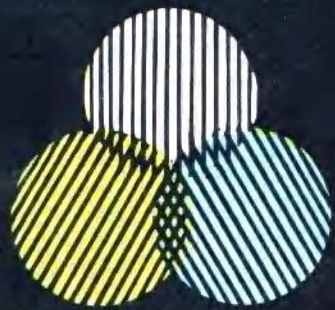
项武义



从算术到代数

科学出版社

数学小丛书

从算术到代数

项武义

科学出版社
1981

内 容 简 介

美国加利福尼亚大学数学系教授项武义等，怀着为祖国四化贡献一份力量的满腔热情，为我国青年编写了一套供课外阅读的《数学小丛书》，每册只讲一个主题(约100页左右)，《从算术到代数》是其中的第一本。

本书以数系运算的基本法则为主线，通过一些简明的实例，分析比较了算术解法和代数解法，进而介绍了解代数方程式的原理与方法。每章均附有练习和思考题。该书取材新颖灵活，内容循序渐进、浅显易懂。

本书可供广大青年自学或课外阅读，亦可供中学教师和学生家长参考之用。

数学小丛书

从算术到代数

项武义

*

科学出版社出版
北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1981年1月第一版　开本：787×1092 1/32
1981年1月第一次印刷　印张：4
印数：0001—114,950　字数：76,000

统一书号：13031·1451
本社书号：2001·13—1

定价：0.35元

《数学小丛书》编写前言

为了普及和提高我国的现代科学技术知识水平，为了培养我国青年思考和解决问题的能力，我们试着把基础数学中的题材编写成一套便于自学的小册子——《数学小丛书》，希望能成为在广度和深度上进一步充实我国的基础数学方面的参考读物.

在着手编写这套小丛书时，我们有下面几点认识与想法：

(一)基础数学涉及的面比较广，在这里若把它编写成一部体系严整偏重推理的"巨著"，这对于初学者自学是很困难的，也是不切实的. 因此，我们采取化整为零的方法，每一册只对某些中心课题做深入细致的讨论，使得它不仅是整套丛书的不可分割的一部分，而且其本身又自成独立完整的体系，这样做，对自学者会更加方便些，也能使基础数学丰富多彩的各个分支和广泛应用，得到应有的反映.

(二)理论与实际之间的关系，概括地说，从实际到理论是"由繁精简"，而从理论到实际则是"以简御繁". 所以，基础理论必须对实际问题进行由浅入深的分析和由感性到理性的飞跃才能得到. 反过来，只有深刻地理解了基础理论的高度概括性，才能够运用它来解决各种繁复多样的实际问题. 这套小丛书，虽然各册讨论的课题互不相同，但每册都按上述这种自然演变过程作一次由实践到理论再回到实践的小循环.

（三）分析、综合、推理，这三种基本思考方法应该相互配合运用.然而，在许多数学书里往往过于偏重推理而忽略了分析与综合的工作，则读者缺乏对实际问题进行分析和综合的训练，也就不善于把实际问题归纳成数学问题来加以解决了.因此，在编写这套小丛书时，我们将着重讲述如何认识问题和解决问题的思路.并通过一些实例来说明上述三种思考方法是怎样配合运用的，而不再过分追求形式的数理证明与逻辑体系.

最后我们建议由海内外的热心数学教学的工作者们，同心协力为中国青年编好这套数学小丛书，为祖国的四个现代化贡献我们的一份力量.

项 武 义

于美国加州大学 1979年.

目　录

引子　代数学的源起

在小学的算术课程里，同学们已经循序渐进地学习了整数、小数和分数的加、减、乘、除四则运算，并且也初步地运用四则运算去解答一些简单的数量问题——通常称为“四则应用题”。这本小册子就是要和同学们谈一谈如何从算术进步到代数学的领域.

首先，让我们先来谈一下代数学的起源和它的基本想法. 代数学的基本课题是着眼于运算来讨论各种数量问题的. 从发展的眼光来看，代数学是在算术中“数”与“运算”的基础上有系统地发展起来的. 要做到有系统地运用“数的运算”，首先要对整个“数的体系”有一个概括的认识. 在第一章中，我们将对“数系的运算法则”作一番全面的分析与总结. 说明数系的加法与乘法具有下列简单明了、普遍成立的运算法则. 设 a、b、c 表示任意三个数，则下述等式恒成立：

$$\begin{cases}\text{交换律：}\ a+b=b+a,\ a\times b=b\times a;\\ \text{结合律：}\ (a+b)+c=a+(b+c),\\ \qquad\qquad (a\times b)\times c=a\times(b\times c);\\ \text{分配律：}\ a\times(b+c)=a\times b+a\times c.\end{cases}$$

也许同学们会问：“这些显然的事实，会有什么用呢？”其实，整个代数学的基本出发点就是要有效地运用上面这种普遍成立

的"运算法则"来有系统地解决各种数量问题. 在这方面第一个历史性的突破就是下述"解代数方程原理"的发现.

在很多实际的数量问题中，我们可以先用一些简写符号(通常用 x、y、z 等字母)来表达问题中待求的"未知量"(这种符号叫做"未知数"). 这样，就可以把问题中的"数量关系"用算式来表达(通常这种含有未知数符号的等式，叫做"代数方程式"). 通过代数方程式去确定其中所含的未知数所应有的值叫做"解代数方程式".

解代数方程式的原理：解代数方程式的原理，就是对方程式中所含的"未知数"运用"数系运算法则". 因为法则是对任何数都成立的性质，所以对于那些暂时还不知道它们所应有的值的"未知数"，这些法则当然也应该成立. 有意思的是：只要适当运用这些简易的"数系运算法则"，就可以由方程式解得那些未知数所应有的值.

我们将在第二章用简明的实例，来分析说明上述解代数方程的原理的具体用法. 引用符号来代表待求的数，正是为了有效地运用数系运算法则，这也就是"代数"这个名词的来由. 在代数学的讨论中，我们经常要对含有文字符号的算式(往后叫做多项式)作运算. 基于上述原理，所要做的运算的基本法则也就是对于文字符号运用"数系运算法则". 将这种运算系统化、形式化，也就是我们要在第三章讨论的多项式运算. 多项式是由某几个给定的文字符号并用四则运算加以组合所得的表达式. 多项式运算只有一个唯一的原则：那就是这些文字符号在运算上具有交换律、结合律、分配律这几个对任

何数都成立的法则. 只要把握这个唯一的要点，多项式的运算是容易的. 它的用场也是广泛而且多样的；它不但是解代数方程的基本功，而且也是整个代数学的基本功. 在第四章中我们将对于多项式的应用，选一些典型的例子作初步的探讨.

第一章　有理数系和四则运算法则

在这一章中，我们将概括地对整数和分数的四则运算加以分析与总结．然后再引进“负数”概念，并建立一个新的数系——有理数系．

第一节　自　然　数　系

一、源起与结构

“数系”是我们用来表达、讨论数量问题的，对于不同类型的量，则有不同种类的数系．常用的量大体上来说可以分成两类．例如一群人，一群牛，一排树，一堆蛋……等等，这种量的特征是它们由不可再分割的个体组成的．即一个人，一头牛（不可能有半个人，半头牛）等．计算这一类型的量，我们处理的办法就是去数一下它的“个数”．用来数个数的工具也就是大家所常用的自然数系：

$$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots,\ 10,\ 11,\ \cdots\}.$$

另外一类常见的量如长度，面积，重量……等等，这些量

是可以无限细分的，所以并不具有自然单元. 处理这类量的方法是度量，用来表达度量型的量的数系叫做"实数系". 度量与实数系，将在第三册："实变多项函数"中再详加讨论，在这里让我们先对"自然数系"作一番全面的分析与探讨.

"自然数系"是由 $\{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$ 这样一串顺序排列的符号所组成的体系：

其中头一个数"1"也就是"单元"的抽象化，表示"一个"；其次"2"表示比 1 多加"一个"，即 $2=1+1$；"3"表示比"2"多加一个；"4"表示比"3"多加一个，"5"表示比"4"多加一个，……等等. 用算式来表达，即 $3=2+1$, $4=3+1$, $5=4+1$, … 等等. 不难看出，当我们在计算某一群事物究竟有"多少个"时，所做的程序是一面逐个地清点，一面在 1, 2, 3, 4, 5…逐个地往下数，其实你所做的就是逐次"加一".

从上面的初步分析，我们知道"$+1$"是自然数系中最原始、最简单的运算，其实它也就是一切其他运算的根本所在！这也就是下面我们所要接着讨论的课题.

首先，让我们来看一看一般的"加法"和"$+1$"之间的关系：

"$+2$"也就是把"$+1$"运算连续做两次的结果，用 a 表示一个任意自然数，则上述语句可以用下列算式来表达[1]：

$$a+2=(a+1)+1.$$

"$+3$"也就是把"$+1$"运算连续做 3 次的结果，或者是

1) 为了使问题的讨论变得简单明了，易写好算．下面我们将用小写英文字母，如 a, b, c, d, l, m, n 等符号来表示一个任意的自然数.

"+2"之后再做"+1",用算式来表达,即:

$$a+3=[(a+1)+1]+1=(a+2)+1,$$

以此类推,"$+n$"就是连做 n 次"+1"的结果,"$+(n+1)$"就是"$+n$"之后再做"+1"的结果. 用算式来表达即:

$$a+n=a+1+1+\cdots+1 \quad (n\text{ 个 "+1"}),$$

$$a+(n+1)=(a+n)+1.$$

上面的分析,简要地说明了一般的"加法运算"(即 $a+n$)和那个原始的"+1"运算之间的关系. 我们可以说:"$+n$"其实就是连续做 n 次"+1"的缩写. 下面让我们接着来分析一下"乘法运算":

$$1\times a=a,$$

$$2\times a=a+a,$$

$$3\times a=(a+a)+a=2\times a+a,$$

$$4\times a=(a+a+a)+a=3\times a+a, \ \cdots \text{等等}.$$

以此类推,$n\times a$ 就是 n 个 a 自身连加的结果,所以 $(n+1)\times a$ 也就是 n 个 a 自身连加之后再多加一个 a,用算式来表达,即:

$$n\times a=a+a+\cdots+a \quad [n\text{ 个 } a \text{ 自身连加}],$$

$$(n+1)\times a=n\times a+a.$$

上面的分析说明了乘法运算和加法运算之间的关系,其实 $n\times a$ 就是 n 个 a 自身连加的缩写! 也许同学们接下去会问"n 个 a 自身连乘的缩写是什么呢?"这也就是我们下面所要介绍的指数符号:

$$a^1=a,$$

$$a^2=a\times a,$$

$$a^3=(a\times a)\times a=a^2\times a,$$

$$a^4=(a\times a\times a)\times a=a^3\times a,\ \cdots 等等.$$

以此类推，$a^{(n+1)}=a^n\times a$.

指数符号：我们将用 a^n 来表示"n 个 a 自身连乘的缩写"上述符号中的 a 叫做"底数"，n 叫做"指数"，a^n 读成"a 的 n 次方".

[练习]：

(1) 计算：2^8，3^5，5^3，$(2^2)^4$.

(2) 试说明：$3^8\times 3^{12}=3^{20}$，$(2^4)^5=2^{20}$，

$3^{20}\times 2^{20}=6^{20}$，$2^8\times 5^8=10^8$.

[不必算出上述等式两边的值，直接由指数的意义加以说明].

(3) 从上面这些事实，是否可以归纳出一些普遍性的事实[1].

二、运算法则

上面我们对自然数系的源起和结构简要地做了一次分析. 现在让我们再来对整个体系在四则运算上所具有的性质作一次全面的总结. 从而得出一组对任何自然数都普遍成立的运算法则，它们也就是整个代数学的基础所在.

---

1) $3^8\times 3^{12}=3^{20}$ 这个等式的真正要点是 $8+12=20$，$(2^4)^5=2^{20}$ 这个等式的真正要点是 $4\times 5=20$，$2^8\times 5^8=10^8$ 这个等式的要点是 $2\times 5=10$ 而且指数都是 8.

先让我们举些简单的例子来看看:

$2+3=3+2$, $2\times3=3\times2$, $3+4=4+3$, $3\times4=4\times3$,

$2+5=5+2$, $2\times5=5\times2$, …等等.

上面这些简单的等式是很容易由等式两边的计算加以验证的. 经验告诉我们:

$$a+b=b+a, \quad a\times b=b\times a,$$

是对任何两个自然数 a, b 都普遍成立的, 叫做加法和乘法的交换律. 在这儿也许有人会问:“为什么交换律总是对的呢?”而有些同学则可能会抱着下述几种态度: 到目前为止的经验中还没有遇到不成立的情形; 看来大概是对的吧; 或者是老师说的对的, 我也就相信了; 或者是这些法则对了又有什么用场呢? 第一种态度是追根究底的“怀疑派”, 第四种态度是讲求实效的“实用派”. 科学的精神就是既要追根究底又要讲求实效! 就拿上面的交换律来说吧, 我们的经验其实是很有限的, 譬如:

$$123456789\times987654321\overset{?}{=}987654321\times123456789$$

我想很少有人真的去验算两边相等还是不等. 而且说不定在验算过程中算错了一点还弄出一个不等的“假象”来呢. 下面就让我们把自然数系的运算法则逐一列举, 并加以说明.

1. 加法结合律:

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

[说明]: 从加法的本意来看, 上式的意义是对 a 先做 b 次“+1”然后再做 c 次“+1”, 其结果也就等于对 a 总共做了

$(b+c)$ 次"$+1$". 所以上述加法结合律的正确性是相当清楚的.

2. 加法交换律:

$$a+b=b+a.$$

[说明]: 我们可以这样来理解加法交换律的正确性: 设有甲、乙两堆东西, 甲堆有 a 个, 乙堆有 b 个, 假如我们要数一下两堆合起来的总数时, 如先数甲堆得其个数为 a, 然后再接下去数乙堆, 也就是先由 a 再做 b 次"$+1$", 所得总数是 $(a+b)$. 反之, 如先数乙堆即得其个数为 b, 然后再接下去数甲堆, 这就是先由 b 再做 a 次"$+1$", 总数是 $(b+a)$. 这样就看出 $a+b=b+a$ 是同一个数, 即甲、乙两堆合起来总共的个数.

3. 分配律:

(i) $(m+n)\times a=m\times a+n\times a.$

[说明]: 从乘法和加法之间的关系可以看出:

$$m\times a+n\times a=(\overbrace{a+\cdots+a}^{m\text{ 个 }a})+(\overbrace{a+\cdots+a}^{n\text{ 个 }a})$$

运用结合律就可以改写上式为

$$\overbrace{a+\cdots+a+a+\cdots+a}^{(m+n)\text{ 个 }a}=(m+n)\times a.$$

例如当 $a=12$ 时, 这就是我们常用的一打为 12 个, 则上式就是说"m 打"加"n 打"等于 $(m+n)$ 打.

(ii) $n\times(a+b)=n\times a+n\times b.$

[说明]: 把乘法表示为加法:

$$n\times(a+b)=\overbrace{(a+b)+(a+b)+\cdots+(a+b)}^{n\text{ 个 }(a+b)\text{ 相加}},$$

运用加法的结合律及交换律就可以把上式改写成

$$(\overbrace{a+a+\cdots+a}^{n\text{ 个 }a})+(\overbrace{b+b+\cdots+b}^{n\text{ 个 }b})=n\times a+n\times b.$$

4．乘法结合律：

$$(n\times a)\times b=n\times(a\times b).$$

[说明]：$n\times a=\overbrace{a+a+\cdots+a}^{n\text{ 个 }a},$

所以 $$(n\times a)\times b=(\overbrace{a+a+\cdots+a}^{n\text{ 个 }a})\times b,$$

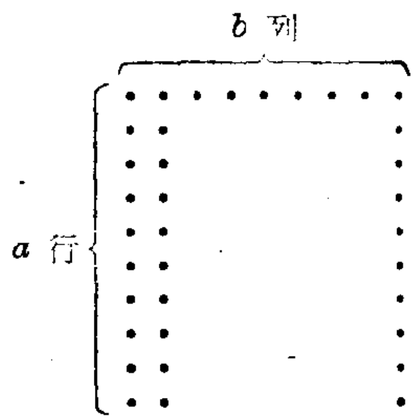
运用分配律上式可改写为

$$\overbrace{a\times b+a\times b+\cdots+a\times b}^{n\text{ 个 }a\times b}=n\times(a\times b).$$

5．乘法交换律：

$$a\times b=b\times a.$$

[说明]：设想有一队士兵排成一个 a 行、b 列的方阵，所以每行 b 人，共有 a 行，这样来计算总人数就是：



$$\overbrace{b+b+\cdots+b}^{a\text{ 个 }b}=a\times b,$$

当然我们也可以用每列 a 人共有 b 列来计算总人数，即：

$$\overbrace{a+a+\cdots+a}^{b\text{ 个 }a}=b\times a,$$

这也就说明了 $a\times b=b\times a$.

6．指数定则：

(i) $a^m \times a^n = a^{(m+n)}$.

(ii) $(a^m)^n = a^{(m\times n)}$,

(iii) $(a\times b)^m = a^m \times b^m$.

[说明]：(i) $a^m \times a^n = (\overbrace{a\times\cdots\times a}^{m\text{ 个 }a\text{ 相乘}})\times(\overbrace{a\times\cdots\times a}^{n\text{ 个 }a\text{ 相乘}})$,

运用乘法结合律

$$\overbrace{a\times\cdots\times a\times a\times\cdots\times a}^{m+n\text{ 个 }a\text{ 相乘}} = a^{(m+n)}.$$

(ii)

$$[a^m]^n = \overbrace{(\underbrace{a\times\cdots\times a}_{m\text{ 个 }a\text{ 相乘}})\times(\underbrace{a\times\cdots\times a}_{m\text{ 个 }a\text{ 相乘}})\times\cdots\times(\underbrace{a\times\cdots\times a}_{m\text{ 个 }a\text{ 相乘}})}^{n\text{ 个括号相乘}},$$

运用乘法结合律，上式可改写为

$$\overbrace{a\times\cdots\times a\times a\times\cdots\times a\times a\times\cdots\times a\times a\cdots\times a}^{m\times n\text{ 个 }a\text{ 相乘}} = a^{(m\times n)}.$$

(iii) $(a+b)^m = \overbrace{(a+b)\times(a+b)\times\cdots\times(a+b)}^{m\text{ 个 }(a\times b)\text{ 相乘}}$,

运用乘法的结合律和交换律，就可以把上式改写为

$$(\overbrace{a\times a\times a\cdots\times a}^{m\text{ 个 }a\text{ 相乘}})\times(\overbrace{b\times b\times\cdots\times b}^{m\text{ 个 }b\text{ 相乘}}) = a^m\times b^m.$$

总结上面的讨论，我们掌握了自然数系的加法、乘法和指数运算的基本法则．它们是简单易用的，对于任何自然数都普遍成立．同学们会问："这些运算法则有什么用呢？怎样用呢？"这就要逐章逐节、按步就班地详加讨论了．因为代数学的基本想法就是"有系统的运用这些法则"．这本小册子所要介