线性代数

张有方等编

浙江科学技术出版社

责任编辑　周伟元

封面设计　周盛发

线 性 代 数

张有方等编

*

浙江科学技术出版社出版

浙 江 新 华 印 刷 厂 印 刷

浙 江 省 新 华 书 店 发 行

开本787×1092　1/32　印张8.125　字数182,000

1985年7月第　一　版

1985年7月第一次印刷

印数：1—17,140

统一书号：7221·71

定　　价：1.40 元

内容提要

本书由浙江大学应用数学系张有方等编写，并由全国高等学校工科数学教材编审委员会委员周茂清教授审阅.

全书共分六章，包括行列式、矩阵、线性方程组、线性空间和欧氏空间、线性变换、二次型. 每章均有习题和答案. 本书章节安排合理、层次分明、条理清楚，主要定理证明详细，易于初学者阅读与掌握线性代数的基本理论与方法.

本书适合作为理工科院校各专业开设线性代数课教材，也可作为业余工人大学、电视大学等的教学参考书，及工程技术人员学习线性代数用书.

前　言

随着计算机技术的普及和提高，对于线性代数这门课程的学习更为迫切．为了使读者能以较少的时间，系统、清晰地理解并掌握线性代数中的基本概念、基本理论和基本方法，我们在多年教学实践的基础上编写了本书．

本书取材适当，书内各章自成体系，中心明确，各部分内容的内在联系在适当的地方均有指出．为了便于各类工科院校学生及工程技术人员的学习，本书力求叙述简明准确，推导详尽，说理清楚．在内容的安排上，把具体的行列式、矩阵、线性方程组放在前面，而把抽象性较强的线性空间等理论安排在后面，以减少初学者的困难．

本书适合作为高等工科院校每周3学时的工科线性代数课程的教材．考虑到不同类型专业的不同需要，书中除去打*号部分的内容，也可作为每周2学时的工科线性代数课程的教材，当然，本书还适合业余工业大学、电视大学的学生以及工程技术人员自学与进修线性代数之用．

本书按各章顺序分别由张有方、应佩蓉、孙兰芬、陈体泽、陈一巾、汤竞生编写，张有方对全书作了适当的修改，并由全国高等学校工科数学教材编审委员会委员周茂清教授审稿．

限于水平，书中的缺点和错误一定不少，希望读者批评指正．

目　录

第一章 行列式

行列式的理论是由研究线性方程组的解法而产生的，它是数学中一个有用的工具．本章是中学时所学二阶、三阶行列式的理论的推广，主要介绍 n 阶行列式的概念，基本性质及其按行(列)展开定理．

§1 行列式的概念

一、n 级排列及其奇偶性

定义 1 由 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组，称为一个 n 级排列．

例如，132是一个 3 级排列，2431是一个 4 级排列，45321是一个 5 级排列．

我们知道，由 $1,2,\cdots,n$ 所组成的所有不同的 n 级排列共有 $n!$ 个，而在这 $n!$ 个不同的 n 级排列中，$12\cdots n$ 是唯一的一个按从小到大次序组成的排列，称为 n 级标准排列．

例如，3 级排列共有 6 个不同的排列，即

123　　231　　312

132　　213　　321

其中123是 3 级标准排列．

定义 2 在一个排列中的两个数，如果排在前面的数大于排在它后面的数，则称这两个数构成一个逆序．一个排列中逆序

的总数，称为此排列的逆序数.逆序数为偶数的排列，称为偶排列；逆序数为奇数的排列，称为奇排列.

例 1 在 3 级排列231中，2 与 3 不构成逆序，但 2 与 1 构成一个逆序，这是因为此时 $2>1$，且 2 在 1 的前面.同理，3 与 1 也构成一个逆序，因此 3 级排列231的逆序数为 2，这是一个偶排列.

一般地，设 $j_1j_2\cdots j_n$ 是$1,2,\cdots,n$ 的一个 n 级排列，若将 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数记为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$，则按定义有

$$\begin{aligned}\tau(j_1j_2\cdots j_n)=&(j_1\text{ 后面比 }j_1\text{ 小的数的个数})\\&+(j_2\text{ 后面比 }j_2\text{ 小的数的个数})\\&+\cdots\\&+(j_{n-1}\text{ 后面比 }j_{n-1}\text{ 小的数的个数}).\end{aligned}$$

例 2 (i) 因 $\tau(2431)=1+2+1=4$，故排列 2431 是偶排列；

(ii) 因 $\tau(35412)=2+3+2+0=7$，故排列 35412 是奇排列；

(iii) 因 $\tau(12\cdots n)=0$，故排列$12\cdots n$ 是偶排列.

把一个排列中某两个数的位置互换而其余的数不动，就得到另一个排列，对于排列所施行的这样一种改变称为对换。

例如，排列2431经过 1 与 2 对换后，就得到排列1432；排列35412经过 4 与 5 对换后，就得到排列34512.

由计算可知，经过一次对换后，偶排列 2431 变成了奇排列1432，而奇排列35412却变成了偶排列34512.一般地，有下述结论：

定理 1 任一排列经过一次对换后必改变其奇偶性.

证明 首先证明被对换的两个数在排列中是相邻的情形.设排列

$$\cdots jk\cdots, \tag{1.1}$$

经过 j 与 k 对换后变成排列

$$\cdots kj\cdots. \tag{1.2}$$

这里"…"表示排列中那些不动的数，易知，在排列(1.1)中，如果 j、k 与其他的数构成逆序，则在排列(1.2)中仍然构成逆序；如果 j、k 与其他的数不构成逆序，则在排列(1.2)中也不构成逆序，所不同的只是 j、k 的次序而已．在排列(1.1)中，如果 j、k 构成逆序，则经过一次对换后所得排列(1.2)的逆序数就比排列(1.1)的逆序数减少一个；如果 j、k 不构成逆序，则排列(1.2)的逆序数就比排列(1.1)的逆序数增加一个．总之，此时不论逆序数减少一个还是增加一个，排列(1.1)与排列(1.2)的奇偶性总是不同了．

其次，再证一般情形，设排列为

$$\cdots ji_1i_2\cdots i_sk\cdots, \tag{1.3}$$

经过 j 与 k 对换后变成排列

$$\cdots ki_1i_2\cdots i_sj\cdots. \tag{1.4}$$

易知，这样一个对换可以通过一系列的相邻数的对换来实现．这是因为如果我们从排列(1.3)开始，把 k 与 i_s 对换，再与 i_{s-1} 对换，…．也就是说，把 k 一位一位地向左移动，经过 $s+1$ 次相邻位置的对换，排列(1.3)就变成排列

$$\cdots kji_1\cdots i_s\cdots. \tag{1.5}$$

再从排列(1.5)开始，把 j 一位一位地向右移动，经过 s 次相邻位置的对换，排列(1.5)就变成了排列(1.4)．因此 j 与 k 的对换，可以通过 $2s+1$ 次相邻位置的对换来实现．上面已经证明，经过一次相邻位置的对换，必改变排列的奇偶性．现在经过 $2s+1$ 次相邻位置的对换，其最终结果必然改变了排列的奇偶性．

二、三阶行列式的展开式的特征

我们知道，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \qquad (1.6)$$

（1）在(1.6)中，等式的左边表示一个三阶行列式，横的称为行（Row），纵的称为列（Column），其中 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 是数，称为此行列式的第 i 行第 j 列的元素.

（2）在(1.6)中，等式的右边表示此三阶行列式的展开式，即行列式之值.它是3! 项的代数和，其中每一项都是取自三阶行列式中属于不同的行与不同的列的三个元素的乘积，可写成如下形式，

$$a_{1j_1}\,a_{2j_2}\,a_{3j_3}. \qquad (1.7)$$

此处、$j_1j_2j_3$ 是1,2,3的一个排列.

（3）容易验证，每个乘积项(1.7)前面所取的符号与$\tau(j_1j_2j_3)$ 有关，当 $\tau(j_1j_2j_3)$ 是偶数时，乘积项(1.7)的前面取“+”号，当 $\tau(j_1j_2j_3)$ 是奇数时，乘积项(1.7)的前面取“−”号.

若采用Σ的记号，则(1.6)式可写成如下形式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}.$$

这里 $j_1j_2j_3$ 是1,2,3 的一个排列，$\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对所有3级排列求和.

三、n 阶行列式的展开式

定义 3　n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.8}$$

等于所有取自(1.8)中属于不同的行与不同的列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.9}$$

的代数和. 这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 是1,2,…,n 的一个排列,当 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 是偶数时,乘积项(1.9)的前面取"+"号;当 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 是奇数时,乘积项(1.9)的前面取"−"号.

若采用 $\sum$ 的记号,则这一定义可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}. \tag{1.10}$$

这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 是1,2,…,n 的一个排列,$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和,等式(1.10)的右边表示此 n 阶行列式的展开式.

特别,规定一阶行列式 $|a|$ 的值等于 a.

为了方便,今采用记号 $|A|$, $|B|$, …等, 来表示某一个行列式.

例 3 试证明上三角形行列式

$$|D| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

证明 按定义知

$$|D|=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{n-1,j_{n-1}}a_{nj_n}.$$

现在第 n 行中除 a_{nn} 外，其余元素都等于零.若在第 n 行中所取的元素不是 a_{nn}，则该乘积项一定等于零.所以，在第 n 行中只有取 a_{nn} 时，该乘积项才有可能不等于零. 今在第 n 行中既取了 a_{nn}，则在第 $n-1$ 行中只有取 $a_{n-1,n-1}$ 时，才有可能使该乘积项不等于零.同理，据此类推可知，在这个 n 阶行列式的展开式中，除了 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 这一项外，其余的乘积项都等于零. 又因为 $\tau(12\cdots n)=0$，所以 $|D|=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

在行列式的定义中，为了决定每一项的正负号，我们把 n 个元素的行指标按自然顺序排列起来.事实上，数的乘法是可以交换的，因此，这 n 个元素的次序是可以任意写的.一般地，n 阶行列式中的乘积项可以写成

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}, \tag{1.11}$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$，$j_1j_2\cdots j_n$ 是两个 n 级排列.应用排列的性质，容易证明乘积项(1.11)的符号等于

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)} \tag{1.12}$$

为了根据定义来决定乘积项(1.11)的符号，就要把乘积项(1.11)中 n 个元素重新排一下，使得它们的行指标成自然顺序，也就是排成

$$a_{1s_1}a_{2s_2}\cdots a_{ns_n}. \tag{1.13}$$

于是，它的符号应是

$$(-1)^{\tau(s_1s_2\cdots s_n)}. \tag{1.14}$$

现在来证明(1.12)与(1.14)是相等的.

我们知道，由(1.11)式变到(1.13)式，可以经过一系列元素的对换来实现. 每作一次对换，元素的行指标与列指标所组成的排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 与 $j_1j_2\cdots j_n$ 都同时作一次对换. 也就是 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 与 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 同时改变奇偶性，因此它们的和

$$\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)$$

的奇偶性不变. 这表明对(1.11)式作一次元素的对换，不会改变(1.12)式的值. 因此，在经过一系列的对换之后，有

$$\begin{aligned}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}&=(-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(s_1s_2\cdots s_n)}\\&=(-1)^{\tau(s_1s_2\cdots s_n)}.\end{aligned}$$

这就证明了(1.12)与(1.14)式是相等的.

例如，$a_{21}a_{32}a_{14}a_{43}$ 是 4 阶行列式中的一项，因 $\tau(2314)=2$，$\tau(1243)=1$，于是这一项的符号应是 $(-1)^{2+1}=-1$. 如果把这 4 个元素重新排列一下，使得它们的行指标按自然顺序排列起来，它就是 $a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$，因 $\tau(4123)=3$，故知它的符号也是 $(-1)^3=-1$.

按(1.12)式来决定行列式中每一项的符号，其优点在于行指标与列指标的地位是对称的. 因此，为了决定每一项的符号，同样可以把每一项元素的列指标按自然顺序排列. 于是，n 阶行列式的展开式又可表达如下：

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}. \qquad (1.15)$$

这里，$i_1i_2\cdots i_n$ 是1，2，…，n 的一个排列，$\sum\limits_{i_1i_2\cdots i_n}$ 表示对所有 n 级排列

求和.

例如，在三阶行列式中，若把每一项元素的列指标按自然顺序排列，则有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}-a_{31}a_{22}a_{13}$$

$$=\sum_{i_1i_2i_3}(-1)^{\tau(i_1i_2i_3)}a_{i_11}a_{i_22}a_{i_33}.$$

这里，$i_1i_2i_3$ 是1，2，3的一个排列，$\sum\limits_{i_1i_2i_3}$表示对所有3级排列求和.

事实上，由(1.12)还可知，为了决定行列式中每一项的符号，并不一定要把每一项元素的行指标按自然顺序排列起来，而可以把每一项元素的行指标取定为某一个固定的 n 级排列. 于是，n 阶行列式的展开式也可表达如下：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} \tag{1.16}$$

这里，$i_1i_2\cdots i_n$ 被取定为1，2，…，n 的某一个固定的排列，$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$表示对所有 n 级排列求和.

例如，应用(1.16)式来展开三阶行列式，并取定 $i_1i_2i_3$ 为排列213，则有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(213)+\tau(j_1j_2j_3)}a_{2j_1}a_{1j_2}a_{3j_3}$$

$$=a_{22}a_{11}a_{33}+a_{21}a_{13}a_{32}+a_{23}a_{12}a_{31}-a_{23}a_{11}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33}-a_{22}a_{13}a_{31}$$

这里，$j_1j_2j_3$ 是1，2，3的一个排列，$\sum\limits_{j_1j_2j_3}$表示对所有3级排列求和.

同理，我们还可以把 n 阶行列式的展开式表达如下：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1i_2\cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}, \tag{1.17}$$

这里，$j_1j_2\cdots j_n$ 被取定为1，2，…，n 的某一个固定的排列，$\sum\limits_{i_1i_2\cdots i_n}$ 表示对所有 n 级排列求和.

§2　行列式的基本性质

计算 n 阶行列式的值是一个重要的问题.由定义 3 知，n 阶行列式的值是 $n!$ 个乘积项的代数和，计算它需要做 $n!(n-1)$ 次乘法运算.当 n 较大时，$n!$ 是一个相当大的数，因此，直接从定义来计算高阶行列式的值，是极其困难的.从本章§1中例3可知，如果能够将 n 阶行列式转化为与它等值的上三角形行列式，那末它的值就可以很方便地计算出来.在这一节里，我们将介绍 n 阶行列式的基本性质，只要能灵活应用这些性质，就可以大大地简化 n 阶行列式的计算.当然，这些基本性质都是三阶行列式的基本性质的推广，只是它们的证明方法与过去不同而已.

性质 1　行列式经转置后其值不变.

若设

$$|D| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad |D|^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdot & \end{vmatrix},$$

—