微积分和数学分析引论

第一卷 第一分册

R. 柯朗 F. 约翰 著

科 学 出 版 社

微积分和数学分析引论

第一卷 第一分册

R. 柯朗 F. 约翰 著

张鸿林 周民强 译

科学出版社

1979

内 容 简 介

柯朗的《数学分析引论》一书系统地阐述了微积分学的基本理论及其应用．在叙述上，作者尽量作到严谨而又通俗易懂，并指出概念之间的内在联系和直观背景．原书分两卷，第一卷为单变量情形，第二卷为多变量情形．

第一卷中译本分两册出版．本书为第一卷第一分册．第一章引论包括数、函数、极限和连续性的概念；第二章介绍微分学和积分学的基本概念；第三章为微分和积分的基本运算．各章后面有补篇、附录和大量的例题、习题．它们有助于深入理解本书的内容．

读者对象为理工科大学师生、数学工作者和工程技术人员．

R. Courant F. John

INTRODUCTION TO CALCULUS AND ANALYSIS

Volume 1

John Wiley and Sons, Inc.

微积分和数学分析引论

第一卷 第一分册

R. 柯朗 F. 约翰 著

张鸿林 周民强 译

*

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1979年10月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1979年10月第一次印刷 印张：11 1/4

印数：0001—87,550 字数：291,000

统一书号：13031・1062

本社书号：1493・13—1

定价： 1.40 元

序　　言

十七世纪后期，出现了一个崭新的数学分支——数学分析．它在数学领域中占据着主导地位．这种新数学思想的特点是，非常成功地运用了无限过程的运算即极限运算．而其中的微分和积分这两个过程，则构成系统微分学和积分学（通常简称为微积分）的核心，并奠定了全部分析学的基础．

当时的知识界人士立即觉察到了这些新发现和新方法的重要性，并深感震惊．然而在开始时，要掌握这一强有力的技术，是非常艰难的任务．因为那时可见到的出版物又少又不完整，还往往阐述得不清楚．所以，新领域的先驱们很快就认识到必须编写教科书，以便使更多的读者能易于接受这门学问，而不象早期只是少数知识界名流熟悉它．这件事对于数学乃至一般科学来说，确实是大有好处的．近代最大的数学家之一——L. 欧拉（Euler），在他的一些导引性的著作中，就曾建立起牢固的传统体例．后来虽然在内容的澄清和简化方面作了许多改进，但是十八世纪的那些著作至今仍然具有启发性．

自欧拉以后，继起的著作家们总是把微分学与积分学分开来论述，从而就掩盖了一个关键性问题，即微分和积分之间的互逆关系．只是到了 1927 年，R. 柯朗的《Vorlesungen über Differential und Integralrechnung》一书德文第一版（Springer 出版社）发行以后，这种隔离才消除了，微积分才成为一门统一的学问．

现在这本书的由来，要从上述德文著作及其相继的版本谈起．由于詹姆斯（James）和 V. 麦克沙恩（McShane）的合作，对原著作了重大增订后的英文版《Calculus》一书，自 1934 年起由格拉斯哥的 Blackie and Sons 出版社编辑出版了，并经 Interscience-Wiley 出版社大量翻印在美国发行．

这些年来，由于美国的大学和学院教学上日益明显的需要，期望对此著作进行改写．但是，因为原书至今仍在使用和保持着生命力．所以修补原来的译本看来并不是一个好方案．

更为可取的做法是不去试图改编已有的著作，而是用一本全新的书来补充它．这本新书应在许多方面都同欧洲的原著有关联，但要更加明确地针对美国目前的和将来的大学生的需要．当 F. 约翰答应同 R. 柯朗一起来写这本新书时，这一计划才成为现实．（在编辑前书的英文版时，F. 约翰曾给予过很大的帮助．）

本书在形式和内容方面虽与原书显著不同，但都产生于同一的意愿，即直接把学生引向这门学科的核心，并为他们去积极运用所学到的知识做好准备．本书避免教条式的文风，因为那样的文风不利于揭示微积分在直观现实中使之发生的动力和根源．同时，阐明数学分析与其各种应用之间的相互作用，并强调感性认识的意义，仍然是我们这本新书的重要目的．当然，我们也希望能稍微加强一些严格性，这并不妨碍前一目的．

数学，作为一种自封的、一环接一环的真理系统，而不涉及其起因和目的，也是有着它的诱惑力的，并且还能满足某种哲学上的需要．但是，这种在学科本身中作内省的态度和方法，对于那些想要获得独立的智能而不要训条式的教导的学生们是不适宜的；不顾及应用和直观，将导致数学的孤立和衰退，因此，使学生和教师们不受这种自我欣赏的纯粹主义的影响，看来是非常重要的．

本书是为各种程度的学生、数学家、科学家和工程师而写的．我们并不想掩饰困难，以造成这一门学问不难掌握的假象，而宁可从整体上阐明其内在联系和总目的来试图帮助真正有兴趣的读者．

由于对基本性质的冗长讨论会妨碍读者接触丰富的事实，我们有时将这种讨论推置于各章的补篇中．

在各章的末尾附有大量的例题和问题，有些一时不易解答，有些甚至很困难；其中大多数是对正文材料的补充．在附加部分，收集了更多的一般常用的问题和习题，并且给出答案或解法提

示[1]．

许多同事和朋友对本书都曾给予帮助．A. A. 布兰克(Blank)不但提出过许多尖锐而富有建设性的批评，并且在整理、增加和精选问题和练习时也起了重要作用．此外，他还承担了编写附加部分的主要任务．在本书各方面的准备工作中，A. 斯洛蒙(Slomon) 曾给予大量的无私而有效的帮助．还要感谢 C. 约翰(John)，A. 拉克斯 (Lax)，R. 理奇特米厄 (Richtmyer)，以及其他朋友，包括詹姆斯和 V. 麦克沙恩．

第一卷主要论及单变量函数，而第二卷将讨论多变量函数的微积分的各分支理论．

最后有一点请学生读者注意，要想一页一页地、毫不费力地学习这样一本书来精通这一学科，可能遭到失败．只有首先选择一些捷径，再反复地回来钻研同样一些问题和难点，才能从更高的观点得到较深刻的理解．

有些段落，读者在第一次学习时可能会遇到障碍，我们均用星号标出以示提醒．还有些比较困难的问题，也加上星号予以指明．

我们希望目前这本新的著作，对于年轻的一代科学家将有所助益．我们深知本书有许多不足之处，因此，诚恳地欢迎批评指正，这对于本书今后的修订会有好处．

R. 柯朗，F. 约翰

1965 年 6 月

1)这部分内容，由 A. A. 布兰克写成单行本《Problem in Calculus and Analysis》出版．——译者注

目　录

第一章　引言 ………………………………………………… 1

1.1　实数连续统 ………………………………………………… 1

a. 自然数系及其扩充．计数和度量(2)　b. 实数和区间套(7)　c. 十进小数．其他进位制(9)　d. 邻域的定义(13)　e. 不等式(13)

1.2　函数的概念 ………………………………………………… 18

a. 映射——图形(20)　b. 连续变量的函数概念的定义．函数的定义域和值域(23)　c. 函数的图形表示．单调函数(26)　d. 连续性(31)　e. 中间值定理．反函数(46)

1.3　初等函数 ………………………………………………… 49

a. 有理函数(49)　b. 代数函数(50)　c. 三角函数(51)　d. 指数函数和对数函数(52)　e. 复合函数．符号积．反函数(54)

1.4　序列 ………………………………………………… 57

1.5　数学归纳法 ………………………………………………… 58

1.6　序列的极限 ………………………………………………… 63

a. $a_n=\frac{1}{n}$(63)　b. $a_{2m}=\frac{1}{m}$; $a_{2m-1}=\frac{1}{2m}$(64)　c. $a_n=\frac{n}{n+1}$(65)　d. $a_n=\sqrt[n]{p}$(66)　e. $a_n=\alpha^n$(67)　f. a^n和$\sqrt[n]{p}$的极限之几何解释(68)　g. 几何级数(70)　h. $a_n=\sqrt[n]{n}$(72)　i. $a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$(72)　j. $a_n=\frac{n}{\alpha^n}$，其中$\alpha>1$(73)

1.7　再论极限概念 ………………………………………………… 73

a. 收敛和发散的定义(73)　b. 极限的有理运算(75)　c. 内在的收敛判别法．单调序列(76)　d. 无穷级数及求和符号(78)　e. 数e(81)　f. 作为极限的数π(84)

1.8　连续变量的函数的极限概念 ……………………………85
a. 初等函数的一些注记(90)
补篇……………………………………………………………92
S1　极限和数的概念 ……………………………………93
a. 有理数(94)　b. 有理区间套序列定义实数(95)　c. 实数的顺序、极限和算术运算(97)　d. 实数连续统的完备性. 闭区间的紧致性. 收敛判别法则(100)　e. 最小上界和最大下界(103)　f. 有理数的可数性(104)
S2　关于连续函数的定理 ……………………………105
S3　极坐标 ………………………………………………108
S4　关于复数的注记 ……………………………………109
问题 ……………………………………………………………112

第二章　积分学和微分学的基本概念 ……………………127

2.1　积分 …………………………………………………128
a. 引言(128)　b. 作为面积的积分(129)　c. 积分的分析定义. 表示法(131)
2.2　积分的初等实例 ……………………………………136
a. 线性函数的积分(136)　b. x^2 的积分(138)　c. x^α 的积分(α是不等于-1的整数)(139)　d. x^α 的积分 (α是不等于-1的有理数)(142)　e. $\sin x$ 和 $\cos x$ 的积分(143)
2.3　积分的基本法则 ……………………………………145
a. 可加性(145)　b. 函数之和的积分. 函数与常数乘积的积分(146)　c. 积分的估值(148)　d. 积分学中值定理(149)
2.4　作为上限之函数的积分——不定积分 ……………152
2.5　用积分定义对数 ……………………………………154
a. 对数函数的定义(154)　b. 对数的加法定理(156)
2.6　指数函数和幂函数 …………………………………159
a. 数 e 的对数(159)　b. 对数函数的反函数. 指数函数(160)　c. 作为幂的极限的指数函数(162)　d. 正数的任意次幂的定义(162)　e. 任何数为底的对数(163)

2.7 x 的任意次幂的积分 ……164
2.8 导数 ……165
a. 导数与切线(166) b. 作为速度的导数(172) c. 微分法举例(174) d. 一些基本的微分法则(176) e. 函数的可微性和连续性(177) f. 高阶导数及其意义(180) g. 导数和差商. 莱布尼兹表示法(182) h. 微分学中值定理(184) i. 定理的证明(186) j. 函数的线性近似. 微分的定义(190) k. 关于在自然科学中的应用的一点评述(195)
2.9 积分、原函数和微积分基本定理 ……196
a. 不定积分的导数(196) b. 原函数及其与积分的关系(198) c. 用原函数计算定积分(201) d. 例(202)
补篇 连续函数的定积分的存在性 ……204
问题 ……207

第三章 微分法和积分法 ……214

第一部分 初等函数的微分和积分 ……214
3.1 最简单的微分法则及其应用 ……214
a. 微分法则(214) b. 有理函数的微分法(217) c. 三角函数的微分法(218)
3.2 反函数的导数 ……219
a. 一般公式(219) b. n 次幂的反函数: n 次根(222) c. 反三角函数——多值性(224) d. 相应的积分公式(228) e. 指数函数的导数与积分(230)
3.3 复合函数的微分法 ……230
a. 定义(230) b. 链式法则(231) c. 广义微分学中值定理(235)
3.4 指数函数的某些应用 ……236
a. 用微分方程定义指数函数(237) b. 连续复利. 放射性蜕变(237) c. 物体被周围介质冷却或加热(239) d. 大气压随地面上的高度的变化(239) e. 化学反应过程(241) f. 电路的接通或切断(241)
3.5 双曲函数 ……242

a. 分析的定义(242) b. 加法定理和微分公式(245) c. 反双曲函数(246) d. 与三角函数的其他相似性(248)
3.6 最大值和最小值问题 ……250
a. 曲线的下凸和上凸(250) b. 最大值和最小值——极值问题. 平稳点(252)
3.7 函数的量阶 ……263
a. 量阶的概念. 最简单的情形(263) b. 指数函数与对数函数的量阶(264) c. 一点注记(267) d. 在一点的邻域内函数的量阶(267) e. 函数趋向于零的量阶(268) f. 量阶的"O"和"o"表示法(269)
附录 ……271
A1 一些特殊的函数 ……272
a. 函数 $y=e^{-\frac{1}{x^2}}$(272) b. 函数 $y=e^{-\frac{1}{x}}$(273) c. 函数 $y=\tanh\frac{1}{x}$(274) d. 函数 $y=x\tanh\frac{1}{x}$(275) e. 函数 $y=x\sin\frac{1}{x}$, $y(0)=0$(275)
A2 关于函数可微性的注记 ……276
第二部分 积分法 ……278
3.8 初等积分表 ……280
3.9 换元法 ……281
a. 换元公式. 复合函数的积分(281) b. 换元公式的另一种推导方法(286) c. 例. 积分公式(287)
3.10 换元法的其他实例 ……288
3.11 分部积分法 ……292
a. 一般公式(292) b. 分部积分的其他例子(294) c. 关于 $f(b)+f(a)$ 的积分公式(296) d. 递推公式(296) e. π的瓦里斯(Wallis)无穷乘积(298)
3.12 有理函数的积分法 ……300
a. 基本类型(301) b. 基本类型的积分(303) c. 部分分式(304) d. 分解成部分分式举例. 待定系数法(307)
3.13 其他几类函数的积分法 ……310

a. 圆和双曲线的有理表示法初阶(310) b. $R(\cos x, \sin x)$的积分法(312) c. $R(\cosh x, \sinh x)$ 的积分法(314) d. $R(x, \sqrt{1-x^2})$的积分法(314) e. $R(x, \sqrt{x^2-1})$ 的积分法(314) f. $R(x, \sqrt{x^2+1})$ 的积分法(315) g. $R(x, \sqrt{ax^2+2bx+c})$的积分法(315) h. 化为有理函数积分的其他例子(316) i. 注记(317)

第三部分 积分学的进一步发展 ……318

3.14 初等函数的积分 ……318

a. 用积分定义的函数．椭圆积分和椭圆函数(318) b. 关于微分和积分(321)

3.15 积分概念的推广 ……321

a. 引言． 广义积分的定义(321) b. 无穷间断的函数(323) c. 作为面积的解释(325) d. 收敛判别法(325) e. 无穷区间上的积分(327) f. 伽玛函数(329) g. 狄里克莱(Dirichlet)积分(330) h. 变量置换．菲涅耳(Fresnel)积分(332)

3.16 三角函数的微分方程 ……333

a. 关于微分方程的初步说明(333) b. 由微分方程和初始条件定义的 $\sin x$ 和 $\cos x$ (334)

问题 ……336

第一章 引 言

自古以来，关于连续地变化、生长和运动的直观概念，一直在向科学的见解挑战. 但是，直到十七世纪，当现代科学同微分学和积分学(简称为微积分)以及数学分析密切相关地产生并迅速发展起来的时候，才开辟了理解连续变化的道路.

微积分的基本概念是导数和积分：导数是对于变化速率的一种度量，积分是对于连续变化过程总效果的度量. 正确理解这些概念以及由此产生的大量丰富成果，有赖于对极限概念和函数概念的认识，而极限和函数的概念又基于对数的连续统的了解. 只有越来越深刻地洞察微积分的实质，我们才能逐渐地赏识其威力和价值. 在引言这一章里，我们将阐明数、函数和极限的概念. 首先作一简单而直观的介绍，然后再仔细论证.

1.1 实数连续统

正整数或自然数1,2,3,……这些抽象的符号，是用来表示在离散元素的总体或集合中具有"多少个"对象.

这些符号完全不涉及所计数的对象的具体性质，不管它们是人，是原子，是房子，还是别的什么.

自然数是计算一个总体或"集合"中元素的一种合适工具. 但是，为了达到一个同等重要的目的，如度量曲线的长度、物体的体积或重量等这样一些量，自然数便不够用了. 我们不能直接用自然数来回答"是多少？" 这一类的问题. 由于极其需要用我们称之为数的事物来表示各种量的度量，我们就不得不将数的概念加以扩充，以便能够描述度量的连续变化. 这种扩充了的数系称为数的连续统或"实数"系. (这是一个未加说明但一般都认可的名称.) 数的概念向连续统概念的扩充是如此自然而令人信服，以致所有

早期的大数学家和科学家都毫无疑议地予以采用.直到十九世纪，数学家们才感到必须为实数系寻求一个比较可靠的逻辑基础.随后产生的对上述概念的正确表述，反过来又导致数学的进步.我们将首先从不难理解的直观描述入手，然后给出实数系的比较深入的分析[1].

a. 自然数系及其扩充. 计数和度量

自然数和有理数. 对于我们来说，“自然”数序列1，2，3，…认为是已知的. 我们不需要从哲学的观点来讨论这些抽象的事物——数——究竟属于怎样的范畴，对于数学工作者，以及对于任何同数打交道的人来说，重要的只是要知道一些规则或定律，根据这些规则或定律可将一些自然数组合起来而得到另一些自然数. 这些定律构成在十进位制中那些熟知的关于数相加和相乘的法则的基础；它们包括**交换律**: $a+b=b+a$ 和 $ab=ba$，**结合律**: $a+(b+c)=(a+b)+c$ 和 $a(bc)=(ab)c$，分配律: $a(b+c)=ab+ac$，相消律: 如果 $a+c=b+c$，则可推出 $a=b$，等等.

逆运算——减法和除法——在自然数集合中并不总是可能的；从 1 减去 2 或者用 2 来除 1 所得的结果不能仍属于自然数集合. 为了使这些运算能够不受限制地进行，我们不得不发明数 0，“负”整数和分数来扩充数的概念. 所有这些数的全体，称为**有理数**系或有理数集合；有理数全都可以由 1 经过“有理运算”，即加法、减法、乘法和除法而得到[2].

有理数总可以写为$\frac{p}{q}$的形式，这里 p 和 q 都是整数，并且$q\neq 0$. 我们还能使这种表示是唯一的，只须要求 q 是正的，而 p 和 q

---

1) 更全面的解释见 Courant and Robbins, What is Mathematics(数学是什么)? Oxford University Press, 1962.

2) “有理 (rational)” 一词，在这里不是指合理或合逻辑的意思，而是从“比(ratio)” 一词派生出来的，即关于两个量的比.

没有大于 1 的公因子.

在有理数域内,一切有理运算——加法、乘法、减法和除法(用零作除数除外)——都能够实行,而且得到的仍然是有理数. 正如我们从初等算术所知,有理数运算所服从的定律同自然数的运算是一样的: 因此,有理数是以完全直接的方式扩充了正整数系.

有理数的图形表示. 有理数通常可用直线 L ——数轴——上的点形象地表示出来. 将 L 上的任意一点取作原点或点 0, 将另外任意一点取作 1,这时,我们采用这两点之间的距离作为度量的尺度或单位,并且将从 0 到 1 的方向定义为"正方向",并称这样规定了方向的直线为有向直线. 习惯上,画数轴 L 时应使得点 1 在点 0 的右边(图 1.1). L 上任何一点 P 的位置由两个因素——由

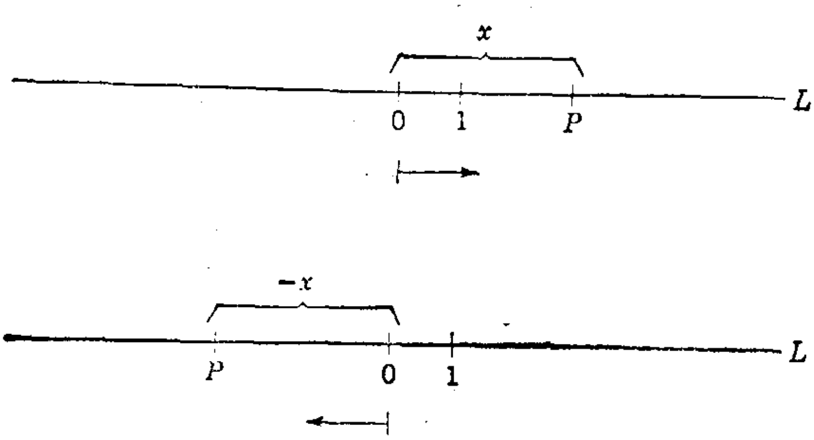

图 1.1 数 轴

原点 0 到 P 的距离和由原点 0 到 P 的方向(指向 0 的右边还是左边)——完全确定. L 上表示正有理数 x 的点 P 是在 0 的右边与 0 的距离为 x 个单位之处. 负有理数 x, 则由 0 的左边距离 0 为 x 个单位的点来表示. 在上述两种情况下, 从 0 到表示 x 的点之间的距离均称为 x 的绝对值,记为 $|x|$,于是我们有

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{如果 } x \text{ 为正或零}, \\ -x, & \text{如果 } x \text{ 为负}. \end{cases}$$

我们注意, $|x|$ 决不会是负数,并且仅当 $x = 0$ 时才等于零.

由初等几何我们想到,用直尺和圆规作图,可将单位长度分割

为任意个相等的部分．由此可见，任何用有理数表示的长度都能画出，所以，表示一个有理数 x 的点能用纯几何方法找到.

按这种方式，通过 L 上的点——有理点，我们得到有理数的一种几何表示．同对于点 0 和点 1 的表示法相一致，我们可采用同样的符号 x 既表示有理数，又表示它在 L 上所对应的点.

两个有理数的关系式 $x<y$，其几何意义是：点 x 处于点 y 的左边，在此情况下，这两点之间的距离是 $y-x$ 个单位．如果 $x>y$，则距离是 $x-y$ 个单位．无论哪种情况，L 上的两个有理点 x，y 之间的距离均为 $|y-x|$ 个单位，并且仍然是有理数.

L 上端点为 a，b 的线段，这里 $a<b$，称为区间．端点为 0，1 的特定线段称为单位区间．如果两端点包括在区间之内，我们就说该区间是闭的；如果两端点不包括在内，就说该区间是开的．开区间用 (a, b) 来表示，是由满足关系式 $a<x<b$ 的点 x，即处于 a 和 b"中间"的那些点组成的．闭区间用 $[a, b]$ 来表示，是由满足关系式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的点组成的[1]．在上述两种情况下，区间的长度均为 $b-a$.

对应于整数 0，±1，±2，… 的各点，将数轴分割为一系列单位长度的区间．L 上的每一个点，或者是这样分割的区间之一的端点，或者是其内部的点．如果再把每一个区间分割为 q 个相等的部分，我们就把 L 分割成一系列长度为 $\frac{1}{q}$ 的区间，区间的端点为 $\frac{p}{q}$ 的有理点．于是，L 上的每一点 P，或者是形式为 $\frac{p}{q}$ 的有理点，或者处于两个相继的有理点 $\frac{p}{q}$ 和 $\frac{p+1}{q}$ 之间（见图 1.2)．因为相继的两个分点距离为 $\frac{1}{q}$ 个单位，所以，我们能够找到一个有理点 $\frac{p}{q}$，这个有理点同点 P 的距离不超过 $\frac{1}{q}$ 个单位．我们只要将 q 取成足

1）我们将关系式 $a\leqslant x$（读作"a 小于或等于 x"）解释为"或者 $a<x$，或者 $a=x$"．对于二重符号 $\geqslant$ 和 $\pm$，我们也用类似的方式来解释.

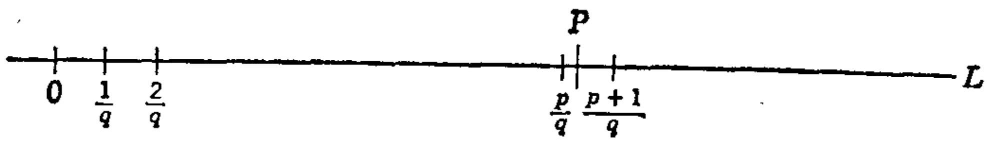

图 1.2

够大的正整数，则能使数$\frac{1}{q}$想要多么小就可多么小．例如，取$q=10^n$（这里n为任一自然数），我们就能求得一个"十进小数"$x=\frac{p}{10^n}$，同P的距离小于$\frac{1}{10^n}$．至此，虽然我们并未断言L上的每一个点都是有理点，但是至少我们已看到，能够求得一些有理点，任意地接近L上的任何一点P．

稠密性

L上的给定点P能够用有理点来任意逼近这一事实，可以用一句话来表达：有理点在数轴上是稠密的．显然，甚至一些较小的有理数的集合也是稠密的，例如，所有形如$x=\frac{p}{10^n}$的点，其中n为自然数，p为整数．

稠密性表明，在任何两个不同的有理点a和b之间，存在着另外的无穷多个有理点，特别是，a和b之间的中点，$c=\frac{a+b}{2}$，即数a和数b之间的算术平均值，仍是有理点．再取a和c的中点，b和c的中点，并且按这种方式继续进行下去，我们能够在a和b之间求得任意多个有理点．

我们可以用有理点来接近L上任意点P的位置，并且能够达到任何精确度．因此，初看起来，似乎是只要引入有理数，用数来确定点P的位置这个任务便已完成．在物理的现实中，各种量毕竟不能绝对精确地给出或求得，而总会带有某种程度的不确定性；所以，也就可以认为各种量可用有理数来度量．

不可通约量．虽然有理数是稠密的，但是，作为用数来建立度量的理论基础，有理数还是不够的．两个量，如果其比是有理数，则称为可通约的，因为可将它们表示为某同一单位的整数倍．早

在公元前五或六世纪，希腊的数学家和哲学家已经有了惊人的、影响深远的发现：存在着一些量，这些量同给定的单位是不可通约的．特别是，存在着一些线段，这些线段不是一个给定单位线段的有理数倍．

不难给出与单位长度是不可通约的线段长度的一个例子：各边为单位长度的正方形之对角线 l．因为，根据毕达哥拉斯（Pythagoras）定理[1]，这个长度 l 的平方必须等于 2．所以，如果 l 是有理数，因而等于 $\frac{p}{q}$，这里 p 和 q 均为正整数，我们将有 $p^2 = 2q^2$．我们可以约定 p 和 q 没有公因子，因为这样的公因子在开始时就可以约掉．根据上述方程，p^2 是偶数；因此 p 本身也必定是偶数，譬如说 $p = 2p'$．用 $2p'$ 来代替 p，我们得到 $4p'^2 = 2q^2$，或者 $q^2 = 2p'^2$；因而，q^2 是偶数，于是 q 也是偶数．这就表明 p 和 q 二者具有公因子2．然而，这同我们所作的 p 和 q 没有公因子的约定相矛盾．这一矛盾是由于假设对角线长能够表示为分数 $\frac{p}{q}$ 引起的，所以这一假设是错误的．

这一用反证法推导的例子，表明符号 $\sqrt{2}$ 不能对应于任何有理数．另一个例子是 π——圆的周长与其直径之比．证明 π 不是有理数要复杂得多，并且直到近代才做到［兰伯特（Lambert），1761］．不难找到其他许多不可通约的量（见问题 1，第 112 页）；事实上，不可通约的量在某种意义上远比可通约的量更为普遍（见第 105 页）．

无理数

因为有理数系对于几何学来说是不够的，所以必须创造新的数作为不可通约量的度量：这些新的数称为“无理数”．古希腊人并不注重抽象的数的概念，而是把诸如线段这样一些几何实体看作为基本元素．他们用纯几何的方法发展出不但用来运算和处理

1）即勾股定理．——译者注