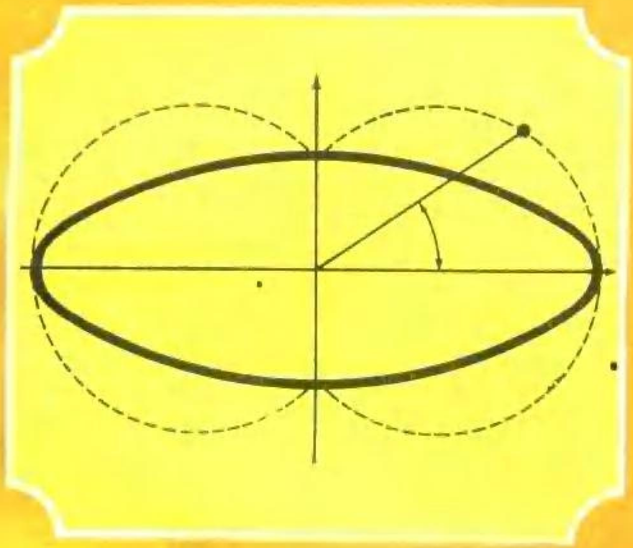

〔加〕Edward M·Mikhail
Gordon Gracie

测量数据分析与平差

测绘出版社

测量数据分析与平差

[加] Edward M.Mikhail
Gordon Gracie

游祖吉　鲁林成
吴俊昶　于正林　译
章书寿　白忠良
於宗俦　校

测绘出版社

本书以通俗的语言，丰富的实例详述了测量数据分析与平差的基础知识。包括观测误差及其传播，常用最小二乘法，精度估算，概率论及统计分析初步，最小二乘法的应用等内容。每章末附有习题，供读者练习。

本书可作为测绘专业在校学生及生产人员的参考用书。

测量数据分析与平差

[加]Edward M.Mikhail　Gordon Gracie 著

游祖吉　鲁林成　吴俊昶
于正林　章书寿　白忠良 译

於宗俦 校

*

测绘出版社出版

测绘出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

*

开本 850×1168　1/32 · 印张 10 · 字数 250 千字

1987 年 10 月第一版 · 1987 年 10 月第一次印刷

印数 0,001—3,300 册 · 定价 2.50 元

ISBN 7-5030-0000-7/P·1

统一书号：15039 · 新 625

序

本书是响应1977年6月在加拿大新不伦瑞克省弗雷德里顿召开的第九届国家测量教育会议的建议而编写的。会议的主题是测量原始资料的整理及平差。在考察了有关测量数据平差的现有资料之后，认为有必要编写一本概述性的新书。因此，准备将本书写成一本满足这一需要的通俗易懂和具有引导作用的书。

作者也注意到有许多从事测量工作的人员都渴望获得测量数据的分析与平差的基础知识，过去由于没有适当的著作而无法实现这一愿望。因此，本书既是为在校学生，也是为从事测量工作的人员而编写的。实际上，书中系统地阐述各个专题的方法，使得对经常进行测量数据分析与平差的人员来说，该书成为一本极为方便有用的参考书。

本书内容是这样编排的，即从非常简单的概念和方法逐渐地过渡到比较复杂的方法。书中假定读者已具备了测量学所需要的初等代数、几何及微积分的知识。对于测量工作者日益成为一般性工具的矩阵代数，逐步顺序地引入并贯穿于全书。对于没有矩阵代数预备知识的读者，可以通过附录A*进行自学。要不然，可以在正规课程里，或在专业人员的讲习班上，利用几节课通过附录A来介绍矩阵代数的知识。

本书共十章。第一章介绍一些有关观测、误差、概率及可靠性的基本概念，最后对有效数字作一简要的论述。第二章向读者介绍已知误差的传播以及重要的线性化方法。第三章先从简易平

* 附录A已删去，读者若需要，可参阅有关书籍.以后不一一说明.——译注.

差法开始，然后引入最小二乘法来介绍平差的概念。在这里不准备介绍权，也不打算作很多推导，而是通过几个实际例子来解释最小二乘原理，以便读者在没有许多数学分析的困扰下来掌握最小二乘平差的概念和原理。在第四章中向读者介绍两种基本的最小二乘平差法（间接观测平差法及观测值平差法*）的数学推导以及权的概念。正如全书一样，第四章中也有许多数字实例。

准备在第四章之后，即在第五章中向读者介绍概率的基本概念。在本章中，仍然极少进行推导，而举很多的实例。本章涉及诸如随机变量、概率分布、期望、方差与协方差等基本内容，最后介绍抽样的概念。这为读者学习第六章作好了准备。第六章包括方差-协方差的传播。除推导传播律之外，还包括把方差-协方差传播律应用于第四章所介绍的两种最小二乘平差法。有了传播律的知识读者就能理解和体会第七章中的测量精度估算问题。由于该专题内容相当广泛，这里仅给出初步介绍。

由于在二年制、三年制或四年制的技术大纲中，这门课程不能安排更多的时间，所以本书前七章内容可以作为学时较少的及初级课程的基本内容，也可以用于为测量工作者举办的1～2周的集中课程或专业讲习班。对于要求学习更多内容的土地测量、工程测量或测量科学技术的专业大纲，课程内容可以扩充，即包括第八、九、十章。

第八章是以前面各章为基础的，它介绍可以用于测量分析中的成熟的统计学概念，包括抽样分布及统计量，统计估计与检验以及误差椭圆等。在介绍这些内容时，强调的是它们在测量中的应用。第九章介绍了通用最小二乘平差法，并建立了此方法与第

---

* 原文"Adjustment of Observations only"可直译为"仅有观测值的平差法"，它是指在条件方程中不包含任何未知参数的平差方法，在一般文献中均称此法为"条件平差法"或"条件观测平差"。本书译文中，为了简便起见，将它译成"观测值平差法"——译注。

四章中介绍的两个基本平差方法之间的关系。第十章是本书的最后一章，介绍有关平面坐标测量的一些应用。

G.Warren Marks 博士讨论了本书的内容并为它的完成不断地给予很多鼓励，作者对他的帮助深表谢意。本书采用了Purdue大学和Toronto 大学同事们的习题，对他们的帮助也深为感谢。作者也很感谢 Bonnie Stiff 夫人耐心而努力地打印出最后手稿，以及 D.Schwartz，J.Thurgood 和F.Paderes 帮助编排和校对。对于 LaVerne 夫人和 Ankie 夫人表示特别的感激，她们在本书的整个准备工作期间毫无怨言地和我们一起工作。

Edward M.Mikhail
Gordon Gracie

目　录

第一章

绪论

1.1 测量及误差的概念

测量工作者可能需要完成与某一测量项目有关的各种任务，包括从初步方案的设计直到按某些规定的格式提交出最后成果。但是测量工作者所做的许多工作都要涉及到测量数据，包括在室内对测量数据进行分析和平差以及在野外测出成果。因此，测量工作者想要敏捷地测得成果并对其进行平差和分析，就必须懂得测量的过程是怎样的。

测量一定与观测有关。不对某一物体进行观测就没有观测数据。因此，**测量**和**观测**这两个术语常常用作同义语。

尽管我们可以把一次测量看作单一的行动，但是一个特定的测量过程可能包含着若干个基本操作，诸如对中、照准、配置、安置以及读数这样一些细致的操作。而在完成这些操作之后，只是用一个数值来表示所求量的“测量值”或“观测值”。

例如，看一个相当简单的作业过程。用30m长的钢尺悬空丈量相隔略短于20m的两点间的距离，就要进行以下这些基本操作：

1. 前后司尺员站在靠近各自端点的位置上，悬空拉着钢尺，使其大致位于两点间的直线上；

2. 后司尺员悬空拿着垂球，使垂球绳对准和保持在20m刻划处；

3. 然后，后司尺员将垂球对准后端点；

4. 前司尺员悬空拿着垂球，使垂球绳保持在零刻划附近，并对卷尺施加拉力（当然，后司尺员在保持他的垂球对准端点的同时，必须以相反的方向同时施加拉力）；

5. 在保持拉力的同时，前司尺员沿着卷尺移动他的垂球绳直到垂球对准端点时为止；

6. 然后，前司尺员在卷尺上读出垂球绳的位置；

7. 从步骤2所确定的20m数值中减去步骤6的卷尺读数，便得到实测距离。

显然，第2,3,5,6各步分别是安置、对中、对中及读数这样一些细致的操作。所有这些都是获得两端点间距离的一个测量值所必需的。这清楚地说明，即使是一个简单的测量，也可能包含着若干个基本操作。同时说明，作为待求量的一个观测值，例如两点间的距离，并非只是刻划的一次简单的读数，而是观测过程中几个步骤的结果。

即使是步骤1到7也还不是为取得一个可靠的距离测量值的全部操作。对于某些目的而言，由步骤7所得的数值可能是适用的；但对另一些目的而言则不然。如果需要一个“更好”的观测值，那么，还要对步骤7得到的数值进行尺长、温度和垂曲等等的改正。要求出这些相应的改正数，还需要观测更多的量，因为钢尺一定要和标准尺比较，要从温度计上读出温度，要从拉力计或类似装置上读出对钢尺施加的拉力。对于一个精密的测量结果来说，这些改正以及其他改正都是和步骤1到7同样的重要。可见，一个观测值的确是几个操作的结果，而每个操作都对观测值的最终可用性产生一些影响。

测量是一个受偏差支配的过程。如果测量中的某个方面未加考虑，例如没有考虑温度，就会出现偏差。例如，用钢尺对两点间的距离进行若干次测量，若在丈量的过程中温度发生了变化，那么钢尺的长度将有相应的改变，因而钢尺上的读数也有相应的改变。如果对温度的影响不进行改正，则所得的测量结果将出现由于

温度变化而造成的偏差。偏差也是各个操作本身的必然结果。由于受到所用仪器的限制，以及受到观测者的对中、照准、配置、安置和读数能力的限制，没有任何观测值能够恰好重复。许多基本操作中发生的微小变化都会在观测值中产生相应的偏差。

由于一切观测值均受偏差的影响，因而任何被观测量都不能准确无误地予以测定。对于一个量我们的目的是去寻求它的固定值，这就是我们想像中的**真值**。但是实际上我们得到的只不过是真值的一个**估值**。从数学的观点来说，必须把测量值或观测值看作是一个变量，关于这一点以后将进行更多的论述。

必须强调的是：一个被观测量的各个观测值出现差异是一种必然现象,即使观测条件基本上不变,这种现象仍然存在。如果我们想估计一个量的偏差，则必须对它的观测值与其真值之间的差值作出估计，而不管真值是什么。众所周知这一差值就称为观测值的**误差**。尽管术语**误差**的英文含义可以理解成发生了什么错误，但是观测值误差不能这样看待，除非它们是所谓**粗差**(见 1.2 节)。

对观测误差及其特性的研究，本质上等价于对观测值本身的研究。换句话说，传统上所称的**误差理论**就相当于现在的**观测值理论**。

如果 τ 表示一个量（一段距离，一个角度等）的真值，x 是它的观测值，则 x 的误差定义为：

$$\varepsilon = x - \tau \tag{1-1}$$

由于实际上不可能知道 τ 的数值，所以我们也将永远不能知道 ε 的精确值。然而，如果我们能够用某些方法求得 τ 的一个好的估值，就可用该估值代替 τ 作为求观测值偏差的基准值。如果以 $\hat{x}$ 表示 τ 的估值，则 $\hat{x}$ 与观测值 x 之差就定义为残差 v；确切地说

$$v = \hat{x} - x \tag{1-2}$$

残差 v 就是实际上用来表示观测值偏差的量。

1.2 误差的种类

误差习惯上被分为三类：(1) **粗差**；(2) **系统误差**；(3) **随机误差**。下面分别讨论之。

粗差

粗差是由于观测者疏忽所造成的错误的结果。例如，观测者可能瞄错测量目标，或读错刻划值，或读的是错误的刻划，或由于把数字前后颠倒而记下一个错误的读数（如把41.56m记为41.65m）。如果观测者疏忽，他就会造成许多错误。

要想一次测量真正有用，那么错误是不能允许的。为了帮助发现错误，制定了一些行之有效的野外操作程序。它们是：

1. 仔细检查对所有观测目标的照准是否正确；
2. 在不同的刻划处重复读数，并检查读数是否合理一致；
3. 重报读数以检核记录数据；
4. 独立地重测各个观测值并检核其一致性；
5. 进行简单的几何或代数检验。例如将平面三角形三观测内角之和与180°相比较。

保证不出现错误，这一点是很重要的。如果错误确实发生了，就必须在使用这些观测值之前找出并消除之。

系统误差

之所以称为系统误差是因为它们是按照确定的规律发生的，当这些规律为已知时，就能用一些函数关系表达出来。例如，如果钢尺的膨胀基本上是和温度成线性变化，且热膨胀系数为已知时，则可建立起温度与钢尺膨胀之间的函数关系。如果以特定标准温度下的钢尺长度作为基准值，那么由于温度相对其标准值的变化而引起的尺长相对其基准值的变化就是属于系统误差了。

如果在相同的条件下重复进行测量，那么系统误差将遵循着一定方式重复出现，例如用一根尺长值不足的钢尺丈量一段距离，如果在相同的温度、拉力、支撑与倾斜的条件下，由相同的司尺员

用同一根钢尺对同一距离进行丈量[illegible]致相同的系统误差。

如果在整个观测过程中系统误差的大小与符号保持不变，则称之为**常差**。如果它的大小保持不变而符号在改变，则是**相互抵消的误差**。

出现系统误差可能是与观测者、所用的仪器、测量时的外界条件有关，或者是与上述因素的某种综合影响有关。

观测者的人差可导致系统误差，随着所采用的观测方法的不同，该误差可能是常差，也可能是相互抵消的误差。如果观测条件不同，观测者的视觉和听觉也可能有变化，那么他的人差也就成为变量了。

仪器结构不完善，或者仪器校准不精确都能引起系统性的仪器误差。结构不完善包括刻度的刻划偏差以及置中部件的偏心等情况。仪器校准不精确包括没有使经纬仪望远镜的视准轴垂直于仪器的横轴等等情况。

由于测量数据是野外得到的，它们受到许多自然界的和环境因素的影响。例如温度、拉力、地面的倾斜都会影响卷尺量的距离，而湿度、大气压力以及温度等将影响光电测距值、角度观测值以及水准测量成果。所有这些影响都可表达成其起因因素的函数，因而归类于系统误差。

以上所讨论的系统误差，其来源都是直接和观测操作有关的。然而，对用来描述测量的几何或数学模型进行简化，同样可以产生系统误差。例如，用相隔数公里的三个测站之间的平面三角形来代替球面三角形，则球面角超将成为系统误差。

在测量成果的整理中，重要的是要发现并改正所有可能的系统误差。

随机误差

在查出并去掉了全部粗差，并对测量成果中所有已知的系统误差作了改正之后，在观测值中仍然会存在一些偏差。这些偏差是由观测误差引起的，它们与确定的系统之间不存在已知的函数

关系。相反，它们却有随机的性质，因此必须进行相应的处理。

早已指出，从数学的观点来看，观测值是一个变量。更确切地说，它是一个**随机变量**。因为它所包含的误差分量呈现随机特性。实际上，随机误差本身就是随机变量。

系统偏差是应用数学上的函数关系或模型来处理的，而随机变量必须运用**概率模型**来处理。下一节将介绍概率论的一些基本概念，第五章将对此做更多的讨论。

1.3 概率的基本概念

假设有一段距离被测量了很多次，所有观测成果中没有粗差，并对所有系统误差作了改正。在观测成果中剩下来的偏差，仅仅是由随机误差引起的。虽然不可能依据测量范畴的知识来对观测值进行具体的随机误差改正，但是根据它们的**频率分布**来研究其组合规律性则是能够做到的。正是频率分布被用来构成观测成果的概率模型的基础。

例 1-1

对一段大约 810m 的距离测量了 200次。全部观测成果均无

观测值 (m)	频数
810.11	1
810.12	3
810.13	7
810.14	19
810.15	20
810.16	36
810.17	38
810.18	29
810.19	24
810.20	10
810.21	11
810.22	0
810.23	2

粗差，而且已对系统误差作了改正。改正后的数值取到 0.01m。要指出的是，经过系统误差改正之后，观测结果的波动范围是在 810.11m 到 810.23m 之间，其分布如下：

试计算所有表列数值出现的相对频率并绘出相对频率图。

解

将某值所对应的观测值个数除以观测值总数，即得其出现的相对频率。由于总共有 200 个观测值，所以得到下列的相对频率：

观 测 值 (m)	相对频率
810.11	0.005
810.12	0.015
810.13	0.035
810.14	0.095
810.15	0.100
810.16	0.180
810.17	0.190
810.18	0.145
810.19	0.120
810.20	0.050
810.21	0.055
810.22	0.000
810.23	0.010

当然，相对频率的总和一定等于 1 。在图 1-1 中各个相对频率被描绘成矩形。

图 1-1 是以**直方图**形式表示的频率分布。每一个矩形的底代表**分组间隔**，它的高代表相应的相对频率。例如，图 1-1 中最高矩形的底代表观测值在 810.165m至810.175m 之间（更准确地说以 810.17m 表示）这一分组间隔，它的高则代表相应的相对频率 0.190。

图 1-1 中的频率分布集中于或紧靠于数值 810.17m 处。最高的频率位于或接近于中心值。

假如观测值的个数无限增加，则可看出每个相对频率将趋于

一个稳定的极限值。相对频率的极限值就称为**概率**。

通常用一个数学模型，即用一个概率模型或**概率分布**来代替直方图表示概率更为方便。图 1-2 中就是这种模型的一个例子。在图中概率是用连续曲线下的**面积**来表示的，而曲线则是观测值的一个数学函数。具体地说，观测值落在 x_1 和 x_2 之间的概率即为图中阴影部分的面积。考虑到观测值是一个随机变量，所以图 1-2 中的曲线就是随机变量的**概率密度函数**，这里随机变量代表距离观测值。图 1-2 中的中心值 μ 是观测值的**均值**。如果观测值中没有系统误差，那么这一均值也就被当作“真”值。

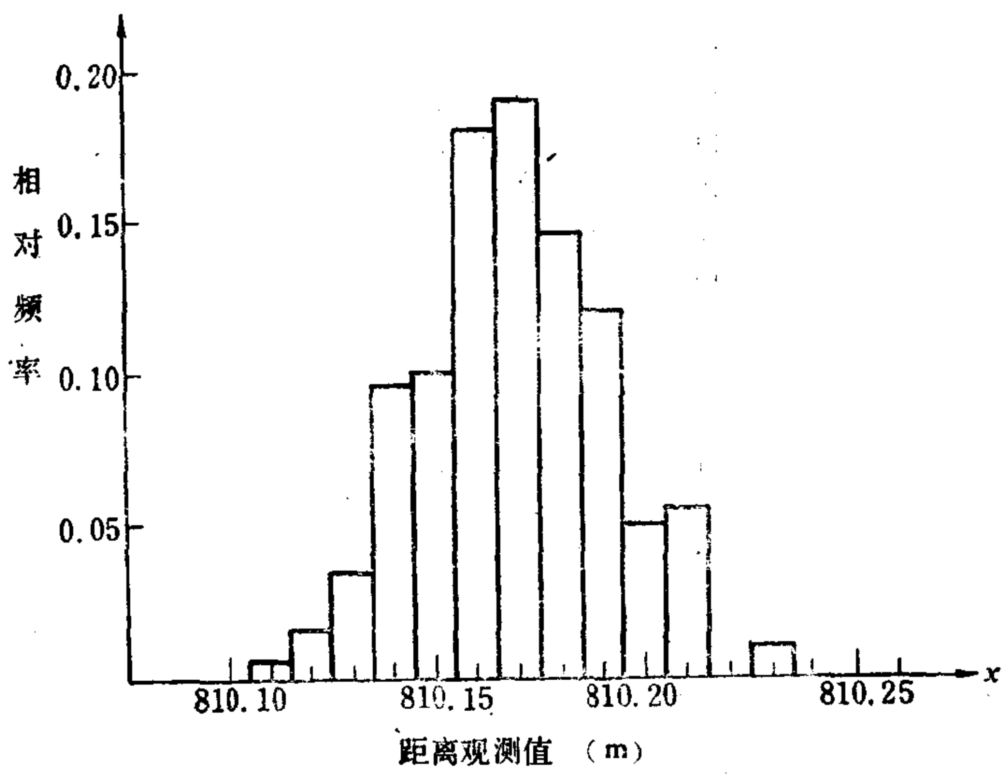

图 1-1

图 1-3 所示为一相似的密度函数，它可以作为观测值**随机误差**的概率模型，在此情况下，其均值为零。

均值 μ 称为概率分布的**位置参数**。分布的另一个参数是它的**标准差** σ，如图 1-3 所示，它是度量概率分布的离散度的。如果观测值 A 比观测值 B 的偏离度大，那么观测值 A 的标准差将比观测值 B 的标准差大。标准差的平方称为**方差**。