李代数

万哲先编著

科学出版社

1978

内 容 简 介

本书系统地叙述了复半单李代数的经典理论，即它的结构、自同构、表示和实形.

李 代 数

万 哲 先 编著

*

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街 137 号

北 京 印 刷 二 厂 印 刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1964年 5月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1978年 9月第二次印刷 印张：9 5/8

印数：6,001—90,250 字数：244,000

统一书号：13031·819

本社书号：1167·13—1

定价： 1.20 元

序

1961 年秋至 1963 年春 作者在中国科学院数学研究所李羣討論班上陆續作了一些专題报告，本书就是根据这些报告的講稿改編而成.內容包括复半单李代数的經典理論,即它的結构、自同构、表示和实形. 当时，作者的目的是和参加討論班的同志們共同学习李代数的基础知識，为进一步学习李羣及李代数的近代文献打下基础.这些专題报告,主要参考邓金的“半单純李氏代数的結构”(曾肯成譯，科学出版社，北京，1954)和 Seminaire Sophus Lie 的講义 “Théorie de algèbres de Lie et topologie de groupes de Lie”(Paris, 1955). 邓金的书叙述淸楚，易于被初学者領会，遺憾的是內容太少; Seminaire Sophus Lie 的講义內容較丰富,但是要求讀者具有較多的預备知識. 两书虽各具优点，但都不能完全满足我国初学者的需要,于是,作者就想到要写一本适应这种需要的书. 这就是这本书的来历.

李代数是 S. Lie 作为研究后来以他命名的李羣的代数工具而引进的. 在李代数經典理論方面有重要貢献者,除 S. Lie 本人外，当推 W. Killing, E. Cartan 和 H. Weyl 等人. 虽然本书为了初学者的方便，在叙述上尽可能少地涉及李羣，却应該指出,李代数經典理論的重要性主要在于它对李羣的应用. 另一方面，本书的大部分內容,都已推广到特征 0 的代数封閉域上的李代数,而且一部分結果也已推广到特征 0 的任意域上的李代数. 但我們在本书中却仅对复数域上的李代数来叙述，这是因为复数域上的李代数理論是最基本的，同时只要求讀者具备綫性代数知識就能閱讀本书絕大部分內容也是一个限制.

作者感謝参加李羣討論班的同志們. 当作者报告时，他們的意見以及和他們共同討論使作者学到很多东西，也使本书的某些

叙述得以改进并消除了許多錯誤。作者特別感謝李根道同志，他还帮助作者校对本书。

万 哲 先

1963 年 4 月

目　录

第一章　基本概念

§1. 李　代　数

設 $\mathfrak{g}$ 是复数域 C 上的有限維向量空間（或称綫性空間），并設在 $\mathfrak{g}$ 中定义了一个求換位元素的运算（簡称換位运算），即对于 $\mathfrak{g}$ 中任意二元素 X 和 Y，$\mathfrak{g}$ 中都有唯一的一个元素与之相应。这个元素記作 $[X, Y]$，称为 X 和 Y 的換位元素。再設这个換位运算满足以下条件：

I.　$[\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2, Y] = \lambda_1[X_1, Y] + \lambda_2[X_2, Y]$，对任意 $X_1, X_2, Y \in \mathfrak{g}$ 及任意复数 λ_1, λ_2.

II.　$[X, Y] = -[Y, X]$，对任意 $X, Y \in \mathfrak{g}$.

III.　$[X,[Y, Z]] + [Y,[Z, X]] + [Z,[X,Y]] = 0$，对任意 $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

这时 $\mathfrak{g}$ 就称为复数域上的李代数，簡称为复李代数，有时更簡称为**李代数**。向量空間 $\mathfrak{g}$ 的維数称为李代数 $\mathfrak{g}$ 的維数，記作 $\dim \mathfrak{g}$.

条件 I 是說換位运算对于第一个因子是綫性的。利用 II，可以从 I 推出換位运算对于第二个因子也是綫性的：

I'.　$[X, \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2] = \lambda_1[X, Y_1] + \lambda_2[X, Y_2]$，对任意 $X, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{g}$ 及任意复数 λ_1, λ_2.

其次，利用 II，又可以从 III 推出

III'.　$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$.

也可以将 III 写成

III''.　$[X, [Y, Z]] = [[X,Y], Z] + [Y, [X, Z]]$.

通常我們将条件 III 称为 Jacobi **恆等式**。最后在 II 中置 $X = Y$，我們有

II'.　$[X, X] = 0$，对任意 $X \in \mathfrak{g}$.

我們举出下面几个例子.

例 1. 設 $\mathfrak{g}$ 是 C 上的任一有限維向量空間. 对于任意 X, $Y\in\mathfrak{g}$, 定义 $[X, Y]=0$, 这时 I, II, III 自然成立. 于是 $\mathfrak{g}$ 成为一个李代数,我們称 $\mathfrak{g}$ 是个交換李代数.

一般地, 李代数 $\mathfrak{g}$ 中如有两个元素 X 和 Y, 具有性质 $[X, Y]=0$,我們就說 X 和 Y 交換.

例 2. 設 V_3 是 C 上三維向量空間, 而 e_1, e_2, e_3 是 V_3 的一組基, 于是 V_3 中任一元素 x 皆可写作

$$x=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3.$$

再設 $y\in V_3$, 写

$$y=y_1e_1+y_2e_2+y_3e_3.$$

定义

$$[X, Y]=(x_2y_3-x_3y_2)e_1+(x_3y_1-x_1y_3)e_2+(x_1y_2-x_2y_1)e_3,$$

則 V_3 对于如此定义的換位运算組成一个李代数.

例 3. 設 $\mathfrak{g}_3$ 是 C 上 3×3 斜对称矩陣的全体, $\mathfrak{g}_3$ 可看作 C 上的向量空間. 如果对于任意 $X, Y\in\mathfrak{g}_3$, 定义 $[X, Y]=XY-YX$, 則 $\mathfrak{g}_3$ 就成为一个李代数.

我們可以在 $\mathfrak{g}_3$ 中选一組基

$$M_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix},\ M_2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix},\ M_3=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

于是

$$[M_1, M_2]=M_3,\ [M_2, M_3]=M_1,\ [M_3, M_1]=M_2.$$

而 $\mathfrak{g}_3$ 中任一矩陣 X 可写作

$$X=\begin{pmatrix}0&-x_3&x_2\\x_3&0&-x_1\\-x_2&x_1&0\end{pmatrix}=x_1M_1+x_2M_2+x_3M_3.$$

設

$$Y=\begin{pmatrix}0 & -y_3 & y_2\\ y_3 & 0 & -y_1\\ -y_2 & y_1 & 0\end{pmatrix}=y_1M_1+y_2M_2+y_3M_3,$$

则

$[X, Y]=(x_2y_3-x_3y_2)M_1+(x_3y_1-x_1y_3)M_2+(x_1y_2-x_2y_1)M_3.$

因之从 V_3 到 $\mathfrak{g}_3$ 的映射

$$x=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3\to X=x_1M_1+x_2M_2+x_3M_3$$

是一一映射且具有性質:

1) 如 $x\to X$, $y\to Y$,则对任意 $\lambda,\mu\in C$, $\lambda x+\mu y\to\lambda X+\mu Y$;

2) 如 $x\to X$, $y\to Y$,则$[x, y]\to[X, Y]$.

这就是說, V_3 和 $\mathfrak{g}_3$ 具有相同的代数結构.

一般說来,从李代数 $\mathfrak{g}_1$ 到 $\mathfrak{g}_2$ 之上的一一映射 $X\to Y$, 称为**同构**,如果它满足下述条件:

1) 如 $X_1\to Y_1$, $X_2\to Y_2$,则对任意 $\lambda, \mu\in C$, $\lambda X_1+\mu X_2\to\lambda Y_1+\mu Y_2$.

2) 如 $X_1\to Y_1$, $X_2\to Y_2$, 则$[X_1, X_2]\to[Y_1, Y_2]$.

这时我們也說 $\mathfrak{g}_1$ 和 $\mathfrak{g}_2$ 同构, 記作 $\mathfrak{g}_1\approx\mathfrak{g}_2$. 特别, 从李代数 $\mathfrak{g}$ 到自身之上的同构称为**自同构**.

李代数的基本問題之一就是定出所有互不同构的李代数.

設 $\mathfrak{g}$ 是 r 維李代数,并設 $X_1,\cdots,X_r$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一組基. 假定

$$[X_i, X_j]=\sum_{k=1}^{r}c_{ij}^kX_k,\ 1\leqslant i,j\leqslant r,$$

则 $\mathfrak{g}$ 中任意两个元素的换位元素可利用 c_{ij}^k 这 r^3 个常数計算出来,即如 $X=\sum_{i=1}^{r}\lambda_iX_i$, $Y=\sum_{j=1}^{r}\mu_jX_j$, 则

$$[X, Y]=\sum_{i,j,k=1}^{r}\lambda_i\mu_jc_{ij}^kX_k. \tag{1}$$

这样, $c_{ij}^k(i, j, k=1, 2,\cdots, r)$ 这 r^3 个数就称为 $\mathfrak{g}$ 的一組結构常数. 不难驗証, $\mathfrak{g}$ 的一組結构常数 c_{ij}^k 满足以下关系式:

1)　$c_{ij}^k = -c_{ji}^k, \quad 1 \leqslant i, j, k \leqslant r$

2)　$\sum_{s=1}^{r} (c_{ij}^s c_{sk}^l + c_{jk}^s c_{si}^l + c_{ki}^s c_{sj}^l) = 0, \ 1 \leqslant i, j, k, l \leqslant r.$

反之，設 $\mathfrak{g}$ 是 r 維向量空間，$c_{ij}^k (i, j, k = 1, 2, \cdots, r)$ 是 r^3 个常数且滿足上述条件 1)和 2). 如果在 $\mathfrak{g}$ 中选一組基 $X_1, \cdots, X_r$，并利用(1)式來定义 $\mathfrak{g}$ 中两个元素 $X = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i X_i$ 和 $Y = \sum_{j=1}^{r} \mu_j X_j$ 的换位元素，可以証明 $\mathfrak{g}$ 对于这样定义的换位运算組成一个李代数.

显而易見，可选取同构的李代数的基，使它們可以有同一組結构常数，而且有相同的結构常数組的李代数必同构. 另一方面，李代数的結构常数組依賴于基的选取. 設 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_r$ 是 $\mathfrak{g}$ 的另一組基，假定

$$[Y_i, Y_j] = \sum_{k=1}^{r} c_{ij}'^k Y_k, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant r.$$

設

$$Y_i = \sum_{j=1}^{r} a_i^j X_j, \quad 1 \leqslant i \leqslant r,$$

而 $\det(a_i^j) \neq 0$，于是有

$$\sum_{k=1}^{r} c_{ij}'^k a_k^l = \sum_{s,t=1}^{r} a_i^s a_j^t c_{st}^l, \quad 1 \leqslant i, j, l \leqslant r. \tag{2}$$

因此，两个李代数同构当且仅当它們的結构常数組 c_{ij}^k 和 $c_{ij}'^k$ 适合关系式(2)，其中(a_i^j)为一非异矩陣.

最后，我們再举出下面的例子.

例 4. 設 $\mathfrak{gl}(n, C)$是 C 上所有 $n \times n$ 矩陣的集合. 我們知道 $\mathfrak{gl}(n, C)$ 对于矩陣加法及数乘矩陣的乘法組成 C 上的一个 n^2 維向量空間. 現在对于任意 $X, Y \in \mathfrak{gl}(n, C)$定义

$$[X, Y] = XY - YX,$$

則 $\mathfrak{gl}(n, C)$ 組成一李代数.

$\mathfrak{gl}(n, C)$ 亦可看作由 C 上某一 n 維向量空間 V 上的一切綫性变换所組成，这时常記作 $\mathfrak{gl}(V)$. 有时我們采用这一观点，有时則采用另一观点，讀者可从上下文自明，因而常不加特殊声明.

§2. 子代数，理想，商代数

設 $\mathfrak{g}$ 是李代数，$\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子集．以 $\mathfrak{m}+\mathfrak{n}$ 表由 $\mathfrak{g}$ 中一切形如 $M+N$ $(M\in\mathfrak{m}, N\in\mathfrak{n})$ 的元素所张成的向量子空間；以 $[\mathfrak{m}, \mathfrak{n}]$ 表由 $\mathfrak{g}$ 中一切形如 $[M, N]$ $(M\in\mathfrak{m}, N\in\mathfrak{n})$ 的元素所张成的向量子空間．設 $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{n}, \mathfrak{p}$ 都是 $\mathfrak{g}$ 的子空間，則有以下諸性質：

1） $[\mathfrak{m}_1+\mathfrak{m}_2, \mathfrak{n}]\subseteq[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{n}]+[\mathfrak{m}_2, \mathfrak{n}]$；

2） $[\mathfrak{m}, \mathfrak{n}]=[\mathfrak{n}, \mathfrak{m}]$；

3） $[\mathfrak{m}, [\mathfrak{n}, \mathfrak{p}]]\subseteq[\mathfrak{n}, [\mathfrak{p}, \mathfrak{m}]]+[\mathfrak{p}, [\mathfrak{m}, \mathfrak{n}]]$.

仍設 $\mathfrak{g}$ 是李代数．$\mathfrak{g}$ 的一个子空間 $\mathfrak{h}$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的一个子代数，如果 $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]\subset\mathfrak{h}$；換句話說，对任意 $X, Y\in\mathfrak{h}$ 总有 $[X, Y]\in\mathfrak{h}$．$\mathfrak{g}$ 的一个子空間 $\mathfrak{h}$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的一个理想，如果 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}]\subset\mathfrak{h}$；換句話說，对任意 $X\in\mathfrak{g}$, $Y\in\mathfrak{h}$，总有 $[X, Y]\in\mathfrak{h}$．$\mathfrak{g}$ 的理想自然是 $\mathfrak{g}$ 的子代数．如 $\mathfrak{h}_1$ 和 $\mathfrak{h}_2$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想，則 $\mathfrak{h}_1+\mathfrak{h}_2$ 和 $\mathfrak{h}_1\cap\mathfrak{h}_2$ 也是 $\mathfrak{g}$ 的理想．

$\mathfrak{gl}(n, C)$ 的子代数称为**矩陣李代数**，也称为**綫性李代数**．

設 $\mathfrak{h}$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的理想，象通常一样，可定义商空間 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$，它由 $\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{h}$ 的所有陪集（卽同余类）組成．如 $X\in\mathfrak{g}$，記 $\bar{X}=X+\mathfrak{h}$ 为 X 所属的 mod$\mathfrak{h}$ 的同余类，卽商空間 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 中的一个元素．定义

$$[\bar{X}, \bar{Y}]=\overline{[X, Y]}.$$

可以証明，这个定义与同余类中代表元素的选取无关．这样，商空間 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 对于如此定义的換位运算組成一个李代数，称为 $\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{h}$ 的**商代数**．

設 $\mathfrak{g}$ 是李代数，$\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想，于是可以定义一个从 $\mathfrak{g}$ 到商代数 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 之上的映射

$$X\to\bar{X}.$$

可以証明，这个映射滿足条件：

1） 如 $X\to\bar{X}$, $Y\to\bar{Y}$，則对任意 $\lambda, \mu\in C$, $\lambda X+\mu Y\to\lambda\bar{X}+\mu\bar{Y}$；

2） 如 $X \to \bar{X}$, $Y \to \bar{Y}$, 則 $[X, Y] \to [\bar{X}, \bar{Y}]$.

一般說来，从李代数 $\mathfrak{g}$ 到李代数 $\mathfrak{g}_1$ 之中的一个映射

$$X \to X_1$$

称为一个同态，如果它滿足条件：

1） 如 $X \to X_1$, $Y \to Y_1$, 則对任意 $\lambda, \mu \in C$, $\lambda X + \mu Y \to \lambda X_1 + \mu Y_1$;

2） 如 $X \to X_1$, $Y \to Y_1$, 則 $[X, Y] \to [X_1, Y_1]$.

如果这个同态是映上的，我們就說 $\mathfrak{g}_1$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个同态象.

定理 1. 从 $\mathfrak{g}$ 到它的商代数 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 之上的映射 $X \to \bar{X}$ 是一个同态，称为自然同态，而 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个同态象. 反过来，設

$$f: X \to X_1$$

是从李代数 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}_1$ 之上的一个同态，将同态的核記作 $\mathfrak{h}$（即 $\mathfrak{g}$ 中在同态之下映到 0 的元素的全体），則 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个理想，而

$$\bar{f}: \bar{X} \to f(X)$$

是商代数 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 到 $\mathfrak{g}_1$ 之上的同构（$\bar{f}$ 称为由 f 所誘导出来的自然同构）.

証. 只需要証明定理的第二部分. 先証 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想. 設 $X, Y \in \mathfrak{h}$, 即 $f(X) = f(Y) = 0$, 則

$$f(X + Y) = f(X) + f(Y) = 0 + 0 = 0,$$
$$f(\lambda X) = \lambda f(X) = \lambda \cdot 0 = 0, \text{对任意 } \lambda \in C.$$

于是 $X + Y \in \mathfrak{h}$, $\lambda X \in \mathfrak{h}$, 这証明了 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子空間. 再設 $X \in \mathfrak{g}$, $Y \in \mathfrak{h}$, 則

$$f([X, Y]) = [f(X), f(Y)] = [f(X), 0] = 0.$$

因之 $[X, Y] \in \mathfrak{h}$, 这証明了 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想.

其次証明 $\bar{f}$ 的定义不依賴于同余类中元素的选取. 設 X, Y 屬同一同余类，即 $\bar{X} = \bar{Y}$, 那么 $X - Y = H \in \mathfrak{h}$. 于是

$$f(X - Y) = f(H) = 0,$$

因之 $f(X) = f(Y)$, 所以 $\bar{f}(\bar{X}) = \bar{f}(\bar{Y})$.

最后証明 $\bar{f}$ 是个同构，設 $\bar{X}, \bar{Y} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, 則

$$\bar{f}(\bar{X}+\bar{Y}) = f(X+Y) = f(X)+f(Y) = \bar{f}(\bar{X})+\bar{f}(\bar{Y}),$$
$$\bar{f}(\lambda\bar{X}) = f(\lambda X) = \lambda f(X) = \lambda\bar{f}(\bar{X}),\text{对 } \lambda\in C,$$
$$\bar{f}([\bar{X},\bar{Y}]) = f([X,Y]) = [f(X),f(Y)] = [\bar{f}(\bar{X}),\bar{f}(\bar{Y})].$$

因此 $\bar{f}$ 是同态. 再設 $\bar{f}(\bar{X}) = \bar{f}(\bar{Y})$，而 $\bar{X},\bar{Y}\in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$，那么

$$f(X-Y) = f(X)-f(Y) = \bar{f}(\bar{X})-\bar{f}(\bar{Y}) = 0.$$

于是 $X-Y\in\mathfrak{h}$，因之 $\bar{X}=\bar{Y}$. 这証明了 $\bar{f}$ 是一一对应，因而是同构.

这样定理 1 就完全証明了.

为了說明以上概念，举出下面一些例子.

例 5. $\mathfrak{gl}(n, C)$ 中所有迹为 0 的矩陣組成一个子代数，記作 A_{n-1}. 实际上，A_{n-1} 还是 $\mathfrak{gl}(n, C)$ 的理想，因为，如 $X, Y\in\mathfrak{gl}(n, C)$，則

$$\mathrm{Tr}[X, Y] = \mathrm{Tr}(XY-YX) = 0,$$

故 $[X, Y]\in A_{n-1}$.

$\mathfrak{gl}(n, C)$ 中所有純量矩陣組成一个一維子代数，它也是 $\mathfrak{gl}(n, C)$ 的理想，因为，如 λI 为純量矩陣，則对任意 $X\in\mathfrak{gl}(n, C)$ 都有

$$[X, \lambda I] = X\cdot\lambda I - \lambda I\cdot X = 0.$$

$\mathfrak{gl}(n, C)$ 中所有对角矩陣組成一个 n 維交換子代数，記作 $\mathfrak{d}(n, C)$. $\mathfrak{gl}(n, C)$ 中所有迹为 0 的对角矩陣組成 A_{n-1} 的一个 $n-1$ 維交換子代数.

例 6. 設 M 是 $n\times n$ 矩陣. 适合条件

$$XM + MX' = 0$$

的一切 $n\times n$ 复系数矩陣 X 組成一个綫性李代数. 实际上，从 $XM+MX'=0$ 及 $YM+MY'=0$ 推出

$$\begin{aligned}[X, Y]M + M[X, Y]' &= (XY-YX)M + M(XY-YX)' \\ &= XYM - YXM + MY'X' - MX'Y' \\ &= -XMY' + YMX' - YMX' + XMY' = 0.\end{aligned}$$

这个李代数記作 $\mathfrak{g}(n, M, C)$. 容易驗証，如 M_1 和 M_2 合同，則 $\mathfrak{g}(n, M_1, C)$ 与 $\mathfrak{g}(n, M_2, C)$ 同构.

$\mathfrak{g}(n, M, C)$ 有以下重要特例:

設M是一个非奇异对称矩陣, 这时我們得到正交代数. 因任一复系数的非奇异对称矩陣皆与单位矩陣合同, 因此正交代数可看作由所有斜对称矩陣組成. 另外, 任一复系数的非奇异对称矩陣或者合同于

$$\begin{pmatrix} 0 & I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}, \text{如 } n = 2m \text{ 是偶数},$$

或者合同于

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_m \\ 0 & I_m & 0 \end{pmatrix}, \text{如 } n = 2m+1 \text{ 是奇数}.$$

因此正交代数分成两个系列, 当 $n = 2m+1$ 是奇数时記作 B_m, 而当 $n = 2m$ 是偶数时記作 D_m.

設M是非奇异斜对称矩陣,这时 n 一定是偶数 $n = 2m$. 任一非奇异斜对称矩陣皆合同于

$$\begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix},$$

相应的代数称为辛代数,記作 C_m.

李代数 A_n, B_n, C_n 和 D_n 統称**典型李代数**.

§3. 单 代 数

設 $\mathfrak{g}$ 是李代数,显然 $\mathfrak{g}$ 本身以及仅由零向量組成的子代数$\{0\}$是 $\mathfrak{g}$ 的理想. 如果 $\mathfrak{g}$ 除了这两个理想之外,不再有其它的理想,就說 $\mathfrak{g}$ 是个**单李代数**.

显然一維李代数是单李代数,而維数大于1的交换李代数一定不是单李代数. 因此,除了一維代数之外,单李代数都不是交换的.

定理 2. 代数 $A_n(n \geqslant 1)$, $B_n(n \geqslant 1)$, $C_n(n \geqslant 1)$和$D_n(n \geqslant 3)$都是单李代数.

証. 我們先来逐一研究 A_n, B_n, C_n 和 D_n 的結构公式.

(A_n) 令 $m = n+1$. 全体迹为 0 的 $m \times m$ 矩陣組成的李代

数就是 A_n，其維数为 n^2+2n. 令

$$H_{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_m\end{pmatrix},$$

则所有 $H_{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m}$(而 $\sum_1^m \lambda_i=0$)的集合組成一个 n 維交換子代数 $\mathfrak{h}$. 以 E_{ik} 表 i 行 k 列位置上的元素为 1 而其余位置的元素皆为 0 的矩陣，再令

$$H_{\lambda_i-\lambda_k}=E_{ii}-E_{kk},\quad (i\neq k)$$
$$E_{\lambda_i-\lambda_k}=E_{ik},\quad (i\neq k)$$

则 $\mathfrak{h}$ 与所有 $E_{\lambda_i-\lambda_k}(i\neq k,\ i,\ k=1,\ 2,\cdots,\ m)$ 的綫性組合即是 A_n. $\lambda_i-\lambda_k(i\neq k, i, k=1,2,\cdots,m)$称为 A_n 的根. 如果 $n\geqslant 2$，则 A_n 的任意一个根皆可从 A_n 的任一个固定的根經逐次添加 A_n 的根得到. A_n 的結构公式是

$$\left.\begin{array}{ll}[H_1, H_2]=0, \text{对任意 } H_1, H_2\in\mathfrak{h}, & \\ [H_{\lambda_1\cdots\lambda_m}, E_\alpha]=\alpha E_\alpha, & \text{对任一根 }\alpha\\ [E_\alpha, E_{-\alpha}]=H_\alpha, & \text{对任一根 }\alpha\\ [E_\alpha, E_\beta]=\begin{cases}0 & ,\text{若 }\alpha+\beta\text{ 不是根}\\ \pm E_{\alpha+\beta}, & \text{若 }\alpha+\beta\text{ 是根}\end{cases} & \end{array}\right\}\qquad(1)$$

(B_n) 令 $m=2n+1$. 命

$$S=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & I^{(n)}\\ 0 & I^{(n)} & 0\end{pmatrix},$$

于是一切 $m\times m$ 的矩陣 X 适合条件

$$XS+SX'=0$$

者組成李代数 B_n. 将 $m\times m$ 矩陣 X 作与 S 同样的分块

$$X=\begin{pmatrix}a & u & v\\ w & A_{11} & A_{12}\\ z & A_{21} & A_{22}\end{pmatrix},$$