矩阵在测量平差中的应用

崔希璋　陶本藻　编著

测绘出版社

矩阵在测量平差中的应用

崔希璋　陶本藻　编著

测绘出版社

本书共分三章。第一章介绍了在测量平差中常用的矩阵代数基础知识，第二章全面地介绍了测量平差公式的矩阵推导，第三章介绍了矩阵平差。内容通俗易懂，可供国民经济各部门从事测绘工作的技术人员和有关专业师生学习和参考。

矩阵在测量平差中的应用

崔希璋　陶本藻　编著

*

测绘出版社出版

测绘出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行・各地新华书店经售

*

开本 787×1092 1/32・印张 6・字数 138 千字

1980 年 3 月第一版・1980 年 3 月第一次印刷

印数 1—10,000册・定价 0.50 元

统一书号：15039・新 125

前言

在现代有关测量平差的论著中，已广泛地应用了矩阵代数。人们已经认识到：应用矩阵书写和推导平差公式，则思路清楚，过程简单，结论明确，便于对各种平差方法进行总的概括，因此对研究它们之间的内在联系和加深对它们的理解，都有很大的帮助；应用矩阵还能使线性代数知识紧密地与测量平差结合，促进了测量平差的发展。此外，因矩阵算法在电算中有它优点，如今编写测量平差的计算程序，常用到矩阵。由此可见在测量平差中矩阵的应用是十分重要的，为此我们编写了这本“矩阵在测量平差中的应用”的小册子，编写的重点在“应用”，并力求通俗易懂，使具有最小二乘法基础知识的读者就能掌握它。同时，我们也对现有的一些主要测量平差方法，通过矩阵这一工具，作了较详细的讨论。

本书共分三章，第一章介绍了在测量平差中常用的矩阵代数基础知识，第二章是运用矩阵全面地介绍了测量平差中的基础方法和一般平差问题，第三章是运用矩阵导出了许多测量平差方法，其中运用矩阵正交分解变换理论导出的霍斯霍特平差法是值得进一步研究的较新的方法。

编者

1978 年 12 月

目　录

第一章　矩阵的基础知识

本章介绍矩阵代数的一些基础知识，其内容包括矩阵的定义，矩阵的加减法和乘法，转置矩阵及逆矩阵，线性方程组和二次型的矩阵表示，矩阵的求导，分块矩阵及其运算以及矩阵的秩和矩阵的初等变换等。在叙述这些内容时，着重说明其概念和运算法则。

§1　矩阵的定义

设有一个线性方程组，例如平差中的条件方程：

$$
\begin{aligned}
&a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_nv_n+w_a=0\\
&b_1v_1+b_2v_2+\cdots+b_nv_n+w_b=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&r_1v_1+r_2v_2+\cdots+r_nv_n+w_r=0
\end{aligned}
$$

等式的左边由三部份组成，即 n 个改正数 v_i，r 组改正数的系数，r 个闭合差。现在我们将这三种成份按原来排列的次序抽出来，分别组成下面三个表：

$$
\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \end{pmatrix},\quad (v_1\ \ v_2\ \ \cdots\ \ v_n),\quad \begin{pmatrix} w_a \\ w_b \\ \vdots \\ w_r \end{pmatrix}.
$$

这种由一组数排列成长方形(包括正方形)的表就称为矩阵，表中的数称为矩阵的元素。在第一个表中有 r 行 n 列元素，该表称为 $r\times n$ 阶矩阵，第二个表有一行 n 列元素称为 $1\times n$ 阶矩阵，或称行矩阵，第三个表有 r 行一列元素称为 $r\times 1$ 阶矩阵，

或称列矩阵。

一般，设有 $m\times n$ 个元素排成长方形的表

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1-1}$$

称 A 为 m 行 n 列矩阵，a_{ij} 称为矩阵 A 的元素。m 行 n 列矩阵记为 $m\times n$ 矩阵。而(1-1)式可简记为 $A=(a_{ij})$。

当 $m=n$ 时，矩阵 A 称为 n 阶矩阵，或称 n 阶方阵。

当 $m=1$ 时，矩阵

$$A=(a_{11}\ \ a_{12}\ \ \cdots\ \ a_{1n})$$

称为行矩阵，或称行向量。

当 $n=1$ 时，矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

称为列矩阵，或称列向量。

当 $m=n=1$ 时，矩阵

$$A=(a_{11})$$

是 1×1 阶的，它代表一个数 a_{11}。

对于 n 阶方阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

如果主对角线元素 a_{11}，a_{22}，$\cdots$，a_{nn} 两侧的元素对称相等，即

$a_{ij}=a_{ji}$，则称 A 为 n 阶对称方阵。例如矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

就是三阶对称方阵。

如果在方阵中，主对角线元素一侧的元素不全为零，而另一侧元素全为零，称此矩阵为三角形矩阵。例如：

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 0 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

均是三角形矩阵。矩阵 A 中主对角线下侧元素全为零，称为上三角形矩阵，矩阵 B 中主对角线上侧元素全为零，称为下三角形矩阵。

在方阵中，除主对角线元素外，其余元素均为零，即 $a_{ij}=0(i\neq j)$，此时矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

称为 n 阶对角线矩阵。当对角线矩阵中主对角线元素又都为 1 时，则矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

称为单位矩阵或幺阵，一般用 E 表示。

如果矩阵中元素均为零，则称为零矩阵。例如由条件方程

右边的一组零组成的矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

就是 $r\times 1$ 阶零矩阵，一般就用 O 表示。

矩阵和行列式有本质的区别，属两个不同的概念。行列式本身代表一个数，而矩阵仅仅是一组数排列成的表，它只说明表中各元素的排列位置，但矩阵的整体可以参与运算，下面介绍矩阵的基本运算规则。

§2 矩阵的加减法和乘法

（一）矩阵的相等

设有两个同阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 和 $B=(b_{ij})$，如果它们的对应元素相等，即

$$a_{ij}=b_{ij}$$

则矩阵 A 和 B 称为相等。

例［2-1］ 矩阵 A 和 B 为

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix},$$

如果 $A=B$，必须是

$a_{11}=1$，$a_{12}=2$，$a_{13}=4$，$a_{21}=-1$，$a_{22}=3$，$a_{23}=-2$.

（二）矩阵的加减法

如果矩阵 $A=(a_{ij})$ 和 $B=(b_{ij})$ 是同阶矩阵，则矩阵 A 与 B 是可加减的。将两同阶矩阵中相应元素求和差，称为矩阵的加减法。

矩阵 $A+B$ 和 $A-B$ 定义为

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix} \quad (1\text{-}2)$$

若令 $a_{ij} \pm b_{ij} = c_{ij}$，$C=(c_{ij})$，则矩阵

$$\underset{m\times n}{C} = \underset{m\times n}{A} \pm \underset{m\times n}{B},$$

可见矩阵 C 必与 A、B 同阶。

例［2-2］ 求矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & -8 & 5 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 6 & -1 & -7 \\ 4 & -1 & 8 \end{pmatrix},$$

之和与差。

$$C=A+B=\begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ 3 & -9 & 13 \end{pmatrix}, \quad D=A-B=\begin{pmatrix} -3 & 3 & 11 \\ -5 & -7 & -3 \end{pmatrix}.$$

例［2-3］ 已知 $A=(3\ \ 2\ \ 8\ \ 7)$ 求 $2A$。

$$C=2A=A+A=(3\ \ 2\ \ 8\ \ 7)+(3\ \ 2\ \ 8\ \ 7)$$
$$=(6\ \ 4\ \ 16\ \ 14).$$

例［2-4］ 已知

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

求 $3A$。

$$C=3A=A+A+A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 12 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

由例[2-3]和例[2-4]可知，数与矩阵相乘所得之矩阵，其元素就是该数与矩阵中各个元素之乘积，即定义

$$\alpha A = A\alpha = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1-3}$$

由上述定义易知矩阵的加减法有如下几个性质：

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ A+(B+C)=(A+B)+C, \\ 2.\ A+B=B+A, \\ 3.\ A+O=A, \\ 4.\ (\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A, \\ 5.\ \alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B, \end{array}\right\} \tag{1-4}$$

式中 A、B、C 为矩阵，α、β 是数。

（三）矩阵的乘法

设有两个矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pq} \end{pmatrix},$$

如果矩阵 A 的列数等于矩阵 B 的行数，即 $n=p$ 则矩阵 A 与 B 可乘。定义 A 与 B 之积为

$$A\cdot B=C.$$

矩阵 C 为 $m\times q$ 阶，即

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1q} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mq} \end{pmatrix},$$

其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{K=1}^{n}a_{ik}b_{kj},$$

这就是矩阵乘法运算的法则。这种求矩阵 A，B 乘积的法则叫行乘列法则。

例［2-5］ 已知

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

则

$$C=AB=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot(-1) & 1\cdot(-1)+2\cdot2 \\ 3\cdot1+4\cdot(-1) & 3\cdot(-1)+4\cdot2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix},$$

$$D=BA=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1\cdot1+(-1)\cdot3 & 1\cdot2+(-1)\cdot4 \\ (-1)\cdot1+2\cdot3 & (-1)\cdot2+2\cdot4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

这里 AB 和 BA 的运算结果不同，可见矩阵相乘时次序不能随意更动，也就是说，对于矩阵乘法，交换律不成立。又

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix},$$

$$B^2=B\cdot B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -3 & 5\end{pmatrix}.$$

即方阵的自乘可用方阵的平方表出，一般有

$$A^K=\underbrace{A\cdot A\cdots A}_{K个}$$

例［2-6］ 已知

$$\underset{2\times4}{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & -1\\ 2 & 1 & 0 & 2\end{pmatrix},\quad \underset{4\times3}{B}=\begin{pmatrix}4 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 3\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix},$$

矩阵脚注表示阶数，矩阵A有4列，B有4行，故乘积AB有意义，则

$$\underset{2\times3}{C}=AB=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & -1\\ 2 & 1 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 3\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & -2 & 2\\ 9 & 9 & 5\end{pmatrix}.$$

如果将AB进行交换，则BA无意义，因前者的列数不等于后者的行数，同样说明交换律不成立。

例［2-7］ 已知

$$A=(2\quad 4\quad 5),\quad B=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 8\end{pmatrix},$$

则
$$AB=(2\quad 4\quad 5)\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 8\end{pmatrix}=42 .$$

一般

$$AB=(a_{11}\quad a_{12}\cdots a_{1n})\begin{pmatrix}b_{11}\\b_{21}\\\vdots\\b_{n1}\end{pmatrix}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\cdots+a_{1n}b_{n1},$$

即行矩阵与列矩阵之乘积为一个数。

例［2-8］ 已知

$$A=\begin{pmatrix}3&2\\-1&4\end{pmatrix},\quad O=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\quad B=(4\quad 2),$$

则

$$AO=\begin{pmatrix}3&2\\-1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

$$OB=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}(4\quad 2)=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},$$

亦即任何矩阵与零矩阵相乘仍为零矩阵。

例［2-9］ 已知

$$A=\begin{pmatrix}3&2&4\\-1&5&-2\\7&0&8\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

则

$$AE=\begin{pmatrix}3&2&4\\-1&5&-2\\7&0&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2&4\\-1&5&-2\\7&0&8\end{pmatrix},$$

$$EA=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2&4\\-1&5&-2\\7&0&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2&4\\-1&5&-2\\7&0&8\end{pmatrix},$$

一般

$$AE=EA=A, \tag{1-5}$$

亦即任何矩阵(非零矩阵)与单位矩阵相乘仍为原矩阵。

当多个矩阵相乘时，其中左面矩阵的列数必须等于右面矩阵的行数，此时有

$$\underset{m\times t}{A}\cdot\underset{t\times n}{B}\cdot\underset{n\times p}{C}\cdot\underset{p\times q}{D}=\underset{m\times q}{G} \tag{1-6}$$

矩阵的乘法有如下性质：

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & ABC=(AB)C=A(BC)\\ (2) & A(B+C)=AB+AC\end{array}\right\} \tag{1-7}$$

下面用例来说明这两个性质。

例［2-10］ 已知

$$A=(a_{11}\ \ a_{12}),\ \ B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix},\ \ C=\begin{pmatrix}c_{11}\\ c_{21}\end{pmatrix},$$

则

$$(AB)C=(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}\quad a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})\begin{pmatrix}c_{11}\\ c_{21}\end{pmatrix}=$$

$$=(a_{11}b_{11}c_{11}+a_{12}b_{21}c_{11}+a_{11}b_{12}c_{21}+a_{12}b_{22}c_{21}),$$

而

$$A(BC)=(a_{11}\quad a_{12})\begin{pmatrix}b_{11}c_{11}+b_{12}c_{21}\\ b_{21}c_{11}+b_{22}c_{21}\end{pmatrix}=$$

$$=(a_{11}b_{11}c_{11}+a_{11}b_{12}c_{21}+a_{12}b_{21}c_{11}+a_{12}b_{22}c_{21}).$$

可见

$$(AB)C=A(BC).$$

例［2-11］ 已知

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}\\ a_{21}\end{pmatrix},\ \ B=(b_{11}\ \ b_{12}\ \ b_{13}),\ \ C=(c_{11}\ \ c_{12}\ \ c_{13}),$$

则

$$A(B+C)=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\end{pmatrix}(b_{11}+c_{11}\quad b_{12}+c_{12}\quad b_{13}+c_{13})$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}(b_{11}+c_{11}) & a_{11}(b_{12}+c_{12}) & a_{11}(b_{13}+c_{13})\\a_{21}(b_{11}+c_{11}) & a_{21}(b_{12}+c_{12}) & a_{21}(b_{13}+c_{13})\end{pmatrix},$$

而

$$AB+AC=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{11}b_{13}\\a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{21}b_{13}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_{11}c_{11} & a_{11}c_{12} & a_{11}c_{13}\\a_{21}c_{11} & a_{21}c_{12} & c_{21}c_{13}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}(b_{11}+c_{11}) & a_{11}(b_{12}+c_{12}) & a_{11}(b_{13}+c_{13})\\a_{21}(b_{11}+c_{11}) & a_{21}(b_{12}+c_{12}) & a_{21}(b_{13}+c_{13})\end{pmatrix}.$$

可见

$$A(B+C)=AB+AC。$$

§ 3　转置矩阵与逆矩阵

(一) 转置矩阵

设A是$m\times n$矩阵，将A的行与列依次对换，得$n\times m$矩阵，称为A的转置矩阵，并记为A'。

例 [3-1]

$$\underset{3\times2}{A}=\begin{pmatrix}3 & -2\\4 & 4\\-1 & 7\end{pmatrix},\quad \underset{2\times3}{A'}=\begin{pmatrix}3 & 4 & -1\\-2 & 4 & 7\end{pmatrix},$$

$$\underset{1\times4}{B}=(7\quad -1\quad 3\quad 4),\quad \underset{4\times1}{B'}=\begin{pmatrix}7\\-1\\3\\4\end{pmatrix},$$

$$\underset{1\times1}{C}=(9),\qquad \underset{1\times1}{C'}=(9)=\underset{1\times1}{C}.$$

转置矩阵有下列性质：

(1) 将矩阵进行两次转置即得原矩阵，即

$$\left.\begin{array}{ll} & A''=(A')'=A, \\ (2) & (A+B)'=A'+B', \\ (3) & (AB)'=B'A'. \end{array}\right\} \tag{1-8}$$

例［3-2］ 已知

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 7 & -1\\ 4 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$A'=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix},\qquad B'=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 7 & 2 & 0\\ -1 & 3 & 1\end{pmatrix},$$

则

$$AB=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 7 & -1\\ 4 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 14 & -3\\ 17 & 13 & 10\end{pmatrix},$$

$$(AB)'=\begin{pmatrix}0 & 17\\ 14 & 13\\ -3 & 10\end{pmatrix},$$

而

$$B'A'=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 7 & 2 & 0\\ -1 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 17\\ 14 & 13\\ -3 & 10\end{pmatrix}.$$

可见

$$(AB)'=B'A'$$