经济管理应用数学

（一）

微积分学及其应用

张宗元

编著

成都科技大学出版社

(川)新登字015号

内 容 提 要

本书是《经济管理应用数学》系列教材的第一分册，含集合与函数，极限与连续，导数与微分，中值定理与导数的应用，不定积分，定积分，无穷级数，二元函数的微积分，微分方程初步，共九章，并结合经济与管理方面的众多实例展示其多方面的应用。行文中设置思考题，启发读者动手、动脑；每一节设置一组练习题，督促读者及时练习；每章末设置一节“方法与技巧”及一组复习题，体现学习由浅入深，循序渐近的原则；每章末设置一组自测题，便于自学者检查自己的学习效果；又设置一组研讨题，供学有余力的读者进一步提高；答案都紧随其后，便于读者核对，及时改正错误；第四章末及全书末，还附有两三套试卷；力图给自学者和任课教师尽可能带来方便，提高教学效果。

本书可以作为高等学校财经及管理类专业的教材，适于广大参加财经及管理类专业自学考试的读者使用，也可供工科各专业教学参考。

经济管理应用数学

(一)

微积分学及其应用

张宗元　编著

责任编辑　孙康江

封面设计　张　韧

成都科技大学出版社出版发行

新　华　书　店　经　销

重庆建筑大学印刷厂印刷

开本787×1092　1/16　印张 26.5　654 千字

1993年12月第1版　1994年3月第1次印刷

印数：0001～2500　定价：11.80元

书号：ISBN7-5616-2708-4/O·185

绪　论

§0.1　经济与管理中应用数学方法的必要性与重要性

早在新中国成立不久，少数经济学家与自然科学家就应用高等数学研究社会主义再生产的理论问题，证明了生产资料优先增长的必然性。一九五八年起华罗庚等一些数学工作者长期深入工厂企业，应用数学方法成功地解决了企业中一些管理问题。

一九五八年后，著名经济学家孙冶方和于光远等，凭借他们高度敏捷的科学洞察力，提出了在经济与管理中应用数学方法“必须及时地给以足够的重视”，并准备与华罗庚等数学家合作招收这方面的学生。但是，前辈们的努力，受到当时政治环境的限制，未能如愿。

当前，改革开放，把我国经济建设迅猛推向前进。四个现代化要求管理现代化，而管理现代化离不开在管理中应用数学方法和电子计算机。社会需要是我国发展经济与管理中应用数学方法的强大动力。

任何经济与管理问题，都是质与量的统一，除了进行质的研究外，还需要开展数量分析。现代数学为这种分析提供了强有力的工具，问题在于我们是否善于应用它。过去学经济的不学数学，学数学的不学经济，把自然科学与社会科学截然分开，不利于它们的发展。现代科学的发展规律之一，是自然科学与社会科学的相互渗透，其中以数学对社会科学的渗透最为突出。

马克思曾经说过：“一种科学只有在成功地运用数学时，才算达到了真正完善的地步。”，国外学者在经济学和管理科学中已广泛应用数学方法。改革开放后，我们开始从国外引进新的经济分析方法和管理方法，发展了管理数学、经济数学和数量经济学，开展了投入产出分析，为我国经济与管理中的重大决策提供了有力的工具。我们理当结合国情、面向世界、面向未来，加速这方面的创造与革新。

这套教材是为学习经济与管理的学生提供系统的经济管理应用数学方法，数学方法的应用是没有止境的。随着经济的发展，管理水平的提高，应用的数学方法将更深入，更高级。但是，这套教材只能讲述其中最基础的部分。有了这个基础，学习更高级的就较为容易了，读者的创造与革新也就有了基础。我们将陆续选取处理连续变量、离散变量、随机变量和模糊变量等不同类型的数学方法，作系统的介绍。

本书是《经济管理应用数学》教材的第一分册，只介绍微积分学及其应用，是处理连续变量的数学方法。

§0.2　中学数学知识提要

为了便于刚从中学升入大学的读者对本书要用的数学知识有选择地及时复习和随时查找易忘的公式，我们在这里再将最常用最基本的列出。

一、一元二次方程$ax^2+bx+c=0$

1. 判别式 $\Delta=b^2-4ac$

(1) $\Delta<0$ 无实根；

(2) $\Delta=0$ 有相等二实根；

(3) $\Delta>0$ 有相异二实根。

2. 求根公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

3. 根与系数的关系 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$, $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$.

二、不等式

1. 性质 若$a>b$则

(1) $a+c>b+c$,

(2) $c>0$时，$ac>bc$,

(3) $c<0$时，$ac<bc$;

(4) 若$a>b\geqslant0$，则$\sqrt{a}>\sqrt{b}\geqslant0$, $a^2>b^2\geqslant0$;

(5) 若$a>b>0$，则$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$.

2. 含绝对值的不等式

(1) $|a|\geqslant0$;

(2) $-|a|\leqslant a\leqslant|a|$;

(3) $|a|-|b|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$;

(4) 若$|x|<\delta(\delta>0)$，则$-\delta<x<\delta$;

(5) 若$|x|>\delta(\delta>0)$，则$x<-\delta$或$x>\delta$.

3. 二次不等式

(1) $\Delta<0$时，ax^2+bx+c 与a同号。

(2) $\Delta>0$时，ax^2+bx+c 二根$x_1<x_2$

① $x_1<x<x_2$时，ax^2+bx+c 与a异号；

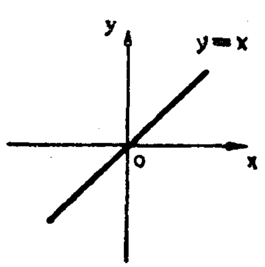
② $x<x_1$, $x>x_2$时，ax^2+bx+c 与a同号。

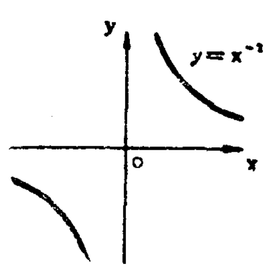
三、基本初等函数

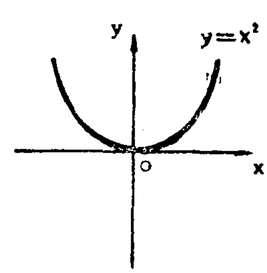
1. 常值函数 $y=c$（图形略）

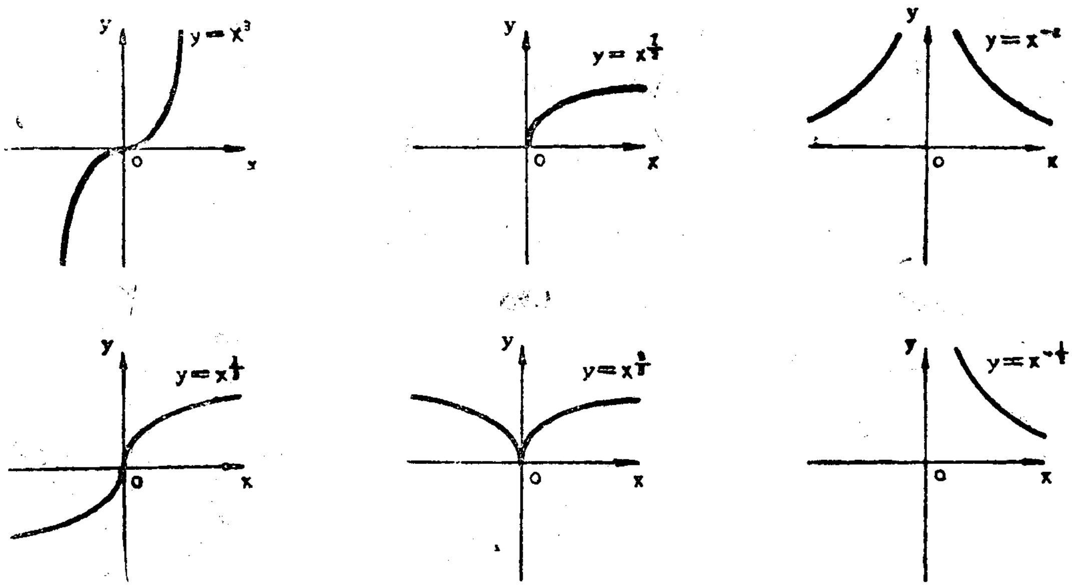
2. 幂函数 $y=x^a$

图形



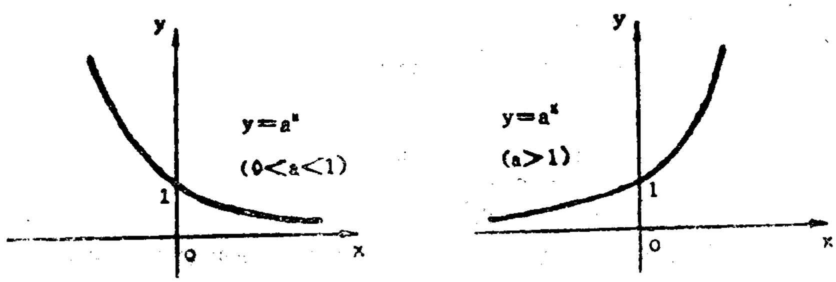






3. 指数函数 $y=a^x$ $(0<a\neq1)$

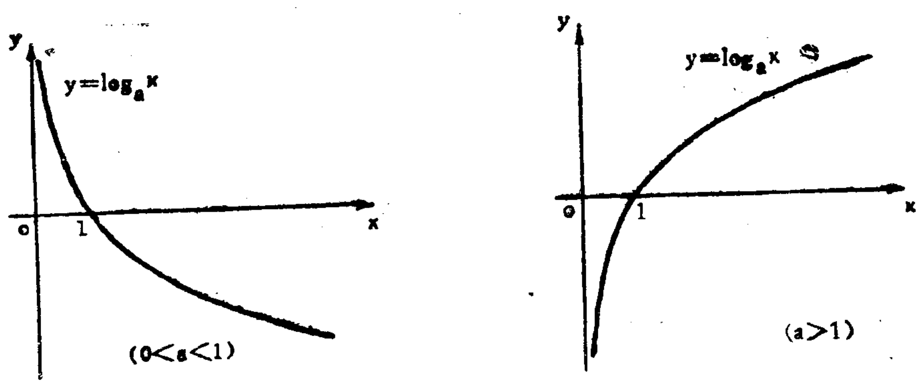
图形



性质 $a^0=1$, $a^{-x}=\frac{1}{a^x}$, $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$, $(a^x)^y=a^{xy}$, $a^x\cdot a^y=a^{x+y}$, $\frac{a^x}{b^y}=a^{x-y}$, $(ab)^x=a^x\cdot b^x$。

4. 对数函数 $y=\log_a x$ $(0<a\neq1)$

图形



性质 $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$, $a^{\log_a x}=x$, $\log_a(x\ y)=\log_a x+\log_a y$, $\log_a x^b=b\log_a x$。

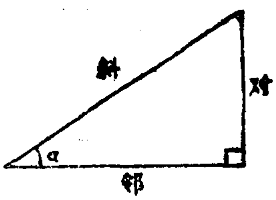
5. 三角函数

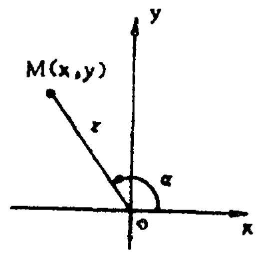
(1) 弧度与角度　π 弧度 $=180°$，$1° = \frac{\pi}{180}$ 弧度。

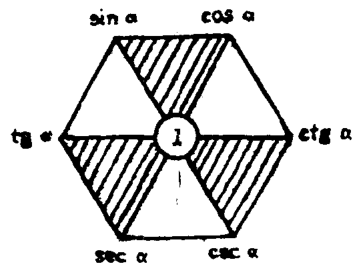
(2) 直角三角形中锐角的三角函数（如下左图）

$$\sin\alpha = \frac{对}{斜}，\quad \mathrm{tg}\alpha = \frac{对}{邻}，\quad \sec\alpha = \frac{斜}{邻}，$$

$$\cos\alpha = \frac{邻}{斜}，\quad \mathrm{ctg}\alpha = \frac{邻}{对}，\quad \csc\alpha = \frac{斜}{对}。$$







(3) 三角函数的定义（如上中图）

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}，\quad \mathrm{tg}\alpha = \frac{y}{x}，\quad \sec\alpha = \frac{r}{x}，$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}，\quad \mathrm{ctg}\alpha = \frac{x}{y}，\quad \csc\alpha = \frac{r}{y}。$$

(4) 同角三角函数的关系（如上右图）

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1，\quad \mathrm{tg}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha，\quad 1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \csc^2\alpha；$$

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}，\quad \sec\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}，\quad \csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}；$$

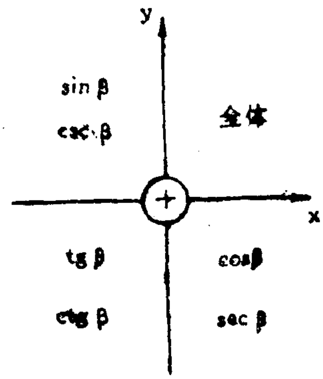
$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}，\quad \mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}，\quad \sec\alpha = \frac{\mathrm{tg}\alpha}{\sin\alpha}。$$

(5) 特殊角度的三角函数值

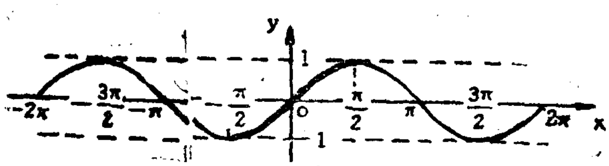
α						
α	角度	0°	30°	45°	60°	90°
	弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\alpha$		0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	
$\mathrm{ctg}\alpha$			$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

(6) 各象限里三角函数的符号（只列出取正值的函数，未列的皆为负）及化为锐角 α 的三角函数值

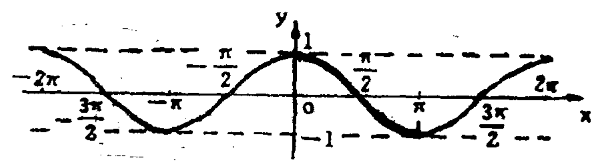
	$\beta=\frac{\pi}{2}\pm\alpha$	$\beta=\pi\pm\alpha$	$\beta=\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$	$\beta=-\alpha$ $\beta=2\pi-\alpha$
$\sin\beta$	$+\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\beta$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$+\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\beta$	$\mp\mathrm{ctg}\alpha$	$\mp\mathrm{tg}\alpha$	$\mp\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$
$\mathrm{ctg}\beta$	$\mp\mathrm{tg}\alpha$	$\pm\mathrm{ctg}\alpha$	$\mp\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$



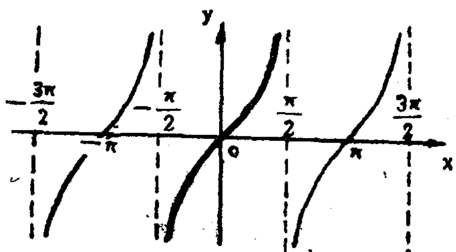
(7) 三角函数的图形



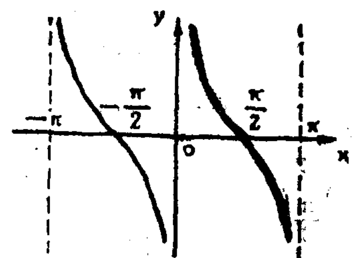
y = sin x



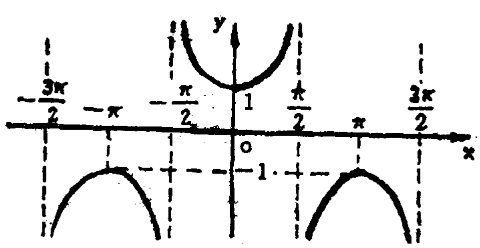
y = cos x



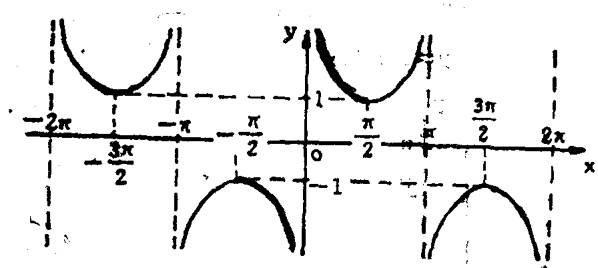
y = tg x



y = ctg x



y = sec x



y = csc x

(8) 两角和、差，倍角，半角的三角函数

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$,

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$,

$\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}{1\mp\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}$, $\mathrm{ctg}(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\mathrm{ctg}\alpha\,\mathrm{ctg}\beta\mp1}{\mathrm{ctg}\beta\pm\mathrm{ctg}\alpha}$,

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$, $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$,

$$\mathrm{tg}2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha},\qquad \mathrm{ctg}2\alpha=\frac{\mathrm{ctg}^2\alpha-1}{2\mathrm{ctg}\alpha};$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\qquad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

(6) 和差化积与积化和差

$$\sin\alpha\pm\sin\beta=2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2},$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

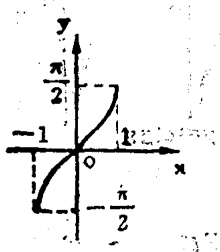
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)],$$

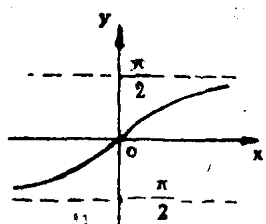
$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)],$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)].$$

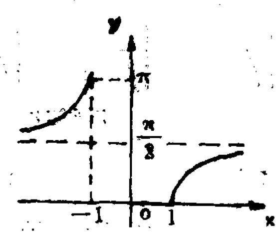
6. 反三角函数的图形



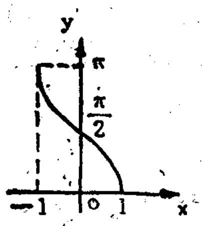
y = arc sin x



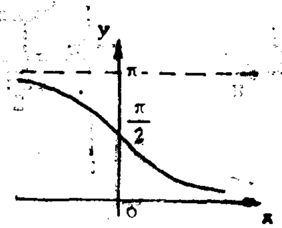
y = arc tg x



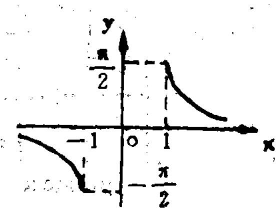
y = arc sec x



y = arc cos x



y = arc ctg x



y = arc csc x

读者要熟练掌握基本初等函数的图形及其性质，善于从图形上看出函数的定义域、值域、奇偶性、单调性、有界性、周期性。

四、平面直角坐标系下的直线、圆锥曲线及其方程

1. 直线　点斜式$y-y_0=k(x-x_0)$，斜截式$y=kx+b$；斜率$k=\mathrm{tg}\alpha$，α为倾角；

2. 圆　$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，圆心在$c(a,b)$，半径为r；

3. 椭圆 $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$，中心在$c(x_0, y_0)$；

4. 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，中心在$o(0, 0)$，实半轴为$a$，虚半轴为$b$；两条渐近线为$\dfrac{x}{a}\pm\dfrac{y}{b}=0$。

5. 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 顶点为 $\left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$。

五、坐标变换

直角坐标(x, y) 极坐标(r, θ)

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \theta=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

六、级数

1. 等差级数

$$a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+[a+(n-1)d]=\frac{\{a+[a+(n-1)d]\}\cdot n}{2}$$

2. 等比级数（几何级数）

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=a\cdot\frac{1-r^n}{1-r},\ (r\neq1).$$

3. $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

七、组合数及二项式定理，乘法公式及因式分解

1. $C_n^m=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}=C_n^{n-m}$；

2. $(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^nb^n=\sum\limits_{r=0}^{n}C_n^ra^{n-r}b^r$;

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$;

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;

3. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$

八、几何知识

1. 勾股弦关系 $\triangle ABC$中$\angle C=90°$时$a^2+b^2=c^2$;

2. 正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$;

3. 余弦定理 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$;

4. 扇形 弧长 $l=r\theta$，面积 $S=\dfrac{1}{2}rl$；

5. 体积　　柱体$V=Sh$，锥体$V=\frac{1}{3}Sh$；

6. 正圆锥　　体积$V=\frac{1}{3}\pi R^2h$，侧面积$S=\pi R\sqrt{R^2+h^2}$；

7. 圆台　　体积$V=\frac{\pi h}{3}(R^2+Rr+r^2)$，侧面积$S=\pi(R+r)\sqrt{h^2+(R-r)^2}$；

8. 球　　体积$V=\frac{4}{3}\pi R^3$，面积$S=4\pi R$；

9. 三角形面积　$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{abc}{4R}$

$$S=2R^2\sin A\sin B\sin C=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=rp$$

其中　$p=\frac{a+b+c}{2}$，R为外接圆半径，r为内切圆半径。

§0.3　给自学者的建议

本书十分便于读者自学，因为重要的内容都讲得十分详尽。但是，它又要求自学者发挥主动精神，随时拿起笔来，自己写写、画画、算算。这不仅因为他为了启发读者思考，在正文中随时设置了许多思考题，而且有些估计读者不难画出的图形，也要求读者在阅读过程中随手画出，有些定理的证明，书中只提供思路，也要求读者自己来写出正式的证明。一般思考题，随后就有提示或答案，希望读者能控制住自己，不要急于去看后面的提示和答案，争取独立作出答案，再去核对答案。如果抱着只读完文字了事的态度，那就辜负了作者的一番苦心，收获是不会很大的。

书中每节之末附有练习题，每章之末附有复习题、自测题，希望读者都能认真对待，一步一个脚印地往前走。每节的练习题是必须做的，如果时间不多，在有小题的大题中，可选作单数题或双数题。答案就紧接在每组习题的后面，便于及时核对（做完一个练习后，再去对答案），不是实在做不出，不要轻易和急忙去看提示或答案。对不上答案要认真寻找原因。

每章后面的复习题供熟练掌握所学内容选用，不一定全作。自测题最好用一段完整的时间去完成，并记录从开始做到做完所用的时间，促使自己逐步提高自己的解题速度。研讨题供学有余力，想进一步提高的自学者选用，难度相对较大，一般读者可以不做。

《经济管理应用数学》是经济与管理类各专业的理论基础课之一，不能简单地以近期内是否实用来判断它的重要性，数学课本身还兼有培养我们的逻辑推理能力、空间想象能力、抽象思维能力、计算能力和周密思考能力的作用。有心自学的朋友，一定要树立信心，采用正确的学习方法，读（书）、思（考）、画（图）、算（题）结合，是完全可以学会的。

书后“附录一”列出两个常用的字母表，供不熟悉拉丁字母和希腊字母的读者随时查阅，最好花点时间，熟练地记住它们（包括写法和读音）。

书后“附录二”列出的微分积分基本公式是为了方便读者在学习过程中经常查阅和熟记而设置的（微分学方面只列出了求导的基本法则和公式），希望读者在学完有关章节后，能

经常翻看，加强记忆。

§0.4 给教师的建议

本书把习题分为练习题、复习题、研讨题等不同层次，为教师在教学过程中给学生布置作业、安排习题课等带来了很大的方便，而且答案紧随其后，也为批改作业带来了方便。练习题分量不重，难度不大，仅为理解基本内容所必需，一般应要求全做，对于少课时班级或学生程度参差不齐普遍较低时，也可对有几个小题的题目只布置做单数题或双数题，作为最低要求。

本书正文中随时设置思考题，既有助于学生自学和课前预习，也有助于教师进行启发式教学。

本书全心全意为读者着想（连版式设计都考虑到尽可能让读者使用方便），也全心全意为教师着想。教师的困难常常发生在习题课的组织上。本书每章都设“方法与技巧”一节，帮助学生复习提高，也帮助教师解决组织习题课中选题的困难。这样做也更符合由浅入深，循序渐近的教学规律。每学期为考试出试卷更占用教师大量的时间和精力，为了给教师提供方便，本书在第四章末及第九章末分别编制了两三套期中和期末试卷，供教师选用。本书每章末设置的复习题、自测题和讨论题与每小节后面的练习题基本上没有重复的题目，这就使本书自身含有一个庞大的题库，为教师重新编制试卷提供了方便。

本书选题原则除适用外，还考虑尽可能展示数学的逻辑美和形式美。

再完善的教材也不能代替各位教师独创性的发挥。教师不仅要根据学时的多少、学生的实际情况，对教材作适当的取舍补充，而且还常常从学生那里得到新的启发，不断研究新问题，创造新方法。经常鼓励学生一题多解，鼓励学有余力的同学放一只眼在书外，不怕被学生出的难题问倒，才会走出一条教学相长，不断创新之路。本书的研讨题将为您提供一些方便，您也将在教学实践中不断丰富这个题库。

设置研讨题，以较少的篇幅容纳了更多的内容，增加了教材的弹性，也增强了教材的适应性（即不仅供经济与管理专业的本、专科使用，也可供工科各专业教学参考）。这是我们的一次尝试，愿与同行们进一步研讨。

由于提示较详，本书实际上已含有 简 明 题 解。这不仅给自学者，而且也给教师提供了方便。

目　录

第一章 集合与函数

§1.1 集合的概念及表示方法

集合是现代数学中一个十分重要的基本概念。许多概念和问题借助集合来表达，更容易理解，更便于分析和处理。

当我们提到文房四宝时，大家心理都明白是指纸、笔、墨、砚四种东西；而说到直角三角形，都知道说的是有一个角是直角的三角形。这些都是常见的可以称之为集合的例子。因而可以说：

集合是一些确定的、能够彼此区分的对象的汇总，或者说是具有某种属性的事物的全体。一般简称为**集**。构成集合的事物或对象，称为集合的**元素**。一般简称为**元**。

由有限个元构成的集，称为**有限集**。例如上面所提到的“文房四宝”，其中只有纸、笔、墨、砚四个元素。注意，我们总是在一定的层次上来理解和描述集合的，虽然“纸”还可区分为宣纸、白报纸、道林纸…等等，但就“文房四宝”这个集合来说，则不加区分，当作一个元素对待，统称为“纸”。由无限多个元构成的集称为**无限集**。例如上面所说的“直角三角形”。因边长、锐角不同而彼此区分。

通常，我们用大写字母A、B、C…等代表集合，用小写字母a、b、c…等代表集合的元素。如果a是集A的元，则记为 $a\in A$，读作“a属于A”；如果a不是集合A的元，则记为$a\notin A$，读作“a不属于A”。

我们这里讲的集合，具有确定性的特征，即，遵守排中律：$a\in A$与$a\notin A$二者必居其一而且只居其一，不允许模棱两可。

例 1 十二生肖所指的十二种动物构成一个集合，记为A，则

鼠$\in A$，　但是，　猫$\notin A$。

通常为了研究方便，总是事先划定一个范围来讨论问题，不能任何时候都以宇宙万物为对象，海阔天空，不着边际地谈论问题。比如，提到十二生肖，我们就在动物界来考虑问题。这种事先划定的范围也是一个集合，称为**全集**或**论域**，记为U。你们要选班干部，要组织学习小组，就可选“全班同学”为全集，不必把全校同学牵扯进来。但要组织全校运动会时，就应选“全校师生员工”为全集了。

为了便于做系统的研究，我们把不包含任何元素的集合称为**空集**，记为$\varnothing$。

思考题 1 根据你的理解，凭借你的想象，尽可能生动地列举几个有限集、无限集和空集。

思考题 2 判断下列集合中哪些是有限集？哪些是无限集？哪些是空集？

1） 与你同年同月同日生的人的集。

2） 除1和自身外没有别的约数的数集。

3） 以空集$\varnothing$为元素构成的集。

4） 活到一千岁的人的集。