林振山 著

气候建模·诊断和预测的研究

气象出版社

国家基础性研究重大关键项目
国家自然科学基金项目 资助

气候建模·诊断和预测的研究

林振山 著

气象出版社

(京)新登字 046 号

内 容 简 介

本书是作者 1991 年以来负责国家自然科学基金项目“利用资料重建大气动力模式试验”、“统计-动力气候理论研究和模拟、小波气候诊断”及国家基础性研究重大关键项目专题“非线性气候系统的多平衡态、突变及其模拟和预测”研究工作的部分成果。内容涉及理论气候建模、小波气候诊断、统计-动力气候和气候预测四个方面。

本书论述深刻透彻，方法新颖独特，力求做到深入浅出，易于掌握应用。适合于大气科学高年级师生及从事气候理论研究和预测的科研、业务部门的科技人员。也适合于从事资料分析、预测及有关专业的研究人员。

图书在版编目(CIP)数据

气候建模·诊断和预测的研究/林振山著. —北京：气象出版社，1996.10
ISBN 7-5029-2191-5

Ⅰ.气… Ⅱ.林… Ⅲ.①气候模拟-研究②气候资料-诊断-研究 Ⅳ.P46

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 15482 号

气候建模·诊断和预测的研究

林振山 著

国家基础性研究重大关键项目“气候动力学和气候预测理论的研究”
国家自然科学基金项目“统计-动力气候的理论研究和模拟” 资助

责任编辑：陶国庆 终审：周诗健
责任校对：谷 青 责任技编：席大光 封面设计：

* * *

气象出版社 出版
（北京海淀白石桥路 46 号 邮政编码：100081）
北京怀柔新华印刷厂印刷
新华书店总店科技发行所发行 全国各地新华书店经销

* * *

开本：850×1168 1/32 印张：9.625 字数：250 千字
1996 年 10 月第一版 1996 年 10 月第一次印刷
印数：1—1000 定价：14.50 元
ISBN 7-5029-2191-5/P·0811

前　言

自 1991 年 7 月在北京大学(地球物理系大气物理专业)获理学博士学位后来南京大学大气科学系任教以来,本人一直得到我国许多著名的大气科学家的关怀和扶持,深以为幸,深以为荣。还记得,本人刚在天气动力专业任教一个月,该教研室的前辈科学家黄仕松先生和伍荣生先生便力荐本人参加国家基础性研究重大关键项目的研究。在曾庆存院士、丑纪范院士、周秀骥院士和我的导师刘式达先生等老一辈科学家的支持下,本人有幸成为“动力气候学与气候预测理论研究”项目的一名青年专题专家,负责“非线性气候系统的多平衡态、突变及其模拟和预测”专题的研究工作。而后,在国家自然科学基金委员会的支持下,本人又有幸主持了“利用资料重建大气动力模式试验”和“统计-动力气候的理论研究和模拟”两个项目。从此,“半路出家”的我步入了大气科学的殿堂。

交渊博友如读异书史记;交风雅友,如读名诗佳作;交谨饬友,如读四书五经。纵观我国大气科学界莘莘学子,我是极其幸运的。因为,我比他人拥有更多的导师。在攻读硕士学位时,我有幸同时成为我国著名统计物理学家李湘如教授和气象学家侯赣生教授的学生。在攻读博士学位时,我则有幸同时拜赵柏林先生、陈家宜先生和刘式达先生为导师。先生们严谨、务实、博学、善思的治学态度和截然不同的研究方向、思维方式、科研手段,使我终身受益匪浅。受其影响,当时我曾立下了“博览、精研、悟理、立新”之座右铭。不仅如此,在我“出家”的途中,我还正式非正式地拜了不少的大家名师,他们是:曹鸿兴先生、严绍瑾先生、彭永清先生、杨培才先生、王绍武先生、郑祖光先生、丑纪范先生、周秀骥先生、黄荣辉先生和伍荣生先生。正是在老师们及许多老一辈科学家的悉心指导和热情关怀下,我有幸用较短的时间走过了从助教、讲师到副教授和教授的漫长路程。回首往事,拳拳师生之情,已是尺素难尽。然而,在学

术上，本人至今仍浮光掠影，无所建树，愧为门下。

1986 年弃理学而尊地学的原因在于以为地学较理学容易，大气科学较理论物理直观。现在看来，十分的可笑。毋庸讳言，仅气候学这一专业，其博大深邃足已令人望而却步。所幸青少年时历尽艰辛，酿就了闲云野鹤般的淡泊心境和钢铁一般的坚硬毅力，使我至今尚能锲而不舍。

自 1974 年引入气候系统这一概念以来，气候学已经不再是过去常常被作为气象学或地理学的一个分支的经典气候学了，而是大气科学、海洋学、地球物理、地球化学、地理学、天文学、冰川学、生物学等众多学科相互渗透、共同研究的交叉科学。

80 年代以前，形成两大数学体系：确定性论和概率论。与之对立形成了动力气候和统计气候。80 年代以来，数理学家发展了非线性科学——浑沌理论。浑沌研究大千世界中复杂奇妙现象，独步经典科学之外，另辟蹊径。浑沌学改变了科学世界的图景，认为世界是一个有序与无序的统一，稳定性与不稳定性的统一，完全性与不完全性的统一，自相似性与非自相似性的统一。浑沌理论架起了从确定性论到概率论之间的桥梁。既然非线性确定系统有不确定行为，那么概率论应该包括研究复杂非线性确定系统的动力行为。所以，未来的统计气候学应该包括研究非线性动力系统的统计动力特征及其物理空间的拓扑结构。

动力气候学的优点在于它充分考虑了系统的动力学机制和过程，但它除了完全依赖于计算机的发展这一缺点外，还忽视或不够重视可视为系统特解的大量的观测资料。能否基于大量的资料而又结合动力气候学的优点来研究气候呢？

本世纪 70 年代至 80 年代中期，是统计气候学的鼎盛时期。然而，随着动力气候的崛起和发展，统计气候学每况愈下。究其原因有二：一是在过去的几十年里，统计气候学是在 $t-r$ 空间里，对气候现象和观测资料进行研究的，它忽视了气候系统的物理规律，属于“现象学”范畴，无法研究气候系统的动力学特性；二是传统的统

计建模方法又带有显著的主观因素。这就提出了如何扬弃统计气候学这一课题。

气候学之精髓在于建模、诊断理论研究和预测。所以,要扬弃统计气候学,其途径不外乎这三个方向。故自 1991 年以来,本人就结合有关国家科研课题而孜孜不倦地耕耘在这三个领域里。此书亦是为此而著的,希望能收到抛砖引玉之效。只是外行著书,多半弄巧成拙。在本书付印之际,已与当初构思时的那种踌躇满志大相径庭。更无当年那种"古人借酒留美名,我饮东海笑斗小"之豪情。人到中年,做学问难,做大气科学的学问更难。此书虽是本人近 6 年来的工作总结,萃取于作者已发表的 60 余篇论著里,然而还是得意的少,不满的多。盖因作者学识浅薄,水平有限,时间亦仓促而已。挟泰山以超北海,非不为也,是不能也。

本书共五章。第一章为数理基础;第二章为理论气候学的基本研究;第三章为小波气候诊断技术的初步研究;第四章为统计-动力气候的初步研究;第五章为气候预测新技术的探讨。仅从这些章节的名称来看就可以知道,该书所论述的观点、理论、方法和技术都只是个开端。事实上,本人亦计划在"九五"期间再著书三部:《小波气候诊断技术》、《气候预测新技术的研究》及《气候建模的研究》。本书虽有四部分主要章节,但它们之间的内容却只有气候建模、气候诊断和气候预测三个方面,并互相通融,互相呼应,没有明确界限。但由于属于前沿研究及作者水平所限,难免有许多谬误与不当之处,敬请读者不吝赐教,不胜感激。

十分感谢彭永清先生及博士研究生尤卫红高级工程师、乐群同学及朱焰宇硕士、邓自旺硕士,他们参加了本书有关章节的研究和撰写工作。其中朱焰宇参加 § 4.1、§ 4.8 和 § 5.9 的研究和撰写工作;邓自旺参加 3.3.2、§ 3.4 及 3.6.1 的研究工作;尤卫红参加 § 3.7 和 § 5.5 的研究与撰写工作,丛峰参加 § 3.5 的部分研究工作;彭永清参加 § 5.2 和 § 5.8 的研究及撰写工作。特在此对上述同仁、本科研小组成员及一直关心、支持本书撰写及研究工作的伍

荣生先生和倪允琪先生表示衷心的感谢。

本书所涉及的研究工作自始至终得到丑纪范先生、刘式达先生的悉心指导和曾庆存先生的大力扶持，并一直得到陈家宜先生、王绍武先生和黄思训先生的大力支持。谨申谢悃！

十分感谢曾庆存先生为本书的出版增拨专款资助，并感谢国家自然科学基金委员会的资助。谨表谢忱！

林振山

1996 年春节于南京大学契阔斋

目　　录

第一章 基本数理知识

传统的数学体系有确定性论和概率论。确定性论认为,只要已知所有系统的初始条件,就可以从确定性方程算出将来的一切,而且系统演化轨迹的变化与其初始条件的改变遵从数学上的 δ-ε 关系。与此相反的是概率论的“一多因果对应”关系。近代混沌理论的诞生,使我们发现在概率论和确定论描述之间,存在着由此及彼的桥梁。

混沌理论研究大千世界中的复杂奇妙现象,独步经典科学之外,另辟蹊径。混沌学改变了科学世界的图景,认为世界是一个有序与无序的统一,稳定性与不稳定性的统一,完全性与不完全性的统一,确定性与随机性的统一,自相似性与非自相似性的统一。

理论气候学是大气科学、海洋学、地球物理、地球化学、天文学、生物学等众多学科相互渗透的交叉科学,其发展必将受到自然科学,特别是数学和物理学发展水平的制约和推动。

§1.1 谱技术和谱模式基础

在理论气候的研究中,谱技术是常用的工具之一。为此,有必要对其进行全面回顾。与有限差分等数值模拟方法相比,谱技术的特点在于应用了正交函数,如三角函数、球谐函数等。这不仅因为这些函数求导时容易并且准确,还因为这些函数可以较直观地描述物理场的分布。而对特定问题所应选择什么基本函数的类型通常则取决于相应的几何条件。由于大气流越全球,故代表全球大气场的函数类型最好是用纬度、经度以及离地球中心距离确定变量的球坐标系统,即采用球面基本函数。

选用为谱展开的特征化数都应具有正交性和完备性。正交性

指的是两个函数乘积的积分为零：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x)\varphi_m(x)\mathrm{d}x = C_n\delta_{mn} \tag{1.1}$$

式中

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$$

完备性则表明所要展开的物理量总可以表示为特征向量基函数的一个无穷级数。对大气和海洋现象的谱表达式一般采用有限的，即截断的级数代替无穷级数，截断的阶数视具体问题和要求而异。

1.1.1 Fourier 级数

由于任一物理量都是由无穷个具有不同波数 k 和频率的单波所组成的，所以我们可以把在区间 $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ 的任一周期函数 $f(x)$ 表示为 $(2n+1)$ 项初等三角函数的级数和：

$$f(x) \simeq A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos kx + \sum_{k=1}^{n} B_k \sin kx \tag{1.2}$$

其中：

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x \\ A_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\mathrm{d}x \\ B_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{1.3}$$

或写为复式形式：

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int f(\zeta)e^{ik(x-\zeta)}\mathrm{d}\zeta = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ikx} \tag{1.4}$$

其中：

$$C_k = \frac{1}{2\pi}\int f(\zeta)e^{-ik\zeta}\mathrm{d}\zeta = \begin{cases} \frac{1}{2}(A_k - iB_k) & k > 0 \\ \frac{1}{2}(A_{|k|} + iB_{|k|}) & k < 0 \end{cases} \tag{1.5}$$

1.1.2 谱表达式

以纬度、经度和高度为基础，用球函数表示大气场的方法也受到数值模拟者的关注，然而球面技术有一个主要缺点：就是需要列出非常繁琐的公式去定义各种波动之间的相互作用。球面方法的这一问题令人苦恼了许多年。近些年来，用不直接求出各种波动作用的方法克服了这一障碍，以下以浅水波动方程来阐述该方法的一些基本概念。

简化的浅水波动方程为

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= -g\frac{\partial u}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -g\frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned} \tag{1.6}$$

将连续方程 $\frac{\partial u}{\partial t} = h(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y})$ 转换到球面坐标系

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -H(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{v}{a}\tan\varphi) \tag{1.7}$$

这里的 $(v\tan\varphi/a)$ 项是由球面的几何形状而产生的，而 H 是平均深度，且 $h = H + h'$，$h' < H$。由于 H 是常数，故 h 的时、空导数与 h' 的时、空导数一样。因而在以下的讨论中将略去 h' 的撇号。

由于在球面系统中：

$$\begin{aligned}\partial x &= a\cos\varphi\partial\lambda\\ \partial y &= a\partial\varphi\end{aligned} \tag{1.8}$$

其中 φ 和 λ 分别是纬度和经度，a 为地球半径。将(1.8) 式代入(1.6) 和(1.7) 式有

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{g}{a\cos\varphi}\frac{\partial h}{\partial\lambda}\\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{g}{a}\frac{\partial h}{\partial\varphi}\end{aligned} \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{H}{a\cos\varphi}\left[\frac{\partial u}{\partial\lambda} + \frac{\partial}{\partial\varphi}(v\cos\varphi)\right] \tag{1.10}$$

将(1.10)式对 t 求导，并将(1.9)式代入后得

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = gH\nabla^2 h = c^2\nabla^2 h \tag{1.11}$$

$$\nabla^2 \equiv \frac{1}{a^2\cos^2\varphi}\left[\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\right] \tag{1.12}$$

式中 $c = \sqrt{gh}$，为波动速度。定义位势 $\Phi = gh$，并用球面调和函数来表示位势在 Φ：

$$\Phi = \sum_m \sum_l \Phi_l^m P_l^m e^{im\lambda} \tag{1.13}$$

这里的 P_l^m 为第一类连带 Legendre 多项式。而 m 为东-西行星波数，即绕纬圈的波数。而 $l-m$ 为经圈的波数，它由两极之间的节点数确定。当 m 从低变高时，纬向波数增加，而经向波数减少。

用球谐函数 Y_l^m 表示 $P_l^m(\sin\varphi)e^{im\lambda}$，则(1.13)式的三角形截断形式为

$$\Phi = \sum_{m=-j}^{j} \sum_{l=|m|}^{j} \Phi_l^m Y_l^m \tag{1.14}$$

而菱形截断形式为

$$\Phi = \sum_{m=-j}^{j} \sum_{l=|m|}^{|m|+j} \Phi_l^m Y_l^m \tag{1.15}$$

(1.15)式中的展开系数

$$\begin{cases} \Phi_n^m = \int_{-1}^{1} \Phi^m(\mu) P_l^m(\mu)\mathrm{d}\mu \\ \Phi^m(\mu) = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(\mu,\lambda)e^{-im\lambda}\mathrm{d}\lambda \\ \mu = \sin\varphi \end{cases} \tag{1.16}$$

对于每一个选足的纬圈，可用快速富氏变换(FFT)求得。在离散情况下

$$\Phi^m(\mu) = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\Phi_j(\mu)e^{-i\frac{2\pi}{N}mj} \tag{1.17}$$

其中 N 是沿纬圈所取的点数，当纬向截断波数是 J，即 $|m| \leqslant J$ 时，对 N 的要求是：$N \geqslant 3J+1$。这可避免非线性混淆现象。这是

因为 m 可取 $(2J+1)$ 个，故我们可以看作截断波域中有 $(2J+1)$ 个波在 $m=0$ 为平均态。根据非线性混淆理论，要使 $(2J+1)$ 个波都能真实地表现出来而无混淆，格点数本应取 $2(2J+1)$ 个。但该要求过于严格。事实上只要满足 $2J+1=2N/3$（即 $N\geqslant 3J+1$）即可避免混淆现象。将(1.13)式代入(1.11)式可得

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi_l^m}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{l(l+1)}{a^2}\overline{\Phi}\Phi_l^m=-\omega^2\Phi_l^m \tag{1.18}$$

其中频率

$$\omega^2=\frac{l(l+1)}{a^2}\overline{\Phi} \tag{1.19}$$

式中 $\overline{\Phi}=\overline{gh}$。(1.19)式说明了波的频率仅是 l、地球半径 a 和平均位势的函数，这显然是由于 l 限制了经向和纬向两个水平方向的尺度和大小，故可以不直接考虑 m。

1.1.3　谱变换技术

利用解析球面函数的截断展开式描述大气现象比格点方法的优点明显得多。例如求非正压无辐散模式的谱模式使面积的均方动能和均方涡度守恒，而用某些有限差分方法不能使两个量都守恒。谱模式中的球面映射可以自然地构成比有限差分格式更为一致的格点间距。Silbermam(1954)第一个用谱方法来作气象预报，他将球面函数(1.13)式代入无辐散涡度方程，求得了由于非线性水平平流项而产生的相互作用系数，这些系数代表了一个波与其它波的相互作用。但这种计算十分费时。Orszag 和 Eliassen (1970)提出了谱交换方法，为求解谱方程创造了一个新技术。这里仍将以简化的浅水波方程为例来阐述该方法。

简化的浅水波的动量方程和连续方程的向量形式分别为：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}&=-f\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{V}-\boldsymbol{V}\Phi\\ \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}&=-\Phi\nabla\cdot\boldsymbol{V}\end{aligned} \tag{1.20}$$

$$\nabla = \frac{\boldsymbol{i}}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\lambda} + \frac{\boldsymbol{j}}{a}\frac{\partial}{\partial\varphi} \tag{1.21}$$

由于

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + (\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V} \\ (\nabla\cdot\boldsymbol{V})\boldsymbol{V} &= \nabla\left(\frac{(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V})}{2}\right) + \zeta\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{V} \end{aligned} \tag{1.22}$$

可将(1.20)式重新写为

$$\frac{\partial}{\partial t} = -(\zeta + f)\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{V} - \nabla\left(\Phi + \frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}}{2}\right) \tag{1.23}$$

式中 $\zeta = \boldsymbol{k}(\nabla\times\boldsymbol{V})$。对(1.23)式进行散度和旋度计算后，可得到以下涡度和散度的时间变化方程：

$$\begin{aligned} \frac{\partial\zeta}{\partial t} &= -\nabla\cdot(\zeta + f)\boldsymbol{V} \\ \frac{\partial D}{\partial t} &= \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{V}\times(\zeta + f)\boldsymbol{V} - \nabla\cdot\boldsymbol{V}\left(\Phi + \frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}}{2}\right) \\ D &= \nabla\cdot\boldsymbol{V} \end{aligned} \tag{1.24}$$

引入区域平均项的偏差 $\Phi' = \Phi - \overline{\Phi}$，其中 $\overline{\Phi}$ 为与时间无关的区域平均，连续方程(1.21)可写为

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi'}{\partial t} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} &= -(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)(\overline{\Phi} + \Phi') - (\overline{\Phi} + \overline{\Phi}')D \\ &= -[\boldsymbol{V}\cdot\nabla\Phi' + \Phi' D] - \overline{\Phi}D \\ &= -\nabla\cdot\Phi'\boldsymbol{V} - \overline{\Phi}' D \end{aligned} \tag{1.25}$$

根据 Helmholtz 定理，向量场 $\boldsymbol{V}$ 可分解为含向量的流函数 φ 和含向量的速度势 g 。

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{k}\times\nabla\varphi + \nabla g \tag{1.26}$$

则：$\zeta = \boldsymbol{k}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{V}) = \nabla^2\psi$；$D = \nabla\cdot\boldsymbol{V} = \nabla^2 g$。从而可将(1.24)式写为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\varphi) = &-\frac{1}{a\cos^2\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial x}(U\nabla^2\psi) + \cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}(V\nabla^2\psi)\right] \\ &- z\Omega(\sin\psi\nabla^2 g + \frac{V}{a}) \end{aligned} \tag{1.27}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 g) = \frac{1}{a\cos^2\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}(V\nabla^2\psi) - \cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}(U\nabla^2\psi)\right]$$

$$+ 2\Omega(\sin\varphi\nabla^2\psi - \frac{U}{a}) - \nabla^2\left(\frac{U^+ v^2}{2\cos^2\varphi} + \Phi'\right) \quad (1.28)$$

其中

$$U = u\cos\varphi = -\frac{\cos\varphi}{a}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \frac{1}{a}\frac{\partial g}{\partial\lambda}$$

$$V = v\cos\varphi = \frac{1}{a}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} + \frac{\cos\varphi}{a}\frac{\partial g}{\partial\varphi} \quad (1.29)$$

而连续方程可写为

$$\frac{\partial\Phi'}{\partial t} = -\frac{1}{a^2\cos^2\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}(U\Phi') + \cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}(V\Phi')\right] - \bar{\Phi}D \quad (1.30)$$

由于波的非线性相互作用导致了复杂的代数运算,而变换技术为求得方程组提供了一个比较简明的方法,这个方法的本质是从谱空间量变换到格点空间量,然后在每个格点完成非线性乘积(如(1.27)、(1.28)和(1.30)式中方括号内的项),再把这些乘积从格点量逆变换到谱量。为此,ψ、g 和 Φ' 必须表示成球面调和函数的截断级数:

$$\psi = a^2\sum_{m=-J}^{J}\sum_{l=|m|}^{|m|+J}\psi_l^m Y_l^m \quad (1.31)$$

$$g = a^2\sum_{m=-J}^{J}\sum_{l=|m|}^{|m|+J}g_l^m Y_l^m \quad (1.32)$$

$$\Phi = a^2\sum_{m=-J}^{J}\sum_{l=|m|}^{|m|+J}\Phi_l^m Y_l^m \quad (1.33)$$

$$U = a\sum_{m=-J}^{J}\sum_{l=|m|}^{|m|+J+1}U_l^m Y_l^m \quad (1.34)$$

$$V = a\sum_{m=-J}^{J}\sum_{l=|m|}^{|m|+J+1}V_l^m Y_l^m \quad (1.35)$$

其中 J 是截断波数。将(1.34)~(1.35)式代入(1.29)式。可得

$$U_l^m = (l-1)\varepsilon_l^m\psi_{l-1}^m - (l+2)\varepsilon_{l+1}^m\psi_{l+1}^m + img_l^m$$

$$V_l^m = -(l-1)\varepsilon_l^m\psi_{l-1}^m + (l+2)\varepsilon_{l+1}^m g_{l+1}^m + im\psi_l^m \quad (1.36)$$

其中 $\varepsilon_l^m = \sqrt{(l^2 - m^2)/(4l^2 - 1)}$。

由于 U 和 V 是由微分流函数和速度势得到的，所以其展开比 ψ 和 g 的多一次，即 $J+1$。

为计算非线性乘积 $U\nabla^2\psi$、$V\nabla^2\psi$、$U\Phi'$、$V\Phi'$、U^2 及 V^2 的值，要把乘积的每一项变换到二维空间格点，然后对格点的值作乘法，以构成格点空间的乘积。最后再变回谱空间。对于涡度方程(1.27)式，这种逆变换需要格点乘积在每个纬圈的截断 Fourier 级数

$$
\begin{aligned}
U\nabla^2\psi &= a\sum_{m=-J}^{J} A_m e^{im\lambda} \\
V\nabla^2\psi &= a\sum_{m=J}^{J} B_m e^{im\lambda}
\end{aligned}
\tag{1.37}
$$

通过快速 Fourier 变换(FFT)，可求得(1.37)式中的系数 A_m 和 B_m。

把(1.37)式代入(1.27)式，在作代数运算并从格点空间变换到波数空间之后，得到下式：

$$
\begin{aligned}
l(l+1)\frac{\partial \psi_l^m}{\partial t} = &-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2\varphi}\Big[imA_m P_l^m(\sin\varphi) \\
&- B_m\cos\varphi\cdot\frac{\partial P_l^m(\sin\varphi)}{\partial\varphi}\Big]\cos\varphi \mathrm{d}\varphi \\
&+ 2\Omega\big[l(l-1)\varepsilon_l^m g_{l-1}^m \\
&+ (l+1)(l+2)\varepsilon_{l+1}^m g_{l+1}^m - V_l^m\big]
\end{aligned}
\tag{1.38}
$$

这里：

$$
\begin{aligned}
\zeta &= \sum_l\sum_m \zeta_l^m Y_l^m = \sum_l\sum_m\left[\frac{-l(l+1)}{a^2}\right]\psi_l^m Y_l^m \\
D &= \sum_l\sum_m D_l^m Y_l^m + \sum_l\sum_m\left(\frac{-l(l+1)}{a^2}\right) g_l^m Y_l^m
\end{aligned}
\tag{1.39}
$$

(1.38)式的第一个方括号项来源于下面方程的第二项的分部积分：

$$
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2\varphi}\left(imA_m + \cos\varphi\frac{\partial B_m}{\partial\varphi}\right) P_l^m(\sin\varphi)\cos\varphi \mathrm{d}\varphi \tag{1.40}
$$

积分的边界条件为 $B_m(\pm\pi/2) = 0$，因为在极地 V 为 0。假定选定