理论力学

下册

黄克累
张安厚
刘洁民
编

北京航空航天大学出版社

理 论 力 学

（下 册）

黄克累　张安厚　刘洁民　编

北京航空航天大学出版社

内容简介

本书是根据<高等工业学校理论力学课程基本要求>编写的，可作为工科高等院校航空、航天、机械类90～100学时的理论力学课程教材，也可供其它专业或有关工程技术人员参考。本书分为上、下两册，全书采用国际单位制（SI）。

本册（下册）内容为动力学。动力学适当地提高了起点，普遍定理以质点系为重点，选编了与应用关系比较密切的内容及少量用微机编程或其它近似方法求解的习题。

书中各章配有数量充足的、联系工程实际的例题和习题，习题配有答案便于自学。各章例后附有讨论专栏及思考题，传授解题技巧和启发思考。

理论力学
LILUN LIXUE
（下册）
黄克累 张安厚 刘洁民 编
责任编辑 郭维烈
北京航空航天大学出版社出版
新华书店总店科技发行所发行 各地新华书店经销
北京农业工程大学印刷厂印装

850×1168 1/32 印张：11.25 字数：302千字
1991年4月第一版 1991年4月第一次印刷 印数：5000册
ISBN 7 81012-222-3/O·017 定价：3.20元

上 册 目 录

第一篇 静 力 学

第一章 静力学的基本概念和公理
第二章 力学理论
第三章 平面力系的平衡
第四章 摩擦
第五章 空间力系的平衡
第六章 平行力系中心与重心

第二篇 运 动 学

第七章 点的运动学
第八章 刚体的基本运动
第九章 刚体的平面运动
第十章 刚体的绕定点运动和一般运动
第十一章 点的复合运动
第十二章 刚体的复合运动

下 册 目 录

第三篇 动 力 学

引言……………………………………………………………………(2)

第十三章 质点动力学

§13-1 动力学基本定律……………………………………………(3)

§13-2 质点的运动微分方程……(5)
§13-3 质点动力学的两类问题……(6)
习 题……(16)

第十四章 质点的振动

§14-1 质点的自由振动……(25)
§14-2 质点的衰减振动……(30)
§14-3 质点的强迫振动……(35)
§14-4 减振和隔振概念……(44)
思考题……(46)
习 题……(47)

第十五章 动量定理

§15-1 质点和质点系的动量……(55)
§15-2 质点和质点系的动量定理……(59)
§15-3 质心运动定理……(65)
§15-4 流体对管壁的附加动压力……(70)
§15-5 变质量质点的基本方程……(73)
§15-6 火箭的速度问题……(76)
思考题……(79)
习 题……(80)

第十六章 动量矩定理

§16-1 质点和质点系的动量矩……(95)
§16-2 转动惯量、惯性积、惯性主轴……(98)
§16-3 质点和质点系的动量矩定理……(108)
§16-4 刚体绕定轴转动的微分方程……(114)
§16-5 质点系相对质心的动量矩定理……(119)
§16-6 定常流动流体对叶轮的转矩……(121)
思考题……(123)

习　题……………………………………………………(123)

第十七章　刚体的平面运动和定点运动

§17-1　刚体平面运动的微分方程…………………………(139)
§17-2　刚体定点运动的欧拉动力学方程……………………(146)
§17-3　陀螺近似理论……………………………………(149)
习　题……………………………………………………(155)

第十八章　动能定理

§18-1　力的功…………………………………………(164)
§18-2　动能……………………………………………(169)
§18-3　动能定理………………………………………(170)
§18-4　势力场、势能、机械能守恒定律……………………(181)
§18-5　普遍定理的综合应用………………………………(187)
习　题……………………………………………………(190)

第十九章　动静法

§19-1　质点的动静法……………………………………(209)
§19-2　质点系的动静法…………………………………(212)
§19-3　惯性力系的简化…………………………………(214)
§19-4　刚体定轴转动时轴承的动反力……………………(223)
§19-5　静平衡和动平衡…………………………………(228)
习　题……………………………………………………(230)

第二十章　质点相对运动动力学

§20-1　质点的相对运动微分方程…………………………(244)
§20-2　落体对铅垂线的偏离………………………………(252)
§20-3　相对运动中的动能定理……………………………(255)
习　题……………………………………………………(257)

第二十一章　虚位移原理

§21-1　约束的分类……………………………………………(263)
§21-2　虚位移、虚功…………………………………………(265)
§21-3　自由度、广义坐标……………………………………(267)
§21-4　虚位移原理……………………………………………(268)
§21-5　以广义坐标表示的虚位移原理、广义力…………(280)
§21-6　在势力场中质点系平衡的稳定性…………………(285)
思考题………………………………………………………(289)
习　题………………………………………………………(290)

第二十二章　拉格朗日方程

§22-1　动力学普遍方程………………………………………(304)
§22-2　拉格朗日方程…………………………………………(308)
§22-3　拉格朗日方程的首次积分……………………………(319)
思考题………………………………………………………(324)
习　题………………………………………………………(324)

第二十三章　碰　撞

§23-1　概述……………………………………………………(338)
§23-2　冲量定理和冲量矩定理………………………………(340)
§23-3　两平动物体的对心正碰撞……………………………(342)
§23-4　碰撞冲量对定轴转动刚体的作用、撞击中心……(344)
思考题………………………………………………………(348)
习　题………………………………………………………(348)

第三篇　动　力　学

引　言

动力学是研究物体的机械运动与受力之间一般规律的科学。动力学不同于静力学和运动学，静力学主要研究力系的简化和平衡条件；运动学主要研究对机械运动的描述和其性质；而动力学则把物体的机械运动与受力连系起来进行一般地、全面地研究，得出其普遍规律，可以认为静力学中的平衡问题是动力学的特殊情况。

动力学的形成和完善与生产和科学技术的发展紧密相关，当前工业和科技的迅速发展对动力学提出了更加复杂的课题，无疑这将促进动力学走向新的阶段。

动力学按研究对象可分为质点动力学和质点系动力学（包括刚体动力学）。本书动力学部分是以牛顿三定律为基本定律的。

第十三章　质点动力学

质点动力学研究质点所受的力和它的运动之间的关系。应用质点动力学理论可以直接解决某些实际问题。例如，火箭的轨道问题。另外，质点动力学还是动力学其它理论的基础。质点动力学是建立在动力学三个基本定律，就是牛顿三定律的基础之上的。

§13-1　动力学基本定律

第一定律（惯性定律）　如果质点不受力或所受合力为零，则质点对惯性参考系保持静止或作等速直线运动。质点对惯性参考系的等速直线运动称为**惯性运动**。实际上，绝对的惯性参考系是不存在的。对一般的工程问题，可取地球为惯性参考系；对卫星及远程导弹等问题，必须考虑地球的自转，而取地球中心为原点，坐标轴指向三个恒星的坐标系为惯性参考系；对于研究天体问题，则必须取以太阳中心为原点，坐标轴指向三个恒星的坐标系为惯性参考系。

第二定律（力和加速度之间关系定律）　作用于质点上的力等于质点的质量与加速度的乘积，即

$$\bar{F}=m\bar{a} \tag{13-1}$$

正是这一熟知的动力学定律，建立了质点所受的力和它的运动之间的定量关系，奠定了动力学的基础。

动力学第二定律只对惯性参考系才成立，它不适用于非惯性系，而实践证明牛顿定律成立的参考系，方可取作惯性参考系。

式（13-1）表明，力和加速度方向一致，但力和速度方向一般并不一致；当力一定时，质点的质量和加速度成反比，也就是说，在相同的力作用下，质点的质量越大，越不容易改变其运动状态，所以质量是质点惯性的量度。

在地球表面上，质点受重力$\bar{P}$，加速度为重力加速度 $\bar{g}$ 。根据式（13-1），

$$\bar{P}=m\bar{g}$$

所以
$$P=mg \quad m=\frac{P}{g} \tag{13-2}$$

在地球表面的不同地区，同一质点重力的大小不同，重力加速度不同，但质量保持不变。

在力学中，通常使用国际单位制（SI）。在国际单位制中，质量、长度和时间的单位是基本单位，分别取为千克（或公斤）(kg)，米（m）和秒（s）。力的单位是导出单位，称为牛顿(N)。一牛顿力使一千克质量的物体产生一米/秒²的加速度，即

$$1(\mathrm{N})=1(\mathrm{kg})\times 1(\mathrm{m/s^2})=1\left(\frac{\mathrm{kg\cdot m}}{\mathrm{s^2}}\right)$$

在工程中，常用工程单位制。在工程单位制中，力、长度和时间的单位是基本单位，分别取为公斤力(kgf)，米(m)和秒(s)。质量的单位是导出单位。一公斤力使物体产生一米/秒² 的加速度时，这一物体的质量是一工程单位质量，即

$$1[\text{工程单位质量}]=\frac{1(\mathrm{kgf})}{1(\mathrm{m/s^2})}=1\left(\frac{\mathrm{kgf\cdot s^2}}{\mathrm{m}}\right)$$

由于一公斤力是质量为一千克的物体在纬度 45° 的海平面上所受的重力，所以，由式（13-1）

$$1(\mathrm{kgf})\approx 1(\mathrm{kg})\times 9.8(\mathrm{m/s^2})=9.8(\mathrm{N})$$

第三定律（作用和反作用定律）　两个物体间的作用力和反作用力总是大小相等、方向相反、共线，但分别作用在两个物体

上。可见，作用和反作用定律不仅在静力学中适用，而且在动力学中也同样适用，它给出了两个物体相互作用力之间的关系。

§13-2 质点的运动微分方程

动力学第二定律〔式(13-1)〕建立了质点所受的力和运动之间的关系。在应用式（13-1）解决问题时，根据不同问题，可采用其不同的表达形式。

一、矢量形式：

运动学中得出，点作曲线运动时，点的加速度等于矢径 $\bar{r}$ 对时间的两阶导数，又等于速度对时间的一阶导数：$\bar{a}=\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}=\frac{d\bar{v}}{dt}$。

把它代入式（13-1），得出

$$m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}=m\frac{d\bar{v}}{dt}=\bar{F}=\sum_{i=1}^{n}\bar{F}_i \tag{13-3}$$

上式建立了质点所受的力和质点的矢径或速度对时间的**微分关系**，称为**质点运动微分方程的矢量形式**。这种形式的运动微分方程，表达简练，主要用于理论推导。

二、直角坐标形式

由运动学得出点作曲线运动时，点的加速度在直角坐标轴上的投影为

$$a_x=\frac{dv_x}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y=\frac{dv_y}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z=\frac{dv_z}{dt}=\frac{d^2z}{dt^2}$$

把式（13-1）向惯性参考系中的固定直角坐标轴投影，考虑到上面的关系式，得出

$$
\left.\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} &= m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \sum_{i=1}^{n} X_i \\
m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} &= m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = \sum_{i=1}^{n} Y_i \\
m\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} &= m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = \sum_{i=1}^{n} Z_i
\end{aligned}\right\} \tag{13-4}
$$

式中X_i、Y_i、Z_i分别表示作用在质点上的力，$\bar{F}_i$在坐标轴x、y、z上的投影。式（13-4）称为**质点运动微分方程的直角坐标形式。**

三、自然轴形式

由运动学得出点作曲线运动时，点的加速度在自然轴上的投影为$a_\tau=\dfrac{\mathrm{d}v_\tau}{\mathrm{d}t}$，$a_n=\dfrac{v^2}{\rho}$，$a_b=0$。其中$a_\tau$是点的加速度在切线方向的投影，$a_n$是点的加速度在主法线方向的投影，$a_b$是点的加速度在副法线方向的投影。把式（13-1）向惯性参考系中点的轨迹曲线上的自然轴系投影，考虑到上面的关系式，得出

$$
\left.\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}v_\tau}{\mathrm{d}t} &= \sum_{i=1}^{n} F_{i\tau} \\
m\frac{v^2}{\rho} &= \sum_{i=1}^{n} F_{in} \\
0 &= \sum_{i=1}^{n} F_{ib}
\end{aligned}\right\} \tag{13-5}
$$

式（13-5）称为**质点运动微分方程的自然轴形式。**式（13-4）和（13-5）是解决质点动力学具体问题时常用的运动微分方程的形式。除上述的形式外，运动微分方程还有极坐标形式、柱坐标形式等。

§13-3　质点动力学的两类问题

应用质点的运动微分方程，可以解决质点动力学的两类问题：

第一类问题：已知质点的运动，求作用于质点上的力。由质点的运动微分方程可见，解决这类问题，只需由质点的运动求出加速度，代入运动微分方程，就可求得作用在质点上的力。解决这类问题，最多用到数学上的导数运算，所以没有原则上的困难。

第二类问题 已知作用于质点上的力，求质点的运动。对这类问题，运动微分方程直接给出的是质点的加速度，或者说，运动微分方程建立的是二阶微分方程。如果要求质点的运动方程，需要考虑运动的初始条件，把运动微分方程积分两次。在有些情况下，通过积分，可以得到运动方程的解析表达式，但在另一些情况下，运动微分方程的积分运算相当困难，有些问题，通过积分求其运动方程的解析表达式，数学上远未解决。这时，只能用数值方法，得到其近似解。

下面举例说明如何用质点的运动微分方程解决质点动力学的两类问题。

例13-1 电梯以加速度 $\bar{a}$ 上升（图13-1）。站在电梯中的人重 $\bar{G}$。求人对电梯的压力。

解 取人作为研究对象。人受的力有重力$\bar{G}$和电梯的反力 $\bar{N}$。由于人随电梯一起沿铅垂线以加速度$\bar{a}$上升，可看作质点作直线运动，所以可用直角坐标形式的运动微分方程式（13-4）来求解。为此，取坐标轴 x 铅垂向上，如图13-1所示。由式（13-4）的第一式

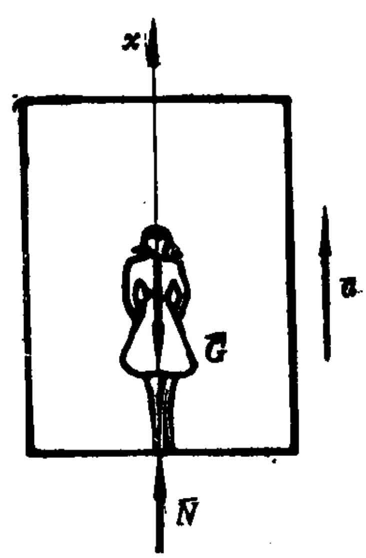

图 13-1

$$ma_x = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

现在，人的加速度在x轴上的投影$a_x = a$；作用在人上的力在x轴上投影的代数和 $\sum_{i=1}^{n} X_i = N - G$。代入上式，得出

$$ma = N - G$$

从中得出电梯的反力为

$$N = G + ma = G\left(1 + \frac{a}{g}\right)$$

讨论 (1) 通过这个简单例子，可以得出质点动力学问题的解题步骤：首先要选取研究对象；然后作研究对象的受力分析，画它的受力图；再确定采用的运动微分方程的形式，取与之对应的坐标；最后，列写运动微分方程，求解。即使一些复杂的问题，如果按正确的步骤去分析，往往可顺利地得到结果。

(2) 因为人作直线运动，所以取人运动的直线作为坐标轴，取一个坐标就可以确定人的位置；当点作平面曲线运动时，要在运动的平面内取两个坐标来确定点的位置；当点作空间曲线运动时，要取三个坐标来确定点的位置。坐标轴的方向不同，列出的运动微分方程不同，但不影响最后的结果。如例中取 x 轴正方向向下，则$a_x = -a$，$\sum_{i=1}^{n} X_i = G - N$，最后结果相同。

(3) 根据作用和反作用定律，电梯给人的反力N和人给电梯的压力相等、方向相反。

(4) 从求得的结果可看出$N > G$，称为“超重”。如果电梯的加速度向下，则$N < G$，称为“失重”。不管超重或者失重，人的重量G并没有改变，只是“表观”重量N大了或者小了。

例13-2 质量$m = 1\text{kg}$的小球，联结在长$l = 30\text{cm}$的细绳上（图13-2）。绳的另一端固定于o点，绳与铅垂线成$\alpha = 60°$角。求小球圆周运动的速度v及绳的拉力T。

解 取小球为研究对象。小球受的力有重力G和绳的拉力T。由于小球作圆周运动，可用自然轴形式的运动微分方程求解，为此，取自然轴系如图13-2所示。由式（13-5）

$$m\frac{dv_\tau}{dt} = \sum_{i=1}^{n} F_{i\tau} = 0 \qquad (1)$$

$$m\frac{v^2}{R}=\sum_{i=1}^{n}F_{in}=T\sin\alpha \qquad (2)$$

$$ma_b=0=T\cos\alpha-G \qquad (3)$$

由式(1)得出，v_τ = 常数，即小球作等速圆周运动，由式(3)，

$$T=\frac{G}{\cos\alpha}=2G=19.6\text{N}$$

代入式(2)，由于轨道圆的半径$R=l\sin\alpha$，得出

$$v=\sqrt{2lg\sin^2\alpha}=2.1\text{m/s}$$

讨论 (1) 由于小球作圆周运动，所以用自然轴形式的运动微分方程比较方便。

(2) 分析和解决问题的步骤，和例13-1基本相同。

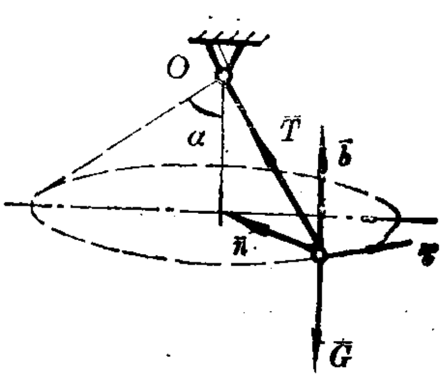

图 13-2

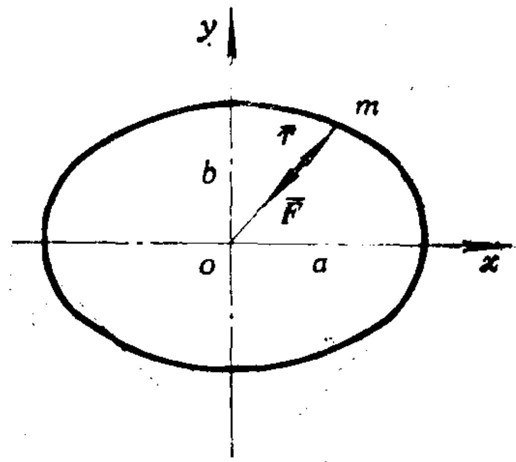

图 13-3

例13-3 质量为m的质点在平面内按规律 $x=a\cos kt$， $y=b\sin kt$运动（图13-3），其中k = 常数。求作用于质点上的力。

解 取质点为研究对象。质点作平面曲线运动，取直角坐标如图所示。由直角坐标形式的运动微分方程式（13-4）的前两式，得出

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=X$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=Y$$

把质点的坐标x和y对时间求两阶导数，代入上式，得出

$$X = -mk^2 a\cos kt = -mk^2 x$$

$$Y = -mk^2 b\sin kf = -mk^2 y$$

所以，质点受的力$\bar{F}$为

$$\bar{F} = X\bar{i} + Y\bar{j} = -mk^2(x\bar{i} + y\bar{j}) = -mk^2\bar{r}$$

即质点受力的大小为$mk^2 r$，方向指向原点o。这种力称为“有心力”。

讨论 (1) 从点的运动规律得出点的运动轨迹是椭圆。

(2) 由于是平面曲线运动，所以用到两个直角坐标形式的运动微分方程。

(3) 尽管点的轨迹是比较简单的椭圆，但如用自然轴形式的运动微分方程求解，将会相当复杂。

例13-4 质点以初速v_0与水平成β角沿光滑斜面抛射（图13-4）。如果斜面倾角为α，求质点的运动规律。

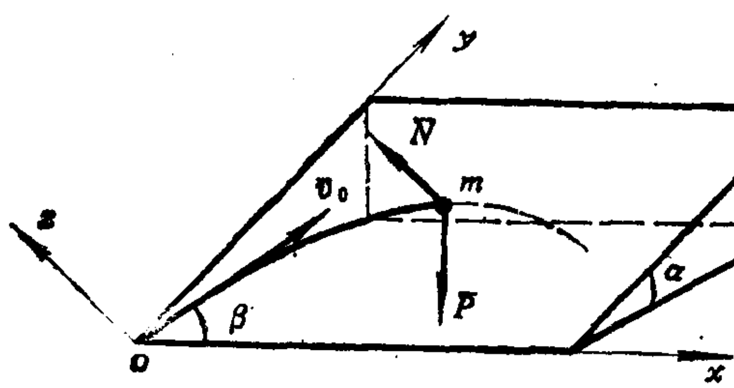

图 13-4

解 这是动力学第二类问题。质点受的力有重力$\bar{P}$和斜面的正反力$\bar{N}$。由于质点作平面曲线运动，取oxy坐标平面与斜面重合，就可以用两个坐标来确定质点的位置。由式（13-4）

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad (1)$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -P\sin\alpha \quad (2)$$