究生用书

何淑芷 陈启流 编著

数学物理方法

华南理工大学出版社

工科研究生用书

数学物理方法

何淑芷　陈启流　编

华南理工大学出版社

·广州·

图书在版编目（CIP）数据

数学物理方法/何淑芷，陈启流编．—广州：华南理工大学出版社，1994.8

ISBN 7-5623-0657-5

Ⅰ．数…

Ⅱ．何…

Ⅲ．数学—应用数学

Ⅳ．O1

华南理工大学出版社出版发行

（广州五山　邮码 510641）

责任编辑：张巧巧

各地新华书店经销

华南理工大学出版社电脑排版室排版

华南理工大学印刷厂印装

*

1994 年 8 月第 1 版　1994 年 8 月第 1 次印刷

开本：850×1168　1/32　印张：16.25　字数：408 千

印数 1—3 000

定价：8.85 元

出 版 说 明

研究生教材建设是研究生教育的基础工程，是提高研究生教学质量的重要环节。自1978年恢复招收研究生以来，我校先后编写了多种供研究生使用的教材和教学参考书，有的已正式出版，但更多的是采用讲义形式逐年印发。为满足研究生教育事业发展的需要，我校决定出版“工科研究生用书”系列教材。

“工科研究生用书”以公共课和部分学术专著为主，专业学位课程将根据学科设置和国内相同学科的需求情况有计划地分批出版。

我们希望，本系列教材能从研究生的教学需要出发，根据各门课程在教学过程中的地位和作用，既包含本门课程的基本内容，又反映我校工科研究生的特点，并在该学科领域内求新、求深、求精，使学生掌握必须的基础理论和专门知识。学位课教材还要包含学科前沿和交叉学科的丰富内容，反映国内外最新研究成果，学术思想活跃，适应目前科学技术发展的形势。学术专著则应充分反映作者的研究成果和学术水平，阐述自己的学术见解，对实现研究生的培养目标，提高教育质量起重大作用。

“工科研究生用书”的内容结构和阐述方法，力求条理清楚，论证严谨，具有科学性、系统性和先进性。

由于我校研究生教材建设起步较晚，限于我们的水平和经验，本系列教材难免有错误和不足之处，恳请读者指正，我们将非常感谢。

华南理工大学研究生处

1994年1月

前　　言

本书包括复变函数论、积分变换、特殊函数及数学物理方程四大部分，并把场论的基本内容编为附录以便读者查阅。

复变函数的理论和方法在数学的其他许多分支中有着重要的作用，是研究解析数论、微分方程、计算数学、微分几何等的一个强有力的工具，同时它与自然科学中的很多学科，如理论物理、空气动力学、流体力学、弹性力学、自动控制等都有着密切的关系．有这样说法：如果数学在18世纪是微积分占统治地位，那末在19世纪，复变函数已经取代微积分而占有统治地位了。

数学物理方程主要是讲偏微分方程，是反映自然科学及工程技术中某些物理规律的数学模型．因而，它在物理、力学及其他自然科学、工程技术中有着广泛应用．

积分变换和特殊函数作为一种数学工具在数学的许多分支和自然科学、工程技术领域中起着重要的作用．

因此，作为高等学校的工科学生，学习这些课程是很有必要的．但是，由于种种原因，许多专业的本科生也不一定学完这些课程．所以，我们编写了《数学物理方法》这本教材，以供一些没有学过这部分内容的工科硕士研究生使用，也可作为工科学校本科生及工程技术人员学习之用．

本书在编写过程中特别注意内容的连贯性，尽量做到“前为后用”．如在第四篇数学物理方程中，我们除了介绍常用的解题方法外，还介绍了保角变换法在二维狄氏问题中的应用．

本书的第一、二篇由何淑芷编写，第三、四篇及附录由陈启流编写．由于水平有限，错漏之处恳请读者批评指正．

编　者

目　录

第一篇　复变函数论

第一章　复变函数 …… 2
§1　复平面上的点集　区域 …… 2
§2　复变函数的概念 …… 7
§3　复变函数的极限与连续 …… 10
习题一 …… 15
第二章　解析函数 …… 17
§1　复变函数的导数 …… 17
§2　解析函数 …… 20
§3　调和函数 …… 26
§4　初等函数 …… 31
§5　平面场的复势 …… 38
习题二 …… 44
第三章　复变函数的积分 …… 48
§1　复变函数积分的概念 …… 48
§2　积分的基本性质 …… 53
§3　柯西(Cauchy)定理 …… 54
§4　原函数 …… 56
§5　复合闭路定理 …… 58
§6　柯西积分公式 …… 62
§7　解析函数的高阶导数 …… 66
习题三 …… 70
第四章　级数 …… 73

§1　复数项级数 …… 73
§2　幂级数 …… 75
§3　泰勒(Taylor)级数 …… 84
§4　罗朗(Laurent)级数 …… 90
习题四 …… 97
第五章　留数 …… 99
§1　孤立奇点 …… 99
§2　函数的零点与极点的关系 …… 102
§3　在无穷远点邻域的讨论 …… 105
§4　留数 …… 107
§5　在无穷远点处的留数 …… 113
§6　留数在定积分计算上的应用 …… 115
习题五 …… 124
第六章　保角映射 …… 126
§1　保角映射的概念 …… 126
§2　几种简单的映射 …… 130
§3　分式线性映射 …… 133
§4　几个典型的分式线性映射 …… 136
§5　幂函数与根式函数所构成的映射 …… 146
§6　指数函数与对数函数所构成的映射 …… 150
习题六 …… 153

第二篇　积分变换

第七章　拉普拉斯变换 …… 158
§1　拉普拉斯变换的概念 …… 158
§2　单位脉冲函数及其拉氏变换 …… 162
§3　拉氏变换的性质 …… 164
§4　拉氏逆变换 …… 175
§5　卷积 …… 178

§6　拉氏变换在解常微分方程中的应用 …… 181
习题七 …… 183
第八章　傅里叶(Fourier)变换 …… 186
§1　傅里叶积分 …… 186
§2　傅里叶变换 …… 189
§3　傅氏变换的性质 …… 195
§4　卷积 …… 197
习题八 …… 200

第三篇　特殊函数

第九章　Γ 函数和 B 函数 …… 204
§1　Γ 函数 …… 204
§2　B 函数 …… 209
习题九 …… 211
第十章　线性常微分方程级数解法 …… 212
§1　常点邻域的级数解法 …… 212
§2　正则奇点邻域的级数解法 …… 219
习题十 …… 225
第十一章　贝塞尔(Bessel)函数 …… 227
§1　贝塞尔函数与第二、三类贝塞尔函数 …… 227
§2　递推公式——不同阶贝塞尔函数的关系 …… 232
§3　贝塞尔函数的零点 …… 235
§4　函数的傅里叶-贝塞尔级数展开 …… 236
§5　变形的贝塞尔函数 …… 243
§6　可化为贝塞尔方程的微分方程 …… 247
习题十一 …… 248
第十二章　勒让德(Legendre)多项式 …… 251
§1　勒让德多项式的定义 …… 251
§2　母函数与递推公式 …… 255

§3 正交性 傅里叶-勒让德级数 …… 259
§4 缔合勒让德多项式 …… 262
习题十二 …… 265

第四篇 数学物理方程

第十三章 数学物理方程定解问题 …… 270
§1 典型方程的推导 …… 270
§2 定解条件的推导 …… 280
§3 定解问题的提法及适定性概念 …… 287
§4 偏微分方程的解与线性定解问题解的叠加原理 …… 290
习题十三 …… 296
第十四章 分离变量法 …… 299
§1 直角坐标系下的分离变量法 …… 300
§2 极坐标系下位势方程边值问题的分离变量法 …… 316
§3 高维方程混合问题及边值问题的分离变量法 …… 324
§4 斯图姆-刘维尔(Sturm-Liouville)问题 …… 345
习题十四 …… 353
第十五章 二阶线性偏微分方程的分类与化简 …… 359
§1 两个自变量的二阶线性方程 …… 359
§2 多个自变量的二阶线性方程的分类与化简 …… 368
§3 常系数二阶线性方程的化简 …… 372
习题十五 …… 375
第十六章 行波法 …… 377
§1 行波法的基本概念 …… 378
§2 其他定解问题 波的反射 …… 386
§3 高维波动方程的初值问题 …… 393
§4 非齐次波动方程初值问题 推迟势 …… 404
习题十六 …… 409
第十七章 拉普拉斯方程的格林函数法 …… 413

§1 格林公式 调和函数的基本性质…… 413
§2 格林函数…… 418
§3 用电象法求几种特殊区域的格林函数…… 421
§4 保角变换方法对二维狄氏问题的应用…… 426
习题十七 …… 435
第十八章 积分变换法 …… 437
§1 无穷区间的固有值问题…… 437
§2 傅里叶变换解题方法 积分变换解题的程序…… 441
§3 用积分变换法解题举例…… 444
习题十八 …… 460
附录 场论的基本概念 正交曲线坐标系中的调和量 …… 463
一、场的概念…… 463
二、数量场的梯度…… 464
三、矢量场的散度和旋度…… 466
四、▽算子、梯度、散度、旋度及调和量在正交曲线坐标系中的表示式…… 470
五、有势场与调和场…… 473
六、平面调和场…… 474
附表 …… 476
习题答案 …… 483

第一篇　复变函数论

第一章　复变函数

§1　复平面上的点集　区域

一个复数[①] $z = x + iy$ 与平面直角坐标系中的点 $M(x,y)$ 对应，复数 z 的实部 $\mathrm{Re}z = x$ 和虚部 $\mathrm{Im}z = y$ 分别是点 M 的横坐标与纵坐标，以后常把复数 z 称为点 z，并把建立了点与复数一一对应的平面称为复平面.

我们还可以如下作一个球面，使得球面上的点与复数一一对应，称之为复球面.

取一个与复平面切于坐标原点的球，球上的点 S 称为南极. 通过 S 作垂直于复平面的直线与球面相交于 N 点，称之为北极（图 1.1）.

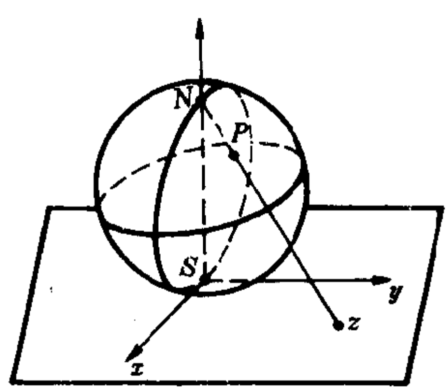

图 1.1

对于复平面内任何一点 z，如果用一条直线把点 z 与北极 N 连结起来，那末，这直线必与球面相交于异于 N 的某点 P. 反过来，对于球面上任一异于 N 的点 P，用一条直线把 P 与 N 连结起来，这条直线就与复平面相交于一点 z，这样，球面上除去北极 N 外的任一点与复平面上的点建立了一一对应关系，从而与复数建立了一一对应关系.

---

① 复数及其运算在中学数学课程已学过，在此不重复.

我们发现，当复平面上的点 z 距离原点越远时，球面上对应的点 P 离北极 N 就越近. 因此，我们就假想复平面上有一个唯一的“无穷远点”，它与球面上的北极 N 对应，并且规定复平面上的任何直线都通过无穷远点. 相应地，复数中与“无穷远点”对应的称之为“无穷大”记作 ∞. 这样，球面上的北极 N 就是无穷大 ∞ 的几何表示. 包含无穷远点在内的复平面称为扩充复平面，不包含无穷远点在内的复平面称为有限平面或称复平面.

对于复数 ∞ 来说，实部、虚部与辐角都没有意义，只是规定它的模为正无穷大，即 $|\infty| = +\infty$，对于任何一个复数 z，则有 $|z| < +\infty$. 我们还规定：

$$\alpha \pm \infty = \infty \pm \alpha = \infty \quad (\alpha \neq \infty)$$

$$\alpha \cdot \infty = \infty \cdot \alpha = \infty \quad (\alpha \neq 0)$$

$$\frac{\alpha}{\infty} = 0, \quad \frac{\infty}{\alpha} = \infty \quad (\alpha \neq \infty)$$

而 $\infty \pm \infty, 0 \cdot \infty, \dfrac{\infty}{\infty}, \dfrac{0}{0}$ 均没意义.

由于复平面上的点与复数一一对应，那末，复平面上的点集也就可用复数方程或不等式表示.

例 1 以 $z_0 = x_0 + iy_0$ 为心，R 为半径的圆周可表示为

$$|z - z_0| = R \quad (z \text{ 为圆周上的任一点}),$$

而圆内部表示为

$$|z - z_0| < R \quad (z \text{ 为圆内的点}),$$

圆外部表示为

$$|z - z_0| > R \quad (z \text{ 为圆外的点}),$$

我们把以 z_0 为心的圆内部称为 z_0 的邻域.

例 2 求由关系式

(1) $\operatorname{Im} z = \operatorname{Re} z$

(2) $\operatorname{Im} z < \operatorname{Re} z$

(3) $|z - (1 + i)| = |z - 2|$

所表示的点集.

(1) 设复数 $z=x+iy$,则 $\mathrm{Im}\,z=\mathrm{Re}\,z$ 即为 $x=y$,它表示过原点直线 $x-y=0$ (图1.2).

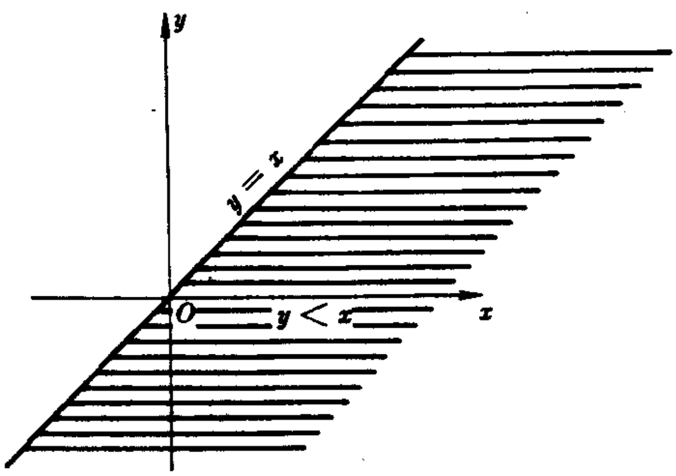

图1.2

(2) 设复数 $z=x+iy$,则不等式 $\mathrm{Im}\,z<\mathrm{Re}\,z$ 即为 $y<x$,它表示满足这不等式的点的全体(图1.2中的阴影部分).

(3) $|z-(1+i)|=|z-2|$ 表示点 z 与点$(1+i)$ 的距离等于点 z 与 2 的距离,全体 z 就是点 $1+i$ 与2的联线的垂直平分线(图1.3).我们可以把这复数方程化为直角坐标方程:

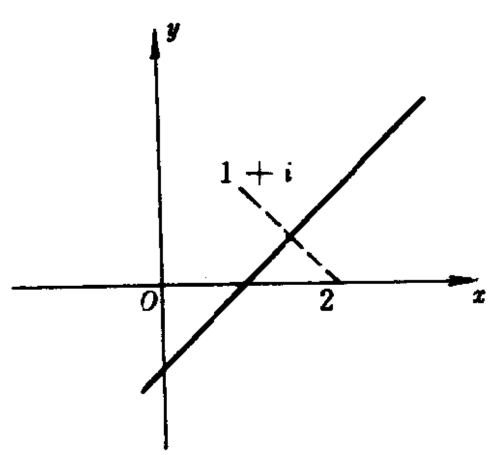

图1.3

$$|(x+iy)-(1+i)|=|(x+iy)-2|$$

即 $$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$$

化简为

$$x - y = 1$$

定义1 设 z 是点集 D 的一点，若至少有一个完全包含在 D 内的 z 的邻域，就称 z 是 D 的**内点**，如果 D 的每一点都是内点，则说 D 是**开集**.

定义2 称点集 D 为**区域**，如果 D 满足下述两个性质：

(1) D 是开集；

(2) D 的任意两个点可用一条整个属于 D 的折线连接起来(连通性质).

例如，以原点为心，半径为1的圆内部 $|z| < 1$ 是区域；由 $|z| < 1$ 及 $|z-2| < 1$ 构成的点集是开集但不是区域(图1.4).

定义3 若点 P 不是区域 D 的点，但 P 的任意小邻域内总有 D 的点，则称 P 是 D 的**边界点**，D 的所有边界点构成 D 的**边界**. 区域 D 及其边界构成的点集称为**闭域**记作 $\overline{D}$.

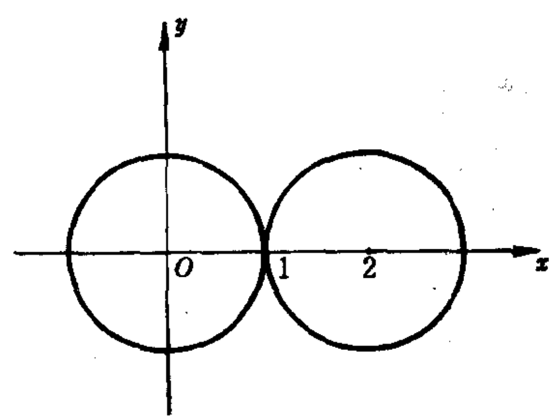

图1.4

区域的边界可能由几条曲线和一些孤立点组成. 例如，环域 $r < |z - z_0| < R$ 内去掉一点 z_1 所构成的点集是区域，它的边界就是两个圆周 $|z - z_0| = r$，$|z - z_0| = R$ 及点 z_1 (图1.5).

定义4 若存在一个正数 M，使得点集 E 中的所有点 z 都满足 $|z| < M$，则称 E 为**有界集**. 此时，点集 E 中的所有点都被包含在一个以原点为中心，M 为半径的圆内. 否则称为**无界集**.

定义5 设 $x(t)$，$y(t)$ 是区间 $a \leqslant t \leqslant b$ 上的实连续函数，则参数方程

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

在平面上确定了一条**连续曲线**. 如曲线上的点 (x,y) 用复数 $z = x + iy$ 表示，那末，这连续曲线可用复数方程

$$z = z(t) = x(t) + iy(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b)$$

表示.

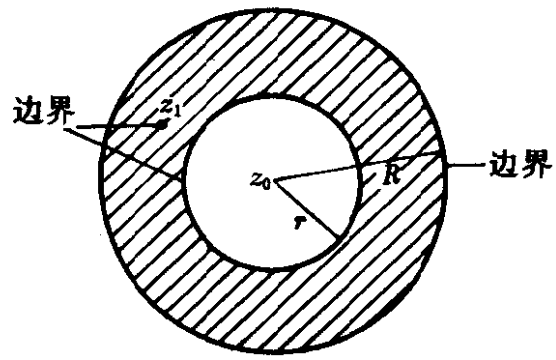

图1.5

定义6 设 $z = z(t)$ 是连续曲线. 如果对于 $[a,b]$ 中的任意两个数 $t_1, t_2 (t_1 \neq t_2)$ 都有 $z(t_1) \neq z(t_2)$，则称此连续曲线为简单曲线. 如果仅有起点与终点重合(即 $z(a) = z(b)$)，则称此连续曲线为**简单闭曲线**.

定义7 设 $z = z(t) = x(t) + iy(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b)$ 是简单曲线，若在 $[a,b]$ 上恒有连续导数 $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ 且 $z'(t) \neq 0$(即 $[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \neq 0$)，则称此曲线为**光滑曲线**. 此时，曲线有连续变动的切线.

由几段光滑曲线所组成的曲线称为**逐段光滑曲线**.

例如，曲线

$$z = e^{it} = \cos t + i\sin t \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

是一条简单光滑闭曲线.

定义8 设 D 是区域，若 D 内的任一条简单闭曲线的内部仍属于 D，则称 D 是**单连域**，不是单连域的区域称为**多连域**.

例如，圆域 $|z| < R$ 是单连域；圆环域 $R_1 < |z| < R_2 \quad (R_1 > 0)$ 是多连域.

§2 复变函数的概念

在研究一些物理过程时，许多物理量(如速度、加速度、电场强度等)若用复变数来描述会感到十分方便，而复变数之间的相互依赖关系就是所谓复变函数.

定义 设有复变数 $z=x+iy$ 的集合 D. 如果存在某一法则，对于 D 内的每一个复数 z，按照这一法则，有一个或多个复数 $w=u+iv$ 与之对应，那么，称复变数 w 是复变数 z 的函数，记作 $w=f(z)$，如果 z 的一个值对应着一个 w 值，则称函数 $f(z)$ 是**单值的**，如果 z 的一个值对应着两个或两个以上的 w 值，则称函数 $f(z)$ 是多值的. D 中 z 所对应的一切 w 值的集合 G 称为**函数值集合**.

D 常常是平面区域，称之为函数的**定义域**. 在以后，如无特别声明，所讨论的都是单值函数.

由于复数 $z=x+iy$ 对应着一对实数 x,y；复数 $w=u+iv$ 亦对应着一对实数 u,v，因而，给出函数关系 $w=f(z)$，便相当于给出了两个二元实函数 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$；反之，如果给出了两个二元实函数 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$，那末，$w=u(x,y)+iv(x,y)$ 便是 $z=x+iy$ 的一个复变函数 $w=f(z)$.

例如，复变函数 $w=z^2$，由于 $z=x+iy$，那末，

$$w=z^2=(x+iy)^2=(x^2-y^2)+2xyi.$$

可见，函数 $w=z^2$ 对应两个二元函数 $u=x^2-y^2$ 和 $v=2xy$.

由上所述，研究复变函数 $w=f(z)$ 可以化为研究一对实二元函数. 在《高等数学》中，我们常把函数用几何图形来表示，这可以直观地帮助我们理解和研究函数的性质. 对于复变函数 $w=f(z)$，因为复数的几何表示是复平面上的点，所以，复变函数 $w=f(z)$ 在几何上给出了 z 平面上点集 D(函数的定义集合)到 w 平面上的点集 G(函数值集合)的对应关系：对于点集 D 中的每一点