

高等学校试用教材

高等数学

(线性代数、微分方程、线性规划部分)

刘光旭 郑仲三 编著

南开大学出版社

内 容 简 介

《高等数学》是根据现行有关教学大纲和基本要求为非数学专业所编写的高等院校试用教材。本书注意满足不同水平、不同层次的教学要求。它具有内容适当、论证严密、层次清晰以及便于教和便于学等特点，并配有富于启发性和突出技巧训练的大量例题和习题。

内容包括：行列式、线性方程组理论和解法、矩阵、线性空间、线性变换、约当标准形、欧氏空间与酉空间、二次型、常微分方程理论和解法、稳定性理论、线性规划等。

高 等 数 学

(线性代数、微分方程、线性规划部分)

刘光旭 郑仲三 编著

南开大学出版社出版

(天津八里台南开大学校内)

新华书店天津发行所发行

河北省邮电印刷厂印刷

1988年6月第1版 1988年6月第1次印刷

开本：850×1168 1/32 印张：18

字数：48.1万 印数：1—3 300

ISBN 7-310-00152-4/O·29 定价：3.55元

前 言

作者在南开大学讲授高等数学多年，本书就是在原有讲义的基础上加以修改、补充而成的，它可作为高等院校非数学专业的高等数学教材。

本书包含三部分内容。第一部分讲授线性代数，研究行列式、线性方程组、向量、矩阵、线性空间、欧氏空间、酉空间、线性变换和二次型的理论，给出各种化准标形的方法，诸如行列式化为标准形（三角形）求值、线性方程组化为标准形（阶梯形）求解、有限维线性空间的线性变换、二次型（实对称矩阵）化为标准形（对角形）以及矩阵化为约当标准形等具体方法。强调了初等变换、特征值、特征向量和正交性的重要作用。通过学习，读者将会了解如何把具体的 n 维向量空间从理论上抽象为一般的线性空间；又如何把 n 阶方阵从理论上抽象为线性空间中的线性变换，并将熟悉矩阵运算的各种技巧。

第二部分讲授常微分方程，本书着重讲述高阶线性微分方程和线性微分方程组的理论和解法，此外，还较系统地介绍了非线性系统的稳定性理论。

第三部分讲授线性规划，主要是研究线性规划的基本理论、单纯形法、线性规划的对偶问题以及运输问题。

在某种意义上讲，第二、第三部分可视为第一部分的应用。但为了适应不同专业的需要，在讲述上它们又是相对独立、自成体系。当今，对经济、管理类各专业的学生量化水平的要求越来越高，尤其是对线性代数、微分方程（作为数学模型的描述）和线性规划（作为运筹学的重要内容）的要求更是如此。因此，本书作为

这些专业的教材也是适宜的。

本书在内容安排上遵循从具体到抽象的认识规律。把具体的线性方程组解法、行列式、矩阵等内容放在前面，而把较为抽象的线性空间理论安排在后面，这样做是考虑到与中等数学的衔接，并可减少初学者的困难。在叙述上，则力求概念清楚、推导详尽、便于自学。此外，我们还采用了一些适合线性代数特点的数学符号。这些规范的数学符号使用起来极为自然。教学经验证明，采用这些符号有助于学生的理解和记忆。

在每一章的后面附有相当数量的习题。其中有些题目是为着使读者加深对概念和定理的理解，有些是为着使读者加强对计算技能的训练，还有一些题目则是为着对已讲理论的说明、推广或完善。因此，每章的内容与其后的习题应视为一个整体。

本书是在南开大学许多同志的帮助和支持下写成的。特别是孟道骥副教授在教学中曾使用过本书的部分初稿，他的建设性意见使本书获益匪浅。此外，南开大学孙寿民先生对本书手稿进行了详细认真的审阅，并提出宝贵意见。在此一并谨致谢意。

由于作者水平有限，加之时间仓促，不妥之处在所难免，切望读者不吝指教。

作者

1987年春于南开大学

目 录

第 1 章 行列式与克莱姆法则	(1)
§ 1.1 n 阶行列式的概念与性质	(2)
§ 1.2 n 阶行列式的计算	(17)
§ 1.3 克莱姆法则	(28)
习 题 1	(33)
第 2 章 线性方程组的理论和解法	(38)
§ 2.1 消元法与初等变换	(38)
§ 2.2 n 维向量的线性相关性	(49)
§ 2.3 矩阵的秩	(58)
§ 2.4 线性方程组的可解条件与解的结构	(63)
习 题 2	(71)
第 3 章 矩阵	(76)
§ 3.1 矩阵的运算	(76)
3.1.1 矩阵的加法、数乘和乘法	(76)
3.1.2 分块矩阵	(80)
§ 3.2 逆矩阵及矩阵乘积的秩	(87)
3.2.1 逆矩阵	(87)
3.2.2 矩阵乘积的秩	(98)
§ 3.3 行列式的降价定理	(106)
习 题 3	(111)
第 4 章 线性空间	(117)

§ 4.1	线性空间的定义	(117)
§ 4.2	向量的线性相关性	(123)
§ 4.3	基、维数与坐标	(129)
4.3.1	维数公式	(129)
4.3.2	过渡矩阵	(134)
4.3.3	同构	(139)
	习 题 4	(142)
第 5 章	线性变换	(147)
§ 5.1	线性变换与线性变换的矩阵	(148)
5.1.1	线性变换的定义	(148)
5.1.2	线性变换的矩阵	(150)
5.1.3	线性变换的运算	(155)
§ 5.2	特征值、特征向量与矩阵的对角化	(157)
5.2.1	特征值、特征向量的定义	(158)
5.2.2	特征值、特征向量的计算	(159)
5.2.3	线性变换可对角化的条件	(164)
5.2.4	马尔可夫过程	(170)
§ 5.3	不变子空间	(173)
§ 5.4	矩阵的最小多项式	(176)
	习 题 5	(180)
第 6 章	约当标准形	(186)
§ 6.1	λ -矩阵的标准形	(186)
§ 6.2	λ -矩阵的初等因子	(195)
§ 6.3	约当标准形	(201)
	习 题 6	(208)
第 7 章	欧氏空间与酉空间	(211)
§ 7.1	欧氏空间的概念	(211)

§ 7.2	欧氏空间的法正交基	(216)
§ 7.3	正交变换与对称变换	(224)
§ 7.4	酉空间与酉变换	(227)
§ 7.5	埃尔米特矩阵、对称矩阵、酉矩阵的标准化	(230)
§ 7.6	矩阵分析简介	(238)
7.6.1	向量和矩阵的极限	(238)
7.6.2	函数矩阵	(251)
§ 7.7	特征值的计算	(255)
	习 题 7	(262)
第 8 章	二次型	(269)
§ 8.1	二次型与其标准形	(269)
§ 8.2	惯性定律	(283)
§ 8.3	正定二次型	(286)
§ 8.4	二次型束	(295)
第 9 章	常微分方程理论和解法	(304)
§ 9.1	n 阶线性齐次微分方程	(304)
9.1.1	齐次方程的基本解组	(308)
9.1.2	齐次方程的基本定理——通解结构	(312)
9.1.3	刘维尔公式	(314)
§ 9.2	n 阶常系数线性齐次方程解法	(319)
§ 9.3	n 阶线性非齐次方程	(326)
9.3.1	线性非齐次方程的通解结构	(326)
9.3.2	常数变易法	(327)
§ 9.4	比较系数法、拉普拉斯变换法与算子法	(331)
9.4.1	比较系数法	(331)
9.4.2	拉普拉斯变换法	(335)
9.4.3	算子解法	(348)

§ 9.5	幂级数解法简介	(362)
§ 9.6	线性方程组的一般理论	(369)
9.6.1	存在唯一性定理	(369)
9.6.2	线性齐次方程组的基本定理——通解结构	(374)
9.6.3	线性非齐次方程组的通解结构	(379)
9.6.4	常数变易法	(381)
§ 9.7	常系数线性微分方程组的解法	(384)
9.7.1	特征根均为单根时的求解方法	(385)
9.7.2	有重特征根时的求解方法	(391)
9.7.3	e^{Ax} 的计算	(407)
§ 9.8	稳定性理论	(412)
9.8.1	解的存在唯一性定理	(414)
9.8.2	李雅普诺夫意义下稳定的概念	(414)
9.8.3	按线性近似决定微分方程组的稳定性	(418)
9.8.4	李雅普诺夫第二方法	(425)
习 题 9		(434)
第10章	线性规划	(443)
§ 10.1	引例	(443)
§ 10.2	线性规划的基本概念	(445)
10.2.1	线性规划的标准型	(445)
10.2.2	标准化	(446)
10.2.3	线性规划的基本概念	(446)
§ 10.3	两个变量的线性规划问题的图解法	(449)
§ 10.4	线性规划的基本理论	(450)
10.4.1	线段	(450)
10.4.2	凸集	(451)
10.4.3	极点	(452)
10.4.4	几个重要定理	(453)
§ 10.5	单纯形法	(456)

10.5.1	单纯形表	(457)
10.5.2	最优性条件	(459)
10.5.3	没有有限最优解的判别	(464)
10.5.4	基可行解的改进	(466)
10.5.5	单纯形法	(468)
10.5.6	松弛变量法	(470)
10.5.7	人造基	(472)
10.5.8	最优性条件的不同形式	(484)
§ 10.6	线性规划的对偶问题	(485)
10.6.1	对偶问题定义	(485)
10.6.2	对偶问题的几个基本性质	(486)
10.6.3	对偶单纯形法	(494)
§ 10.7	运输问题	(504)
10.7.1	运输问题的数学模型	(504)
10.7.2	运输问题的特点	(505)
10.7.3	闭回路及线性相关组	(508)
10.7.4	初始基可行解的求法	(512)
10.7.5	最优性条件	(514)
10.7.6	位势法	(515)
10.7.7	基可行解的改进	(517)
习 题	10	(525)

习 题 答 案 (部 分) (530)

习 题	1	(530)
习 题	2	(532)
习 题	3	(535)
习 题	4	(539)
习 题	5	(540)
习 题	6	(546)
习 题	7	(548)
习 题	8	(552)

习 题 9	(554)
习 题 10	(564)

第 1 章 行列式与克莱姆法则

行列式是重要的数学工具之一，不仅在数学各领域，而且在其他许多学科中都会经常用到，特别在线性代数中它更是不可缺少的工具。

在中等数学里我们知道：二元线性方程组

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2, \end{aligned}$$

当系数行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

时，方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

类似地，三元线性方程组

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3, \end{aligned}$$

当系数行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

时，方程组有唯一解

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

对每一个线性方程组都可以唯一地写出如上的表. 反之, 任给一个如上的表, 也可以唯一地写出相应的方程组.

定义 1 把由 $m \times n$ 个数 c_{ij} 排成的 m 行 n 列的表

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 **m 行 n 列矩阵**. c_{ij} 称为这个矩阵的元素, 其中第一个下标 i 表示它所在的行数, 第二个下标 j 表示它所在的列数. 一个 m 行 n 列矩阵又简称为 **$m \times n$ 矩阵**, 有时也说成矩阵是 $m \times n$ 的.

矩阵通常用大写英文字母表示. 例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & -3 \\ 6 & 2 & -1 & 11 \\ 4 & 8 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

分别是 3×4 , 2×2 , 3×2 矩阵.

矩阵的概念来自相当普遍的事物中. 譬如在运输上, n 个仓库堆放着由 m 个城市运来的货物, 以 c_{ij} 表示第 i 个城市堆放在第 j 个仓库的货物量, 则各城市在各仓库堆放的货物量就可以排成一个 m 行 n 列的矩阵

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

又如, 在一定条件下, 弹性体内各点的应力分量可排成一个矩阵

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}.$$

因此矩阵是描写一定事物的常用工具。

为简单起见，有时用 $A = (a_{ij})$ 表示矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

而用 $\text{ent}_{ij} A$ 表示矩阵 A 的位于第 i 行第 j 列的元素 a_{ij} (ent 是 element 或 entry 的缩写)。

两个 $m \times n$ 矩阵 A, B 称为相等是指

$$\text{ent}_{ij} A = \text{ent}_{ij} B, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

记为 $A = B$ 。

定义 2 如果一个矩阵 A 的行数与列数相等 (设都等于 n)，则称 A 是一个 **方阵**，或称 A 为一个 **n 阶矩阵**。

定义 3 设 A 是一个 n 阶矩阵，若

$$\text{ent}_{ij} A = \delta_{ij} \quad \left(\text{其中 } \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \right),$$

则称 A 为一个 **n 阶单位矩阵**。 n 阶单位矩阵常记为 I_n ，或简单记为 I 。

定义 4 在 n 阶矩阵 A 中，任取定 k 行和 k 列，由位于这些行列相交处的元素所构成的 k 阶矩阵叫做 A 的一个 **k 阶子矩阵**。

定义 5 在 n 阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 中，去掉第 i 行和第 k 列以后所第到的 $(n-1)$ 阶矩阵叫做元素 a_{ik} 的 **余子矩阵**，记为 A_{ik} ，即

$$A_{ik} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

类似地，如果我们去掉 A 的第 i 行与第 j 行以及第 k 列与第 l

列，则得到 A 的二阶子矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{ik} & a_{il} \\ a_{jk} & a_{jl} \end{pmatrix}$$

的 $(n-2)$ 阶余子矩阵，记为 $A_{ik, jl}$ 。例如，设给定矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 0 & -4 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & 3 & 6 \\ 5 & -2 & 1 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & -3 & 2 & -4 \\ 8 & 6 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$

则二阶子矩阵 $\begin{pmatrix} a_{23} & a_{25} \\ a_{43} & a_{45} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ 的 $(n-2)=3$ 阶余子矩阵为

$$A_{23, 45} = \begin{pmatrix} 7 & 9 & -4 \\ 5 & -2 & 0 \\ 8 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

现在我们由 n 阶矩阵引出 n 阶行列式的概念。

定义 6 一阶矩阵 $A = (a)$ 的行列式定义为数值 a ，记作 $\det A$ 或 $|a|$ (\det 是 determinant 的缩写)，因此

$$\det A = |a| = a.$$

设 $n-1$ 阶矩阵的行列式已经定义。给定 n 阶矩阵 $A = (a_{ij})$ ，则定义 A 的行列式为

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^n a_{1k} \cdot (-1)^{1+k} \det A_{1k}. \end{aligned} \quad (2)$$

这里 A_{1k} 是 $\text{ent}_{1k} A$ 的余子矩阵。 n 阶矩阵的行列式称为 n 阶行列式。注意 n 阶行列式和 n 阶矩阵不同， n 阶行列式是一个数，而 n 阶矩阵是一个“表格”，不是数。但 n 阶矩阵中的有关名词，例如

行、列、元素、主对角线等，我们将沿用到行列式中来。

从上述定义不难算出二阶行列式为

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \cdot (-1)^2 \det(a_{22}) + a_{12} \cdot (-1)^3 \det(a_{21}) \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \end{aligned}$$

而三阶行列式为

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \cdot (-1)^2 \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ &\quad + a_{12} \cdot (-1)^3 \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} \\ &\quad + a_{13} \cdot (-1)^4 \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ &\quad - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

这些结果与中学课本的行列式定义是一致的。另外，读者也容易看出，三阶行列式是通过二阶行列式来计算的。

在 n 阶矩阵 A 中， $\text{ent}_{i,k} A$ 的余子矩阵 $A_{i,k}$ 的行列式 $\det A_{i,k}$ 称为 $\text{ent}_{i,k} A$ 的余子式，而数

$$D_{ik} = (-1)^{i+k} \det A_{i,k}$$

称为 $\text{ent}_{i,k} A$ 的代数余子式。利用这个符号，我们可以将式(2)写为

$$\det A = \sum_{k=1}^n a_{ik} D_{ik}. \quad (3)$$

通常把式(2)和式(3)称为行列式 $\det A$ 按第一行的拉普拉斯 (Laplace) 展开.

为了计算行列式以及运用行列式这一工具, 我们先研究行列式的性质.

性质 1 将行列式的某一行的所有元素同乘以数 λ , 等于以数 λ 乘这个行列式.

证 对一阶行列式命题显然成立. 假设对于所有 $(n-1)$ 阶行列式命题已成立, 考虑 n 阶行列式 $\det A$. 若用 λ 乘 A 的第 i 行, 当 $i=1$, 则由展开式(3)便有

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n (\lambda a_{1k}) D_{1k} = \lambda \det A.$$

若 $2 \leq i \leq n$, 因为 $\det A_{1k}$ 是 $(n-1)$ 阶行列式, 所以根据归纳法的假设, 便有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n a_{ik} (-1)^{1+k} (\lambda \det A_{ik})$$

$$= \sum_{k=1}^n a_{ik} (\lambda D_{ik}) = \lambda \det A.$$

根据归纳法可知性质 1 对一切 n ($n \geq 1$) 阶行列式都成立.

推论 1 若行列式中某一行所有元素都有公因数 k , 则 k 可以提到行列式的记号之外.

推论 2 若 n 阶行列式有某一行的 n 个数全为 0, 则行列式的值必为 0.

性质 2 若行列式的某一行的 n 个数各为两个数之和, 例如第