明渐近线之方向，则依赖于极限的大小。推而广之，对任一无限延伸的曲线，也很有必要去研究它是否具有渐近方向，因为它是反映曲线形状的一个重要特征。

2.数列极限的深入

①数列的普遍情形

在复利和稀释问题中，曾遇到形如

$$a_n=\left(1+\frac{1}{\frac{a}{n}}\right)^{\frac{a}{n}}$$

的数列，但它们都可看成函数

$$y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

把定义域限制在$x=\frac{a}{n}(n=1, 2,\cdots)$的特殊情形。因此，

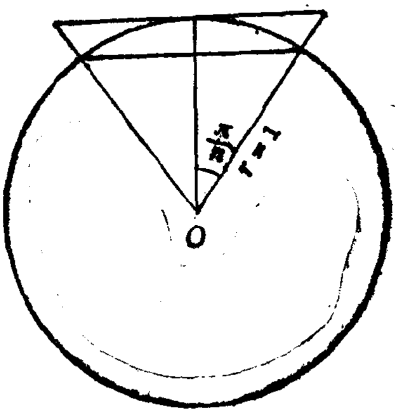

图1.4