数学趣题巧解

〔美〕查·特里格 编

郑元禄编译

福建人民出版社

1983.福州

数学趣题巧解

〔美〕查·特里格编
郑元禄编译

*

福建人民出版社出版
（福州得贵巷27号）
福建省新华书店发行
福安印刷厂印刷
开本787×1092毫米1/32 6.75印张 147千字
1983年10月第1版
1983年10月第1次印刷
印数：1—26,700
书号：7173·591 定价：0.60元

翻 译 说 明

本书是根据美国著名数学教育家查·特里格编著的《数学机敏》一书编译而成的。这是一本饶有趣味的数学读物，而不是普通的习题集。

原书收集的趣味数学问题及其解答，都是编著者从1932—1972年《美国数学月刊》等五种杂志上几千道题中挑选出来的。这些题目不仅类型广泛多样，较全面地包含了初等数学的内容，而且还有一定的思考性、综合性。许多问题初看似乎很难，需要用复杂的方法去解。但是，编著者充分应用各种数学知识，打破常规，广开思路，从各个角度去认真思索，别出心裁，巧辟捷径，使许多表面上看十分棘手的问题迅速迎刃而解，颇出人意外。阅读此书，我们既可学习许多解题技巧，增长数学知识，加强思维锻炼，培养分析问题和解决问题的能力，又可感受到解数学题的乐趣。

但是，原书内容过于庞杂，题目深浅悬殊，有的解题过程因过于简单而令人费解。提交正式出版时，为了弥补这些不足，故采用编译形式，对原书内容进行了删减，只保留其中的350道题，并对有些题目的解题过程作了必要的补充和注释，然后按其内容分为代数、平面几何，立体几何、解析几何和平面三角五章。

本书适合中等以上文化程度的读者阅读，同时也是中学数学兴趣小组和数学墙报的有益的参考材料。

本书的翻译工作得到了有关方面的热情支持，林仁荣和许秉瑢两同志提出了宝贵意见，在此一并表示深切的感谢。

限于水平，译文难免有缺点错误，恳望读者批评指正。

郑 元 禄

1983.1.

目　录

1

代　数

1. 证明：当 n 为任意整数时，表达式 n^5-n 可被 30 整除.

证 1　一个整数和它的五次幂总以同一数字为个位数．因此，n^5-n的值以 0 为个位数，故可被 2 和 5 整除.

其次，将n^5-n分解成因数

$$(n-1)n(n+1)(n^2+1),$$

显然，前三个因数之一必定可被 3 整除.

因此，n^5-n可被$2\cdot 3\cdot 5=30$整除.

证 2

$$\begin{aligned} n^5-n &= n(n^2-1)(n^2+1) \\ &= n(n^2-1)[(n^2-4)+5] \\ &= n(n^2-1)(n^2-4)+5n(n^2-1) \\ &= (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) \\ &\quad +5(n-1)n(n+1). \end{aligned}$$

五个连续整数可被 $2\cdot 3\cdot 5=30$ 整除；三个连续整数可被$2\cdot 3=6$整除，再乘以 5 可被30整除.

因此，n^5-n可被30整除.

2. 设$a-1$与$a+1$都是大于10的素数（这对素数称为孪生

素数），证明：a^3-4a可被120整除．

证 先证一个更强的结论．为此注意，数

$$(a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)$$

是五个连续整数的乘积，从而其中一个因数可被 3 整除，另一个因数可被5整除．若$a-1$与$a+1$都是素数，则$a-2$，a，$a+2$是连续偶数，因而其中至少有一个可被 4 整除，其余两个可被 2 整除．因此，与大于 5 的两个孪生素数相邻的三个整数之积可被

$$3\cdot5\cdot4\cdot2\cdot2=240$$

整除．换句话说，a^3-4a可被240整除．

实际上，如果 a 是一个奇数的 2 倍，例如42，那么a^3-4a可被 240 整除．在最后这种情形下，孪生素数是 $6k-1$ 与 $6k+1$，其中 k 是奇数．

3．证明：大于 $(\sqrt{3}+1)^{2m}$的最小整数可被2^{m+1}整除（m是正整数）．

证 考虑表达式

$$I=(\sqrt{3}+1)^{2m}+(\sqrt{3}-1)^{2m}.$$

因为

$$\begin{aligned}I&=(4+2\sqrt{3})^m+(4-2\sqrt{3})^m\\&=2^m[(2+\sqrt{3})^m+(2-\sqrt{3})^m]\\&=2^{m+1}[2^m+2^{m-2}\cdot\frac{3m(m-1)}{2}+\cdots],\end{aligned}$$

所以此式是一个可被2^{m+1}整除的整数．

因为

$$(\sqrt{3}-1)^{2m}<1,$$

所以 I 与大于 $(\sqrt{3}+1)^{2m}$的最小整数相等，命题得证．

4．证明：当$n=0$，1，2，…时，数$2^{5n+1}+5^{n+2}$可被27

整除.

证 要证明命题成立，只需注意

$$2^{5n+1}+5^{n+2}=2(27+5)^n+5^n(27-2)=27k.$$

5. 设a，m，n都是正整数，且n是奇数. 证明：a^n-1与a^m+1的最大公因数不大于2.

证 设d是a^n-1与a^m+1的最大公因数. 于是存在整数k与r，使等式

$$a^n=kd+1,\quad a^m=rd-1$$

成立.

因此，对于某个整数t，

$$a^{mn}=(a^n)^m=(kd+1)^m=td+1;$$

对于某个整数u，

$$a^{mn}=(a^m)^n=(rd-1)^n=ud-1,$$

其中n是奇数.

因此

$$td+1=ud-1,$$

即

$$(u-t)d=2.$$

由此得出 $d=1$ 或 $d=2$.

6. 试求一个数，使1108，1453，1844，2281被它除时，有相同的余数.

解 因为

$$1453-1108=345,$$
$$1844-1453=391,$$
$$2281-1844=437,$$

而

$$437-391=391-345=46=2\cdot 23;$$

又因为若要有相同的余数，则所求的除数一定是奇数，所以由关系式

$$(N_1d+r)-(N_2d+r)=d(N_1-N_2)$$

得知所要求的数为23，余数都是4．

7．设 $\overline{abc}=100a+10b+c$．试求一个由互不相同的非零数字组成的九位数，使它的平方根具有 $\overline{ababc}$ 的形式，其中 $\overline{ab}=c^3$．

解 由 $\overline{ab}=c^3$ 知 c 只可能是数3或4．若 $c=4$，则 64644^2 是一个十位数．因此，本题只有唯一解：

$$27273^2=743816529.$$

8．试求两个数，使它们的差与商都是5．

解 因为两个数的商为5，所以它们的差中，较大的数比较小的数大4倍．因此，较小的数为 $\frac{5}{4}$，较大的数为 $\frac{25}{4}$．

一般说来，如果

$$x-y=\frac{x}{y}=a,$$

那么

$$x=\frac{a^2}{a-1}, \qquad y=\frac{a}{a-1}.$$

9．取一个以任意进位制写成的数，再把它的数字以任意的方式重新排列．证明：这两个数之差可被比这进位制的底数小1的数整除．

证 如果进位制的底数为 b，那么这个数可以写成

$$\sum_{i=0}^{n} a_i b^{n-i}.$$

以 a_{i_p} 表示重新排列后，在位置 a_i 上的数字，于是这两个

数之差为

$$\sum_{i=0}^{n} a_i b^{n-i} - \sum_{i=0}^{n} a_{i_p} b^{n-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (a_i - a_{i_p}) b^{n-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (a_i - a_{i_p})(b^{n-i} - 1) + \sum_{i=0}^{n} (a_i - a_{i_p}).$$

显然，后面一项和式的值为0．可以用归纳法证明：当$i=0$，1，…，n时，$b^{n-i}-1$可被$b-1$整除．命题得证．

10．在哪一种进位制中，数35与58是互质的？

解 以(x, y)表示x和y的最大公因数，于是

$$(35, 58)=(35, 23)=(12, 23)$$
$$=(12, 11)=(1, 11)=1.$$

因此，在任何底数大于8的进位制中，数35与58是互质的．

11．证明：不存在这样的三个连续奇数，使得其中每个数是两个非零平方数之和．

证 每个整数可写成下列形式之一：

$$4k,\ 4k+1,\ 4k+2,\ 4k+3.$$

因此，整数的平方可表示为$4k$或$4k+1$．两个这样的平方数之和可以写成$4k$或$4k+1$或$4k+2$．任意一个奇数可写成$4k+1$或$4k+3$．因此，不仅在三个甚至在两个连续奇数之间，一定有一个数不能表示成为两个平方数的和．

12．设a，b，c是不为1的互质整数，令$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$．证明：$a+b$，$a-c$和$b-c$都是完全平方数．

证 如果

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c},$$

那么

$$a+b=\frac{ab}{c}.$$

因为 a 和 b 都是整数，所以 c 可以分解为乘积．例如 $c=qr$，其中一个因数可以整除 a，另一个可以整除 b，于是

$$a=mq,\ b=pr.$$

因此

$$mq+pr=\frac{mpqr}{qr}=mp.$$

因 a，b，c 互质，故 m 与 r 互质（即 m 整除 p），p 与 q 互质（即 p 整除 m）．因此，$m=p$．

从而

$$p(q+r)=p^2,\ q+r=p.$$

由此得

$$a+b=pq+pr=p(q+r)=p^2,$$
$$a-c=pq-qr=q(p-r)=q^2,$$
$$b-c=pr-qr=r(p-q)=r^2.$$

13．是否存在这样的五个连续整数，使得前四个数的四次幂之和等于第五个数的四次幂？

解 可以把任一偶数 $2n$（n 为正整数）的四次幂 $(2n)^4$ 表示为 $4k$（k 为正整数）．把任一奇数 $2n+1$ 的四次幂 $(2n+1)^4$ 表示为 $4k+1$．因此，任意四个连续整数的四次幂之和是 $4k+2$，显然不等于第五个整数的四次幂．所以不存在这样的五个连续整数．

14．证明：存在无穷多个素数．

证 假设不然，存在一个最大素数 p．考虑这样一个数，它比不大于 p 的所有素数的乘积大 1，即

$$Q=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots\cdots p+1.$$

因为Q不能被上面乘积中的任一素数整除（Q被其中任一素数除时，余数为1），所以Q是素数，而$Q>p$，矛盾.

因此不存在最大的素数，即素数有无穷多个.

√**15.** 证明：如果一个直角三角形的边长都是整数，那么它的两条直角边长不能用孪生素数表示.

证 设p和$p+2$是这样的两个孪生素数，使得

$$p^2+(p+2)^2=k^2,$$

其中k是整数，p是奇数，于是

$$2p^2+4p+4=k^2$$

由此得出k^2（即k）是偶数.

设$k=2n$，那么上式可改写成

$$2p^2+4p+4=4n^2,$$

即

$$p^2+2p+2=2n^2.$$

此式左边是奇数（因p是奇数），右边是偶数，因此，这个等式是矛盾的. 命题得证.

16. 设p_1和p_2是两个连续奇素数，而$p_1+p_2=2q$. 证明：q是一个合数.

证 数

$$q=\frac{p_1+p_2}{2}$$

是p_1和p_2的算术平均值，从而$p_1<q<p_2$. 又p_1和p_2是连续素数，因此q是一个合数.

√**17.** 试求数1000027的素因数.

解 $1000027=100^3+3^3$

$$=(100+3)(10000-300+9)$$

$$=103\cdot 9709$$
$$=103\cdot 7\cdot 1387$$
$$=103\cdot 7\cdot 73\cdot 19.$$

18. 试证 $2222^{5555}+5555^{2222}$ 可被 7 整除.

证 原数可改写成

$$2222^{5555}+5555^{2222}$$
$$=(2222^{5555}+4^{5555})+(5555^{2222}-4^{2222})$$
$$-(4^{5555}-4^{2222}).$$

考虑三个括号内的数. 因当 n 为奇数时，a^n+b^n 可被 $a+b$ 整除，故第一个括号内的数可被

$$2222+4=2226=7\cdot 318$$

整除. 因 a^n-b^n 可被 $a-b$ 整除，故第二个括号内的数可被

$$5555-4=5551=7\cdot 793$$

整除. 第三个括号内的数可写成

$$4^{2222}(4^{3333}-1)=4^{2222}(64^{1111}-1).$$

此数显然可被

$$64-1=63=7\cdot 9$$

整除.

因此，原数可被 7 整除.

19. 四个连续奇数的乘积等于哪个平方数?

解 如果 n 是一个奇数，并且

$$n(n+2)(n+4)(n+6)=m^2,$$

那么

$$(n^2+6n+4)^2=m^2+16.$$

因为在平方数中，只有 0 和 9 才具有 a^2-16 的形式，而 m^2 是奇数，所以要求的平方数应为

$$9=(-3)(-1)(1)(3).$$

20. 设 $\overline{abc}=100a+10b+c$. 试求一个形如 $\overline{a_1a_2a_3b_1b_2b_3a_1a_2a_3}$ 的九位数，使此数是四个不同素数的平方之积，并且

$$\overline{b_1b_2b_3}=2(\overline{a_1a_2a_3})\quad(a_1\neq 0).$$

解 注意，设该数为N^2，则有

$$\begin{aligned}N^2&=\overline{a_1a_2a_3b_1b_2b_3a_1a_2a_3}\\&=\overline{a_1a_2a_3}\cdot 1002001\\&=\overline{a_1a_2a_3}\cdot 7^2\cdot 11^2\cdot 13^2.\end{aligned}$$

因此，数 $\overline{a_1a_2a_3}$ 等于素数 p 的平方，其中 $p\neq 7$，11和13；其次

$$a_1\neq 0,\quad \overline{b_1b_2b_3}<1000,$$

因此

$$10<p<23,\ p=17\ 或\ 19,$$

$$\overline{a_1a_2a_3}=289\ 或\ 361.$$

从而本题有两解：

$$N^2=289578289\ 或\ 361722361.$$

21. 证明：对于任意一个正整数 n，数

$$n^4+2n^3+2n^2+2n+1$$

都不能是一个完全平方数.

证 因为

$$\begin{aligned}(n^2+n)^2&=n^4+2n^3+n^2\\&<n^4+2n^3+2n^2+n+1\\&<n^4+2n^3+3n^2+2n+1\\&=(n^2+n+1)^2,\end{aligned}$$

所以题中所给的数介于两个连续平方数之间，它不可能是一个完全平方数.

22. 数11111在哪种进位制中是一个完全平方数？

解 如果进位制的底数是B，$B>1$，那么可以写出

$$11111=B^4+B^3+B^2+B+1.$$

其次

$$\left(B^2+\frac{B}{2}\right)^2<B^4+B^3+B^2+B+1<\left(B^2+\frac{B}{2}+1\right)^2,$$

如果中项是一个完全平方数，那么应当满足等式

$$\left(B^2+\frac{B}{2}+\frac{1}{2}\right)^2=B^4+B^3+B^2+B+1,$$

从而

$$\frac{B^2}{4}-\frac{B}{2}-\frac{3}{4}=0,$$

$$(B-3)(B+1)=0.$$

因为$B>1$，所以$B=3$，得$11111=102^2$.

23. 证明：在十进制中，用两个或两个以上数字写成的任一完全平方数至少包含两个不同的数字.

证 对十进制的平方表的研究表明：

(1) 平方数只能以0，1，4，5，6或9作为末位数；

(2) 如果平方数的个位数是6，那么它的十位数是奇数，否则相应的数字是偶数.

$N\cdots$	10	11	12	13	14	15	16	17	18	$19\cdots$
$N^2\cdots$	100	121	144	169	196	225	256	289	324	$361\cdots$

因此，平方数的所有数字都不能相同，只要它们不等于4（由一个0组成的平方数显然没有意义）．但是

$$\cdots444=4(\cdots111),$$

因为括号内的数的十位数字是奇数，所以得出结论：在十进制中，任一平方数都不可能由相同的数字组成.

24. 证明：用奇数底数的进位制写成的整数，当且仅当

它含有奇数个奇数数字时，才是奇数.

证 在以 r 为底数的进位制中，任何一个数可表示为

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n r^0.$$

如果在几个整数的乘积中，只要有一个因数是偶数，那么乘积是偶数；相反，它是奇数. 其次，如果 r 是奇数，那么 r^k 也是奇数. 因此，上述和中的每个加数 $a_k r^{n-k}$ 的奇偶性与 a_k 的奇偶性一致

如果把任意个偶数或偶数个奇数相加，那么和是偶数；如果把奇数个奇数相加或把偶数与奇数相加，那么和是奇数. 因此，用奇数底数的进位制写成的整数，当且仅当它含有奇数个奇数数字时，才是奇数.

25. 在十进制中，以如下方式构成一个小数：

$$x = x_0 . x_1 x_2 x_3 \cdots.$$

设 $x_0 = 1$，x_n 是 $x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}$ 被 9 除时所得的最小正余数. 证明：x 是有理数.

证 由等式

$$\begin{aligned} 9n + x_{k+1} &= x_k + x_{k-1} + \cdots + x_1 + x_0 \\ &= x_k + x_k + 9m \end{aligned}$$

容易看出，x_k 是

$$2^{k-1} x_0 = 2^{k-1}$$

被 9 除时的余数.

现在来证明一个更一般的结果. 考虑由数 $r^k x_0$ 除以 n 所得余数组成的数列 $\{x_{k+1}\}$. 在以 $b > n$ 为底数的进位制中，借助于这个数列写出数 $x_0 . x_1 x_2 x_3 x_4 \cdots$. 因为不同余数的个数是有限的，所以至少存在两个相等的数字 x_k 和 x_{k+p}.

因此

$$x_{k+j} = r^j x_k + np = r^j x_{k+p} + np$$

$$=x_{k+p+j}+nm,$$

其中$j=0$，1，…，$p-1$. 由此得出等式

$$x_{k+j}=x_{k+p+j},$$

因为$0\leqslant x_i\leqslant n-1$，所以，数$x_0.x_1x_2x_3x_4\cdots$由有$p$个数字的重复循环节组成，是有理数.

26. 试求这样的六个不同的最小整数，使得其中任意五个数的乘积等于第六个数的倒数用循环小数表示时的循环节. 例如41的倒数写成的小数是

$$\frac{1}{41}=0.0243902439\cdots,$$

那么这个循环节等于02439.

解 如果b表示a的倒数写成的循环小数，那么乘积ab的所有数字都是9.

其次

$$99=9\cdot 11,\quad 999=3\cdot 9\cdot 37,$$

$$9999=9\cdot 11\cdot 101,\quad 99999=9\cdot 41\cdot 271,$$

$$999999=3\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot 13\cdot 37.$$

最后六个数3，7，9，11，13，37就是所求的满足题设条件的最小整数. 实际上

$$\frac{1}{3}=0.333333\cdots\quad \frac{1}{7}=0.142857\cdots,$$

$$\frac{1}{9}=0.111111\cdots,\quad \frac{1}{11}=0.090909\cdots,$$

$$\frac{1}{13}=0.076923\cdots,\quad \frac{1}{37}=0.027027\cdots.$$

27. 证明：在十进制中，不能用五个同时是偶数或同时是奇数的不同数字写出任一完全平方数.

证 只有两组由五个不同偶数或奇数组成的数字：0，

2，4，6，8和1，3，5，7，9.

每个完全平方数的数字之和被9除时得余数 0，1，4，或7．但是上面第一组数字之和被9除时得余数2，这就是说，这组数字不能组成五位的平方数.

如果一个完全平方数的个位数字是奇数，那么它的十位数字一定是偶数(证明见下段)．但是第二组数字没有偶数，因此，第二组的数字也不能组成五位的平方数.

设某数N的个位数是奇数x，则$N=10k+x$，于是

$$N^2=100k^2+20kx+x^2.$$

因而N^2的十位数字是将x^2项中的十位数字与$20kx$项中的十位数字相加而得的．由直接检验可知，奇数数字x的平方有偶数的十位数字，$20kx$的十位数字也是偶数,所以$20kx+x^2$的十位数字是偶数．因此，N^2的十位数字也是偶数.

28．设$0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1$是单位圆上的n个分点(不一定是等分点)．证明或推翻下列命题：存在这样一个合数m，使得在每个区间$[x_i, x_{i+1}]$ ($i=0, 1, \cdots, n-1$)上至少包含一个形如$\frac{r}{m}$的既约分数.

证 取这样一个素数p，使

$$\frac{2}{p}<\min(x_{i+1}-x_i).$$

根据这种取法,在每个区间$[x_i, x_{i+1}]$上至少包含两个形如$\frac{k}{p}$的数，以$\frac{k}{p}$和$\frac{k+1}{p}$表示任意两个这样的连续的数.

因为 $$\frac{k}{p}=\frac{kp}{p^2}<\frac{kp+1}{p^2}<\frac{kp+p}{p^2}=\frac{k+1}{p},$$