高等专科学校试用教材

公差与检测

沈阳工业高等专科学校　刘克明　主编

机械工业出版社

高等专科学校试用教材

公差与检测

沈阳工业高等专科学校 刘克明 主编

机械工业出版社

前　言

本书是根据1989年8月全国高等专科学校机制专业教材编审委员会制订的教材编写大纲编写的。

本书的特点是：1）内容体系上有所改进，以理论教学的公差部分为上篇，实验教学的检测部分为下篇。全书基本上按几何量特征分章，而不是传统地按典型零件分章，这有利于基本概念的融会贯通和提高教学效率。2）加强了误差理论、公差应用和位置量规等方面的内容以适应从事工艺、工装与实验测试工作的需要，这符合高等专科学校培养目标的要求。3）本书内容全部采用了新的国家标准，力求突出教材的说理性、系统性、科学性和先进性。

本书由沈阳工业高等专科学校刘克明主编。参加编写的有：沈阳工业高等专科学校刘克明（绪论、第一章、第二章和第六章），江汉大学赵凤祥（第三章），哈尔滨机电专科学校王乃俊（第四章），南京机械专科学校陈于萍（第四章第二节、第五章和第十三章），宁波高等专科学校徐淡然（第七章），长春大学成淑云（第八章和第十四章），杭州高等专科学校吴作伦（第九章和第十二章），沈阳工业高等专科学校王苓芝（第十章和第十一章）。本书由东北工学院李纯甫教授主审。参加审稿会议的还有常州工业技术学院蔡华麟、长春大学于永芳和南通纺织工学院杨志融以及本书编者等同志。

本书在编写过程中曾得到全国高等专科学校机制专业协会“公差与检测”课程组各兄弟学校同行们的大力支持和协助，在此谨向关心和为此书作出过贡献的同志们表示衷心的感谢。

由于编者水平所限，书中难免存在缺点和错误，欢迎广大读者批评指正。

编者　1991年10月

目　录

下篇 检 测 部 分

绪 论

机械制造业在我国社会主义经济建设中占有十分重要的地位，它既要以各种技术装备武装国民经济各部门，同时又要提供大量的日用机电产品来满足人们日益增长的生活需要。目前，世界上机械制造业已经发展到一个相当高的水平。我国机械制造业虽然是在近40年发展和壮大起来的，但目前已跨入世界比较先进的行列。现在我国不但可以大量生产各种普通机电产品，而且还可以生产具有尖端技术的航天、航空和航海设备，也可以生产重型和特重型的矿山、冶金和动力装置以及高精度的仪器、仪表和机床等。

在大批大量生产的条件下，如何保证机械产品的质量是一个非常重要的课题，也是每一个机械工程技术人员应当高度重视的问题。否则，用大量人力、物力和时间生产出效率低、可靠性差、使用寿命短的机械产品，不但本身是一种极大的浪费，而且会对国民经济各个部门产生极坏的影响。

机械产品的质量是由多方面的因素决定的，诸如性能、结构、零件的材料及其处理、零件的加工精度和安装精度等。在这些因素中，一旦结构、材料等确定以后，零件的加工精度则是影响产品质量的最根本和最主要的因素，这是因为加工精度直接决定着零件的可装配性以及装配后的工作性能。例如轴直径做得过大或过小、工作台做得不平、导轨做得不直、安装圆柱齿轮的两个轴的轴线做得不平行、主轴的轴线做得弯曲等等都可能使零件无法装配到机器上，或者即使勉强装配到机器上以后，机器的工作性能将会受到很大的影响，如影响相配件间的表面接触、零部件的受力、运动件的润滑和磨损等等，从而影响整台机器的正常运行。

机械零件的加工精度是指尺寸精度、形状精度、位置精度和表面粗糙度等几个方面，也统称为几何量精度。精度和误差是一个问题的两个方面，精度高则误差小，精度低则误差大，而误差又是不能完全消除的，所以要规定公差来限制误差。也就是说，公差是为限制几何量误差而规定的一个范围或区域。这个范围或区域越小，则几何量精度就越高。从保证机械产品质量的角度来看，几何量精度较高当然是好，但几何量精度的提高必然会带来成本的增加。所以，零件的几何量精度不能认为是越高越好，而应当将其精度确定在一个合理的水平，也就是给出其合理的公差要求。

为了保证机械产品的质量，且适应社会化大生产的需要，对各项公差要求应当制订出统一的公差标准，设计者只能根据这些标准确定合理的公差要求。

公差标准是随着机械制造业的发展而产生、发展和逐渐完善起来的。早在1902年，生产剪羊毛机的一家英国公司就开始制订了最初的也是最简单的公差标准。1924年和1925年英国和美国分别发布了各自的国家公差标准。1926年又成立了国际标准化协会（ISA）。二次世界大战后，于1947年国际标准化协会重建并改称为国际标准化组织（ISO）。其后由它陆续制订了一些国际公差标准。现在世界上发达国家都有各自的国家公差标准。为了适应国际交流的需要，各国公差标准趋向统一于国际公差标准。我国公差标准的建立和发展也是随着我国机械制造业的发展而逐步完善的。近10年来，我国国家技术监督局在对原标准修订的

基础上，又陆续发布了一系列新的公差标准。现在可以说，我国基础公差标准已基本上完整配套。这给今后提高设计水平、改善机械产品质量、改进生产工艺和开展国际技术交流等创造了良好的条件。

表 1 列出了近年来我国陆续发布的一些主要的公差与配合国家标准的代号和名称等，以供参考。

表 1　近年来我国发布的一些主要的公差与配合国家标准

国家标准代号	标　准　名　称	实 施 日 期	说　　明
GB1800—79	公差与配合 总论标准公差与基本偏差		
GB1801—79	公差与配合 尺寸至500mm孔，轴公差带与配合		
GB1802—79	公差与配合 尺寸大于500mm至3150mm 常用孔轴公差带	1980年 7 月 1 日	代替GB159～174—59
GB1803—79	公差与配合 尺寸至18mm孔，轴公差带		
GB1804—79	公差与配合 未注公差尺寸的极限偏差		
GB1095—79 GB1096—79 GB1097—79	平键　键和键槽的剖面尺寸 普通平键　型式尺寸 导向平键　型式尺寸	1980年 5 月 1 日	代替GB1095—72 GB1100—72 代替GB1096—72 代替GB1097—72
GB1182—80 GB1183—80 GB1184—80	形状和位置公差　代号及其注法 形状和位置公差　术语及定义 形状和位置公差　未注公差的规定	1981年 7 月 1 日	代替GB1182—74 GB1183～1184—75
GB1958—80	形状和位置公差　检测规定	1981年 7 月 1 日	
GB197—81	普通螺纹　公差与配合	1983年 1 月 1 日	代替GB197—63 GB964—67
GB5796.4—86	梯形螺纹　公差	1987年 1 月 1 日	代替GB785—65
GB1957—81	光滑极限量规	1982年 8 月 1 日	代替GB1957—80
GB3478.1—83	圆柱直齿渐开线花键 模数　基准齿形　公差	1984年 5 月 1 日	代替GB1104—72 GB1145—74
GB3505—83 GB1031—83 GB131—83	表面粗糙度　术语　表面及其参数 表面粗糙度　参数及其数值 表面粗糙度　代号及其注法	1985年 1 月 1 日	 代替GB1031—68 代替GB131—74
GB4249—84	公差原则	1985年 1 月 1 日	
GB307.1—84 GB307.2—84 GB275—84	滚动轴承公差 滚动轴承公差的测量方法 滚动轴承与轴和外壳的配合	1985年 5 月 1 日 1985年 5 月 1 日 1985年 2 月 1 日	部分代替GB307—77 代替GB307—77 代替GB275—64
GB1443—85	工具柄自锁圆锥的尺寸和公差	1986年 3 月 1 日	代替GB1443—78
GB5847—86	尺寸链　计算方法	1986年10月 1 日	

（续）

国家标准代号	标 准 名 称	实 施 日 期	说 明
GB8069—87	位置量规	1988年7月1日	
GB1144—87	矩形花键尺寸、公差和检验	1988年3月1日	代替GB1144—74
GB10095—88	渐开线圆柱齿轮精度	1989年10月1日	自实施日起JB179—83作废
GB11334—89 GB11335—89 GB12360—90	圆锥公差 未注公差角度的极限偏差 圆锥配合	1990年1月1日 1990年1月1日 1990年7月1日	代替JB1—59 代替JB7—59
GB/T 1804—92	一般公差 线性尺寸的未注公差	1992年10月1日	代替GB1804—79

现代机械制造业是建立在标准化、专业化、流水化、自动化生产基础上的。它的生产方式是分别在不同的工段、车间或工厂成批大量地加工各种机械零件，然后将这些零件集中起来进行装配，从而装成一台又一台的机器。这种生产方式要求同一规格的零件应当具有互换性。所谓零件的互换性就是指同一规格的一批零件，按所规定的公差制成以后，在装配时不经挑选或附加加工，随便拿出一个就可装上机器，而且能满足原定使用性能的要求。这种互换性实际上是完全互换性。在有些情况下，为了便于加工和降低成本，对零件规定了较大的公差，然后将按此公差要求加工的相配零件按尺寸大小进行挑选并分为若干组，在装配时大孔配大轴、小孔配小轴，从而得到较高的装配质量，我们把这种只在分组范围内能够互换的性能称为不完全互换性。

在机械制造业高度发达的今天，不仅在大量生产中要贯彻互换性原则，就是在单件小批生产中也常常要贯彻互换性原则。因为标准化、专业化、协作化的生产已经遍及整个社会。因此我们把现代机械制造业的这种生产方式也可以称为互换性生产。互换性生产可以大大地提高劳动生产率，降低产品成本，减轻工人体力劳动，缩短维修时间。由此而带来的巨大经济效益是无法估量的。但需要指出的是互换性原则不是在任何情况下都适用，有些零件需要采用单独研配才能达到装配要求和符合经济性原则。

没有统一的公差标准，就不可能实现互换性生产。制订和贯彻各项公差标准不但是保证机械产品质量所必需，而且也是组织互换性生产所必需。凡是机械工程技术人员都要很好地学习它、掌握它和贯彻它。

本课程的内容并不是简单地罗列各项公差标准，而是从教学的特点出发，将国家公差标准的主要内容按其认识规律，科学地、系统地，以说理的方式展示出来，以达到使学习者首先能从概念上、实质上去解释问题，然后达到能灵活运用主要几项国家公差标准的目的。

给出正确的公差要求，这是实现互换性生产的前提条件。但有了公差要求，并不等于就有了零件的互换性。要把要求变成现实，除了选用合适的加工设备和加工方法外，最重要的就是要进行检验和测量。在加工过程中，每道工序要由工人进行多次的检验或测量。在加工结束后，还要由检验人员进行最后的检测，使那些不符合公差要求的零件作为不合格品而被淘汰。此外，生产车间的一切加工设备也需要定期或不定期地进行检测，以保证设备的精度和正常运行。由此可见，检测工作是不可缺少和非常重要的。没有检测，互换性生产就得不到保证，公差要求也变成了空洞的设想。实际上，任何一项公差要求都要有相应的检测手段

相配合。这就是说，规定公差和进行检测是保证机械产品质量和实现互换性生产的两个必不可少的条件。尽管公差和检测是两个性质不同的主题，但它们被这个共同的目的联系到了一起。学习者在掌握了误差的性质并能运用公差去限制误差的同时，还必须掌握对误差的检测方法，从而形成一个完整的概念，达到灵活应用的目的。

思 考 题

1. 初步理解公差和误差以及它们之间的关系，并说明制订公差标准的意义。
2. 举例说明具有互换性的机械零件和日用器件。
3. 举出几种由于零件几何误差而影响装配和使用性能的实例。
4. 如果孔和轴的尺寸公差都很大，则它们两者的装配质量必然不高，对此如何理解？
5. 说明在机械制造过程中进行检测的重要性。

上篇 公 差 部 分

第一章 误 差 概 论

§1-1 误差与精度的概念

一、误差及其分类

尽管现代机械工业可以制出高精度的零件，但要把零件的尺寸作得绝对准确是不可能的。同样，要把一批同规格零件的同一尺寸作成完全一致也是不可能的。这是因为存在着加工误差。同理，在测量中尽管是同一零件的同一部位用同样的仪器和方法进行多次重复测量，其测得的结果也不会完全一致。每一次的测量也不能和所测部位的真实尺寸绝对相同。这是因为存在着测量误差。加工误差和测量误差总称为制造误差。概括地说，误差总是存在于一切生产实践和科学实验的过程之中，人们只可以设法减小它而无法完全消除它。在机械制造和维修中，从满足使用要求和实现互换性生产的角度来看，并不要求零件的各几何参数作得绝对准确和完全一致，只要相对准确和比较一致就可以了，即充分近似就可以了。这就是说，在机械制造中对零件的各几何参数允许有一定的误差存在。

加工误差可分为尺寸误差、形状误差和位置误差等。简单地说，尺寸误差就是零件实际尺寸与理想尺寸之差；形状误差就是零件几何要素的实际形状与理想形状之差；位置误差就是零件几何要素的实际位置与理想位置之差。这里说的实际尺寸、实际形状和实际位置都是通过测量得到的，由于在正常情况下测量误差较加工误差要小得多，所以测量误差可忽略不计，这样就可以用测得值当做实际值。

理想形状和理想位置是容易理解的，如理想平面、理想直线、理想圆、理想同轴、理想的坐标位置等。理想尺寸可认为是最大极限尺寸和最小极限尺寸的平均值，即公差带中心所对应的尺寸（见图 1-1）。由于形状误差和位置误差的大小常用尺寸误差的形式来表示，所以对尺寸误差的研究和认识是最必要和最基本的。

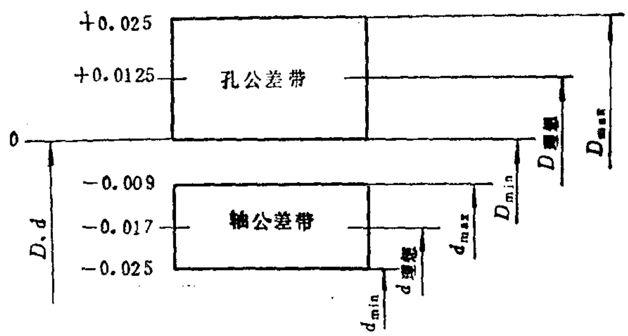

图1-1 孔和轴的极限尺寸和理想尺寸示例

测量误差是测得值与真值之差，由于真值是无法知道的，所以常常是用多次测量的平均值来代替真值，测量的次数越多，平均值就越接近于真值，这可由下面的推论来说明。

设对某一尺寸进行 n 次同等精度的测量，得到 n 个测得值 x_1, x_2, $\cdots$, x_n，这些测得值

的算术平均值为：

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n} \tag{1-1}$$

设真值为 Q，则各次测量的误差为：

$$\delta_1=x_1-Q$$
$$\delta_2=x_2-Q$$
$$\vdots$$
$$\delta_n=x_n-Q$$

于是有
$$\sum_{i=1}^{n}\delta_i=\sum_{i=1}^{n}x_i-nQ$$

一般测量误差是正态分布的，所以当 $n\to\infty$ 时，正负误差互相抵消，使 $\sum_i\delta_i\to 0$，所以

$$Q=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\bar{x} \tag{1-2}$$

由于加工的实际尺寸有可能大于、小于或等于理想尺寸，所以加工误差可以是正、负或零；同样，由于测量时的测得值有可能大于、小于或等于真值，所以测量误差也可以是正、负或零。把加工误差或测量误差的绝对值称为绝对误差。若用 Δ 表示加工误差，δ 表示测量误差，则加工和测量的绝对误差可用下两式表示，即：

$$|\Delta|=|s_i-L| \tag{1-3}$$

$$|\delta|=|x_i-Q| \tag{1-4}$$

上两式中 s_i——加工零件尺寸的实际值；
L——加工零件尺寸的理想值；
x_i——某次测量的测得值；
Q——被测零件尺寸的真值。

绝对误差大，说明零件加工后的实际尺寸偏离理想尺寸的程度大，或测得值偏离真值的程度大，这说明加工或测量的精确度低；绝对误差小则说明加工或测量的精确度高。但这一结论只适于加工或被测的尺寸相同的情况下，因为加工和测量的精确度不仅与绝对误差的大小有关，而且还与被加工尺寸或被测量尺寸的大小有关。加工直径1000mm的轴时出现0.01mm的绝对误差，加工直径100mm的轴时也出现0.01mm的绝对误差，两者绝对误差虽然相同，但由于它们的基本尺寸不同，所以直径1000mm的轴的精确度远高于直径100mm的轴的精确度。

为了比较不同尺寸的加工和测量的精确度，可以应用相对误差的概念。相对误差是绝对误差与实际值或测得值的比值，即：

加工的相对误差
$$E=\frac{|\Delta|}{s_i}\approx\frac{|\Delta|}{L} \tag{1-5}$$

测量的相对误差 $$\varepsilon=\frac{|\delta|}{x_i}\approx\frac{|\delta|}{Q} \tag{1-6}$$

例如，对两个不同的尺寸进行测量，其测得值分别为 $x_1=500\text{mm}$，$x_2=40\text{mm}$，测量误差 $\delta_1=0.05\text{mm}$，$\delta_2=0.01\text{mm}$，则相对误差分别为：

$$\varepsilon_1=\frac{\delta_1}{x_1}=\frac{0.05}{500}=0.0001=0.01\%$$

$$\varepsilon_2=\frac{\delta_2}{x_2}=\frac{0.01}{40}=0.00025=0.025\%$$

因为 $\varepsilon_1<\varepsilon_2$，所以测得值为500mm的测量精确度高于测得值为40mm的测量精确度。

不论是加工误差还是测量误差，按其性质都可以分为随机误差、系统误差和粗大误差三类。

随机误差是指数值与符号以不可预先判断的方式变化的误差。这种误差其数值在一定的范围内，可大可小，可正可负，无明显规律，但从误差整体来看服从统计规律。

系统误差是指数值与符号均不变或按一定规律变化的误差。根据误差的数值变与不变或按某种规律变化，系统误差又可分为定值系统误差和变值系统误差。变值系统误差又可分为线性系统误差、周期系统误差和复杂系统误差。

粗大误差也叫反常误差或过失误差，该误差是由于主观疏忽大意或客观条件发生突然变化而产生的误差。在正常情况下一般不会产生这一类误差。

二、误差产生的原因

加工误差体现在用同一设备、同一方法、同一条件下加工同一尺寸的一批零件，所得加工尺寸不完全相同；测量误差体现在对同一零件的同一表面上的同一部位用同一量具、同一方法进行多次重复测量，其测得值也不完全相同。产生这些加工误差和测量误差的原因是多种多样的，有些是很复杂的，现归纳如下。

（1）由加工或测量设备本身带来的误差，简称为设备误差。例如机床导轨的磨损、机床主轴回转不平稳、机床丝杠螺距不均匀等都会引起零件的加工误差；千分尺的测量面不平行、读数刻度不等距、测微螺杆的螺距有累积误差；游标卡尺的尺身和活动框架之间的间隙等都会引起测量误差。加工和测量设备在设计、制造和使用中已经存在于它本身的各种误差叫设备误差。设备误差直接影响着被加工零件的几何精度或测量的精确度。

（2）加工和测量的方法所引起的误差，简称方法误差。例如，车削加工的误差就比磨削加工的误差大；钻削加工就比拉削加工的误差大；自动加工的零件的尺寸一致性就比手动加工的要好等等。再如测量，直接测量（几何量值直接由量具读出）时，一般说来要比采用间接测量（测量另一个与其有关的量，然后通过一定的函数式计算后获得要测的几何量值）带来较小的测量误差。加工方法和测量方法是多种多样的，这些不同的方法就会有不同的加工误差和测量误差。

（3）由环境条件的变化和不符合标准而引起的误差。例如，由测量力及加工或测量现场的温度、湿度、气压、光线、尘埃、振动等引起的加工或测量误差。

（4）由加工或测量者本人引起的误差，也称人员误差。这是指由加工或测量人员本身的技术熟练程度、目视分辨能力、思想情绪等引起的误差。

综上所述，引起误差的原因有多方面的多种因素。每一个加工或测量的数据是在多种变

化因素的具体综合作用下获得的，因此这些数据都带有随机性。人们为了提高精度，减小误差，总是力求在设备、方法、环境和人员方面达到一个更高的水平，但这样作就要增加经济负担，提高产品成本。所以，就不能说误差越小越好。我们的目的是要把误差限制在一定的范围内，使其既能满足质量要求而又是最经济的。

三、精度的概念

精度也称精确度。几何量精度的高低决定于几何量误差的大小。如前所述，加工和测量误差主要分为两大类，即随机误差和系统误差。一般说来，这两种误差都是同时存在的，但有时随机误差是主要的，有时系统误差是主要的。不同的误差所包含的精度的含义是不同的，所以笼统地说精度是不够明确的。应当说精度包含两层意思，一个是精密度，一个是准确度。精密度是指随机误差集中或分散的程度，如果随机误差分布很集中，则说明精密度高，否则，分布很分散，则说明精密度低。在图 1-2 中每一个点代表一个实际尺寸，实际尺寸与理想尺寸之差就是误差，显然，图 1-2 a 、d 所示的误差分布比较集中，而图 1-2 b 、c 所示的误差分布就比较分散。准确度是指系统误差的大小，系统误差小，准确度高，系统误差大，准确度低。图 1-2 a 、c 所示的系统误差较大，而图 1-2 b 、d 所示的系统误差很小，也可能没有系统误差。

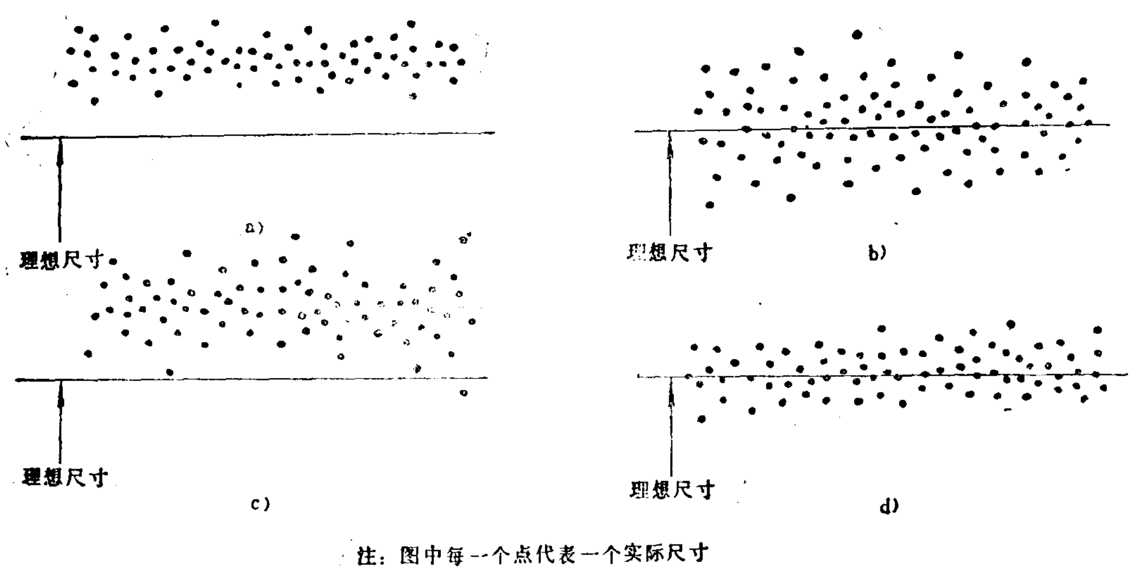

图1-2　精密度、准确度和精确度

当精密度和准确度都比较高时，就可以说精确度高或精度高。由于随机误差必然存在，而系统误差从理论上讲是可以消除的，在消除系统误差的情况下，精度就是指精密度。但是在实际上，系统误差，特别是变值系统误差是难于完全消除的，甚至在有些情况下，系统误差和随机误差还可相互转化。所以，实际上人们讲的精度是指精密度和准确度的综合。

§1-2　随机误差

一、随机误差的分布及特性

随机误差的数值和符号以不可预知的方式变化。其变化的范围和规律可以用随机误差的

分布来描述。为了说明这个问题，现举例如下：

在自动车床上按$\phi 10\pm0.018$mm 加工一批小轴，共200件，加工后对小轴直径逐个进行精密测量（测量误差可忽略不计），经测量知其中直径最大者为10.012mm，直径最小者为9.990mm，再按全部小轴的尺寸算出的算术平均值为10mm，等于理想尺寸，即公差带的中心值，同时，这也很接近于分散范围的中心值10.001mm。然后在此基础上按小轴直径大小分成11组，分组间隔为0.002mm，各组的其它有关统计数据见表1-1。

表1-1 频数、频率统计表

组号	尺寸分组边界/mm	组中值/mm	频数 n_i	频率 $v_i=n_i/200$	附注
1	9.990～9.992	9.991	2	0.01	1）频数的总和 $n=\Sigma n_i=200$
2	9.992～9.994	9.993	4	0.02	2）频率的总和 $\Sigma v_i=1$
3	9.994～9.996	9.995	10	0.05	3）尺寸的算术平均值：
4	9.996～9.998	9.997	24	0.12	$\bar{x}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_{200}}{200}=10\text{mm}$
5	9.998～10.000	9.999	37	0.185	4）尺寸分散范围＝(10.012－9.990)mm＝0.022mm
6	10.000～10.002	10.001	45	0.225	5）公差范围0.036mm
7	10.002～10.004	10.003	39	0.195	6）分散范围中心值＝(10.012－0.011)mm＝10.001mm
8	10.004～10.006	10.005	23	0.115	7）公差范围中心值10mm
9	10.006～10.008	10.007	12	0.06	8）分组间隔 $\Delta x=0.002$mm
10	10.008～10.010	10.009	3	0.015	
11	10.010～10.012	10.011	1	0.005	

根据表1-1所记录的数据，我们以尺寸为横坐标，以频数为纵坐标，画出频率直方图（图1-3），连接直方图各顶线中点的连线，可以认为是随机误差的实际分布曲线，也叫做统计分布曲线。从频率直方图中可以清楚地看出误差分布的概率。

如果将上例中加工小轴的件数无限增大，而将分组间隔取得很小，趋近于零，则统计分

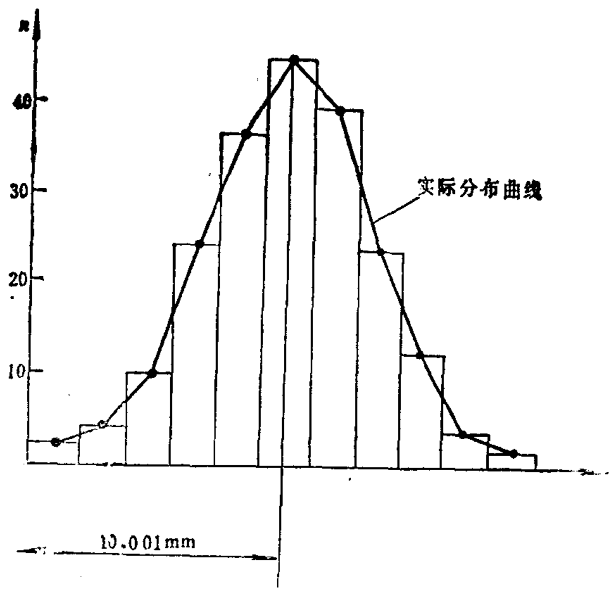

图1-3 统计分布图（直方图）

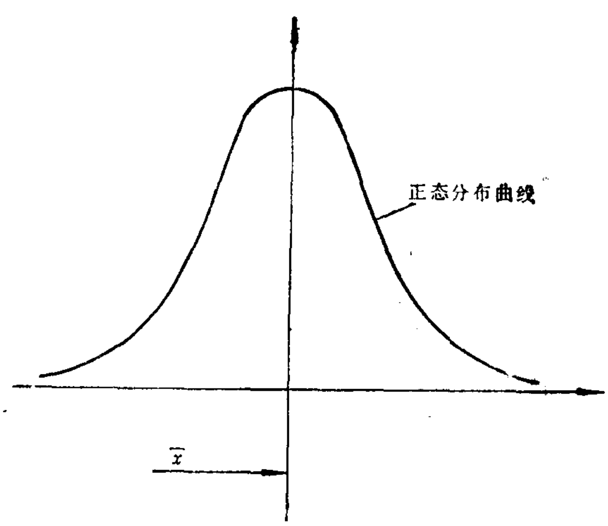

图1-4 正态分布曲线

布曲线就会变成如图 1-4 所示的一条光滑曲线，该曲线称为正态分布曲线，亦叫做高斯（Gauss）曲线。正态分布也叫做高斯分布，它是在自然界和生产中经常遇到的分布规律，如在调整好的机床上自动加工一批工件时，或在一定条件下对同一被测值多次重复测量时，尺寸误差和测量误差的分布均呈现正态分布的规律。正态分布曲线的数学表达式为：

$$y = f(\delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}} \tag{1-7}$$

式中 y——概率密度函数；

δ——随机误差；

σ——均方根误差（又称标准差）；

e——自然对数的底，$e = 2.71828\cdots$。

概率密度函数是个以随机误差为变量的函数，它所表示的是沿着横坐标上各点单位误差的概率。这个函数也是以 $-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}$ 为指数的指数函数。由函数式知，随着误差 δ 绝对值的增大，概率密度总是要减小，且在 $\delta = 0$ 时，函数具有最大值，即 $y_{max} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$。$\sigma$ 是表示误差集中或分散程度的量，σ 值越小，表示误差越集中，e 的指数的绝对值也就越大，函数值减小的很快，正态分布曲线的形状显得高陡；反之，σ 值越大，则正态分布曲线的形状显得低平。图 1-5 所示为 $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$ 时的三种不同的正态分布形状，从图上可以明显地看出误差集中和分散的不同情况。

从分析正态分布曲线可以看出随机误差的正态分布具有如下三个特性：

1）绝对值越小的随机误差出现的概率越大，绝对值越大的随机误差出现的概率越小，随机误差为零时，概率最大，存在一个最高点，这就是所谓误差的单峰性。

2）绝对值相等的正、负随机误差出现的概率相等，这就是所谓误差的对称性。由于对称，所以正、负随机误差可以互相抵消，使误差的均值为零。由对称性引伸出的这一特性也叫抵偿性。

3）在一定的加工或测量条件下，随机误差的绝对值不会超过一定的限度，这就是所谓误差的有界性。

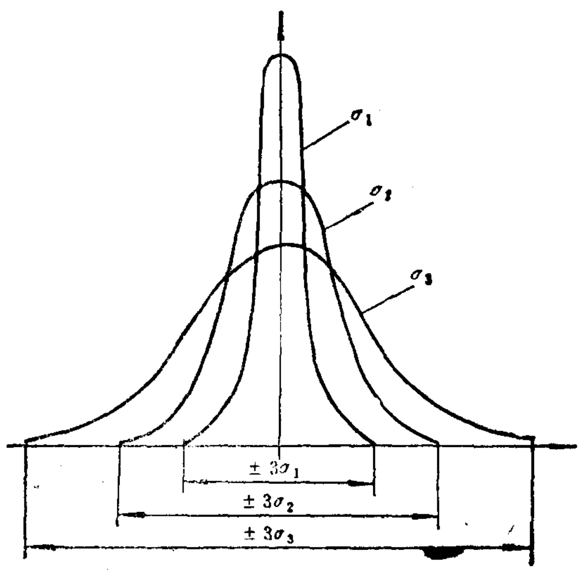

图1-5 三种不同 σ 的正态分布曲线

除正态分布外，随机误差还有其它一些分布形式。如在不稳定的工艺过程中，当尺寸随时间近似线性变化时，如加工时刀具随时间均匀磨损，测量时温度随时间均匀上升等，都会形成误差的均匀分布，即概率密度函数在某个有限区间上等于一个常数，而在该区间以外等于零的一种概率分布（见图 1-6 a）。当两个分布范围相等的均匀分布相组合，会形成等腰三角形分布，简称三角分布，亦称辛普生分布（见图 1-6 b）。零件轴线偏心或径向跳动等这样一些非负值的单向、连续随机量的分布，常接近于瑞利分布（见图 1-6 c）。用试切法

加工时，由于操作者主观上不愿产生不可修复的废品，所以在加工孔时，总想宁小勿大，而在加工轴时，总想宁大勿小，这样常会使加工出的一批零件的尺寸误差分布出现不对称情况，即所谓偏态分布（见图1-6 d、e）。还有其它的分布形式，这里不一一列举。这些除正态分布外的分布统称为非正态分布。各种非正态分布的特性，这里不再详述，需要时可参阅有关资料。

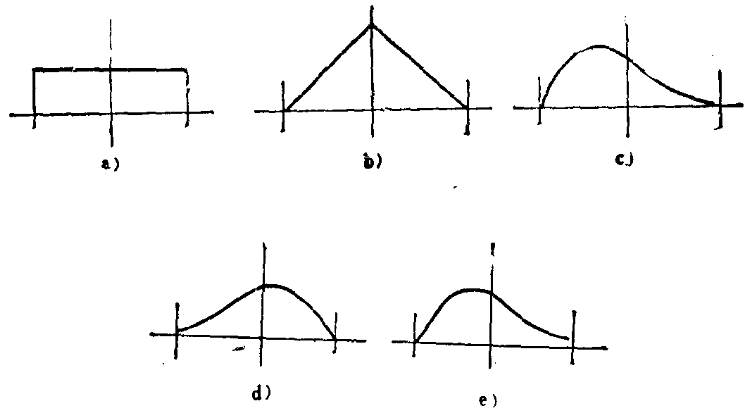

图1-6　误差的几种非正态分布

二、随机误差分布特性的主要参数

表示随机误差分布特性的参数主要有两类，一类表示其聚集中心的位置，另一类表示其分散的程度，前者主要有算术平均（均值），后者主要有标准差（标准偏差）。现就这两个参数分别说明如下。

1. 算术平均 $\bar{x}$

设随机量 x 有 n 个数值，则数值的总和被其个数除所得的结果就是算术平均。它是总体均值 μ 的估计。其表达式为：

$$\bar{x}=\frac{\sum\limits_{i} x_i}{n} \tag{1-8}$$

在式（1-8）中，当随机误差的个数 n 充分大时，则 $\bar{x}$ 趋近于某个定值，这个定值就是总体均值 μ。μ 和一般的算术平均 $\bar{x}$ 是有区别的，在一定条件下，μ 是个常数，而按若干次观测结果算得的 $\bar{x}$ 则在 μ 附近摆动。在测量中，当系统误差已消除的条件下，均值 μ 表示被测值的真值 Q，而 n 次重复测得值的算术平均 $\bar{x}$ 则在真值 Q 附近摆动，当测量次数 n 充分增大时，$\bar{x}$ 才趋近于真值 Q。又如在加工中，在稳定的工艺过程中，零件实际尺寸的均值取决于机床的调整。当然，能够将均值调整到正好等于零件的理想尺寸（即公差带中心所对应的尺寸）是最好的，但这一般是不容易作到的。所以，加工误差的聚集中心不能就认为是公差中心。只有当假设误差正态分布的范围和公差范围一致时，或正态分布的中心和公差带中心完全对齐时，才可以认为均值 μ 等于理想尺寸。

正态分布的中心位于均值 μ 处，在这里，随机误差 $\delta=0$，正负随机误差都从这里算起。由于 μ 难于求得，所以常用 n 个数据的算术平均 $\bar{x}$ 作为正态分布的中心，这当然也是个估计。

两列不同的测得值可能具有相同的算术平均值。例如，有两列测得值及其均值的计算如下：

$$\bar{x}_1=\frac{10.005+9.993+10.002+9.997+10.004+9.999+10.000}{7}\text{ mm}=10.000\ \text{mm}$$

$$\bar{x}_2=\frac{10.001+9.998+10.002+10.003+9.997+9.999+10.000}{7}\text{ mm}=10.000\ \text{mm}$$

从上两式看到，它们的均值都是10.000mm，但它们两组数据的分散程度是不同的，第一组比较分散，第二组比较集中。集中和分散的程度表明加工或测量的精密度高低，而算术平均值并不能表示精密度的高低，而只能说明随机误差聚集中心的位置。

2. 标准差（标准偏差）

标准差是各观测值距离算术平均的平均平方偏差的正平方根，其表达式为：

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_i (x_i-\bar{x})^2}{n}} \tag{1-9}$$

式（1-9）中，$(x_i-\bar{x})$ 是真误差，即 $\bar{x}$ 相当于总体均值 μ。显然，这只有在随机量的个数 n 充分大时，应用式（1-9）才是合适的。

从误差总体中抽取一个简单的随机样本的算术平均只能是一个一般的算术平均，它不能就认为是均值 μ。这时，我们把 $(x_i-\bar{x})$ 叫做剩余误差。由于剩余误差和真误差之间存在着一个微小的差别，所以通过数学推导，标准差还可以用下式表示，即

$$\hat{\sigma}=s=\sqrt{\frac{\sum_i (x_i-\bar{x})^2}{n-1}} \tag{1-10}$$

式（1-10）也叫贝塞尔公式，它是一个很重要的公式，在总体的标准差 σ 未知，必须由样本来估计时，常要用此式来计算出 s 作为标准差 σ 的估计值。

用标准差 σ 或它的估计值 s 可以说明一组误差的分散程度，即说明这一组误差中的各个数据的可信程度，亦即说明各个数据接近均值的程度。

前面已经提到，算术平均值也在 μ 的周围摆动。当在同样条件下，对同一被测几何量进行 m 组（每组 n 次）等精度测量，则每组 n 次测量都有一个算术平均值，于是有 m 个算术平均值，即 $\bar{x}_1$，$\bar{x}_2$，…，$\bar{x}_m$。这些算术平均值都随机分布在真值附近的范围内。显然，这些算术平均值的分布范围一定要比单次测得值的分布范围要小得多。所以，表示各组均值分散特性的标准差 $\sigma_{\bar{x}}$ 一定要比表示单次测得值的分散特性的标准差 σ 小得多。由方差和标准差的定义可以导出：$\sigma_{\bar{x}}$ 等于 σ 除以随机量总数的平方根。

即
$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{1-11}$$

用式（1-10）中的 $\hat{\sigma}$ 代替 σ，于是有：

$$\hat{\sigma}_{\bar{x}}=\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{\sum_i (x_i-\bar{x})^2}{n(n-1)}} \tag{1-12}$$

三、正态分布随机误差概率的计算

计算正态分布随机误差在某一分布区间内的概率，实际上是求正态分布曲线与横坐标之间在随机误差 δ 的指定区间内的面积。随机误差落在整个分布范围内的概率是100%，即等于1。所以，用 P 表示概率，则有

$$P_{(-\infty,+\infty)}=\int_{-\infty}^{+\infty} y\,\mathrm{d}\delta=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\delta=100\%=1 \tag{1-13}$$