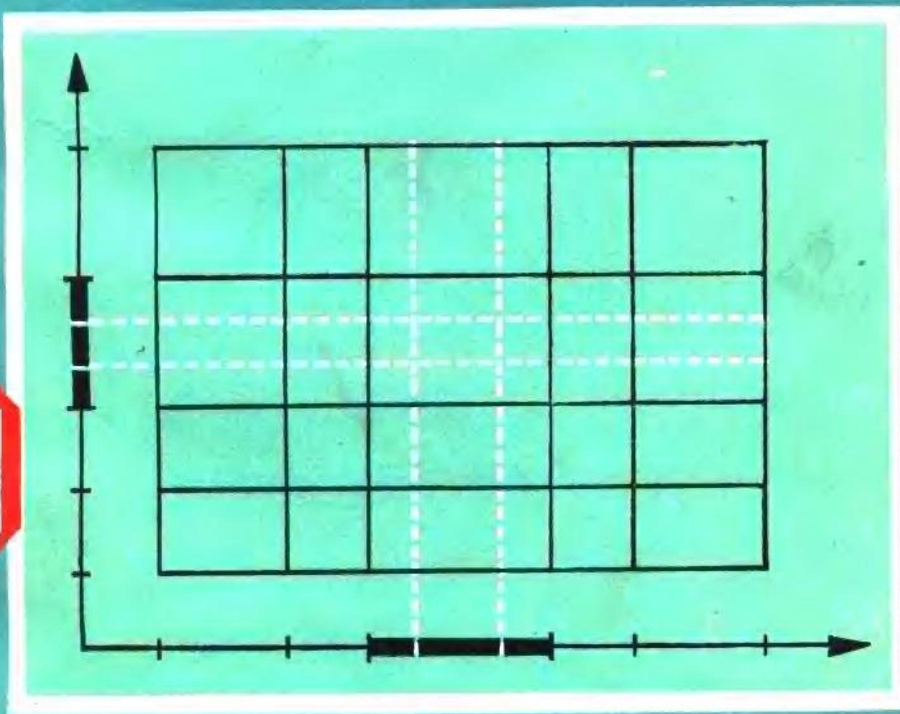
W· 托奇克著

实分析基础

第二卷

邓立生 译 雷 垣 校订



实分析基础

第二卷

W. 托奇克 著

邓立生 译 雷 垣 校订

人民教育出版社

实 分 析 基 础

第 二 卷

W. 托奇克 著

邓立生 译 雷 垣 校订

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷二厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 5.75 字数 139,000

198,年7月第1版 1981 年 2月第1次印刷

印数 00,001— 9,000

书号 13012·0493 定价 0.52 元

序

眼前的这本“积分学”是与“微分学”相衔接的．如同那里一样，这里也将一维与多维的情形作了统一的处理，这样就避免了类似结果的重复．这书的各个章节是与微分学合并起来编号的．因而有关 1 至 7 章的引证是指“微分学”的．

如同我在“微分学”中已经提及的，这里我也要感谢为这书的底稿而作了极有裨益的指示的 Maruhn 教授．对于出版社和印刷所所付出的认真劳动我也要致以谢意．

W. Tutschke

柏林/哈勒　于 1970 年春

目　录

引　言

本书以积分概念的论述开始．如果f是定义于R^k中的一个区间Q上的(连续)函数，那么我们可以将Q的分割对应于下列形式的和σ：将f在部分区间$Q_{\nu_1\cdots\nu_k}$的任意一点$x_{\nu_1\cdots\nu_k}$处的函数值乘以该部分区间的测度$mQ_{\nu_1\cdots\nu_k}$，然后就Q的这个分割的所有部分区间作出和

$$\sigma_n=\sum_{\nu_1,\cdots,\nu_k} f(x_{\nu_1,\cdots,\nu_k})mQ_{\nu_1\cdots\nu_k}$$

(这里一个区间的测度是它的棱长的乘积)．于是我们可以证明：

考虑一逐步变得更为细密的分割序列，则相应的和σ_n趋于一确定的实数I．这个数既不与分割的特殊选择有关，也不与点$x_{\nu_1\cdots\nu_k}$的选择有关．我们称数I为f在Q上的积分．

关于积分将首先证明下面两个基本定理：

A．一m维的积分可以化为m个一维的积分．

B．在一维区间$\{x:a\leqq x\leqq b\}$上将f积分，则得$F(b)-F(a)$，于此F是f的原函数．这是指F是一可微函数，而它在每个点x处的导数$\dfrac{dF(x)}{dx}$等于$f(x)$．

这个定理(微积分学的基本定理)建立了积分与微分之间的关系．

积分问题是与下列问题紧密联系的：我们要使尽可能多的集合(不仅是区间)得以定义其测度．这个问题将以考虑区间网的办法来解决，这些区间网一种是完全包含于M中的，而另一种则完全包含了集合M．一个(可测)集合的测度于是可以表示为

$f(x)=1$ 在 M 上的 k 维积分. 在所谓柱形集合的情形(例如球体就是过球心的一个圆域上的柱形集合),我们可以借助于定理 A 将这测度表示为 $k-1$ 维的积分(特别由这个方法可以得出用一维积分来表示介于一曲线与 x 轴之间的平面片的测度).

对于积分学的应用下列定理是特别重要的:

C. 如果 $y_1, \cdots, y_k$ 空间中的集合 $\widetilde{M}$ 是 $x_1, \cdots, x_k$ 空间中集合 M 的一一对应的像集 $h(M)$ 并且 f 是在 $\widetilde{M}=h(M)$ 上定义的(连续)函数,则

$$\int_{h(M)} f dy_1 \cdots dy_k = \int_M f \left| \frac{\partial(y_1, \cdots, y_k)}{\partial(x_1, \cdots, x_k)} \right| dx_1 \cdots dx_k.$$

例如,当我们要将二维的或三维的积分变换为极坐标时,就需应用这个公式.

在第 10 章中将论述 Stokes-Cartan 定理. 这个定理表述了在8.3.中仅就一维积分而言的微积分学主要定理在多维情形下的推广. 它说明:

D. 如果将一微分形式 ω 在 R^k 的一 $p+1$ 维流形 B 的边缘 ∂B 上作积分, 则其结果与"求过导的"微分形式 $d\omega$ 在流形 B 上的积分是相同的:

$$\int_{\partial B} \omega = \int_B d\omega$$

于此 p 维积分的被积函数是 p 级的微分形式(并且它总共确有 p 个符号 dx_j); $d\omega$ 是 $p+1$ 级微分形式.

在第 11 章中将研究下列问题:一线段可以对应于例如一维的测度(长度);然而将这线段看作平面上的点集时,那么我们也可使它对应于二维的测度. 这测度总是为零的. 类似地, 二维区间的三维测度都是零. 一般地我们可以指明,(在 R^k 中的) p 维流形的容积可以通过一 p 维的测度来度量. 这将在第 11 章中加以定义. 这个定义作为特例包含了曲线弧长之测度与曲面表面积之测度.

8. 积 分 法

如果为了使一物体沿一线段运动距离 s 需要作用常力 K(K 作用的方向为线段的方向)，则由此而作的功为 $A=Ks$. 如果作用的力不是常力，那么我们可用下列方法来近似地计算所作的功：将线段分割为这样小的部分线段(它们的长为 Δs_i)，使得在这些部分线段上 K 可以按预先指定的精确度用常力 K_i 来代替(我们可以选择在所考虑的部分线段中某个点处的 K 的值作为 K_i). 从而所作的功就近似地等于 $\sum\limits_i K_i\Delta s_i$.

在积分学中将证明，(在适当的假定下)随着线段的愈分割愈细，这个近似和具有一个极限. 此外，我们还将给出这个极限与近似和之偏差的估值.

8.1. Riemann 积分

在 R^k 中考虑闭区间

$$Q=\{(x_1, \cdots, x_k): a_j\leqq x_j\leqq b_j,\ a_j<b_j,\ j=1, \cdots, k\}.$$

与它对应的测度为

$$mQ=(b_1-a_1)\cdots(b_k-a_k)$$

(区间棱长的乘积). 如果 $x'=(x_1', \cdots, x_k')$ 与 $x''=(x_1'', \cdots, x_k'')$ 是 Q 的二点，则由于 $a_j\leqq x_j', x_j''\leqq b_j$, 故 $|x_j''-x_j'|\leqq b_j-a_j$, 而这二点的距离

$$d(x', x'')\leqq\sqrt{(b_1-a_1)^2+\cdots+(b_k-a_k)^2}.^{(1)}$$

令 $\sqrt{(b_1-a_1)^2+\cdots+(b_k-a_k)^2}=\phi(Q)$, 则 $d(x', x'')\leqq\phi(Q)$, $\forall x'$,

1) 因为毋须担心引起混淆，下面我们还是简单地以 $\sqrt{\ }$ 来表示正根.

$\forall x''\in Q$. 另一方面至少存在 Q 的一对点，它们的距离等于 $\phi(Q)$ (即点 $x'=(a_1, \cdots, a_k), x''=(b_1, \cdots, b_k)$). 数 $\phi(Q)$ 称为 Q 的直径。它是 Q 的二点所能取得的最大距离.

Q 的分割：首先，将 k 个一维区间的第 i 个区间

$$\{x_i: a_i\leqq x_i\leqq b_i\},\quad i=1, \cdots, k \tag{1}$$

分割为 l_i 个部分区间 $\{x_i: x_i^{(\nu_i-1)}\leqq x_i\leqq x_i^{(\nu_i)}\}$, $\nu_i=1,\cdots,l_i$ ($x_i^{(0)}=a_i$, $x_i^{(\nu_i-1)}<x_i^{(\nu_i)}$, $x_i^{(l_i)}=b_i$). 第 ν_i 个部分区间的长为 $\Delta x_i^{(\nu_i)}=x_i^{(\nu_i)}-x_i^{(\nu_i-1)}$. 我们有 $\sum\limits_{\nu_i=1}^{l_i}\Delta x_i^{(\nu_i)}=b_i-a_i$. 通过所有 k 个一维区间(1)的这种分割，Q 就分割为 $l_1\cdots l_k$ 个 k 维的部分区间(参看情形 $k=2$ 时的图 1).

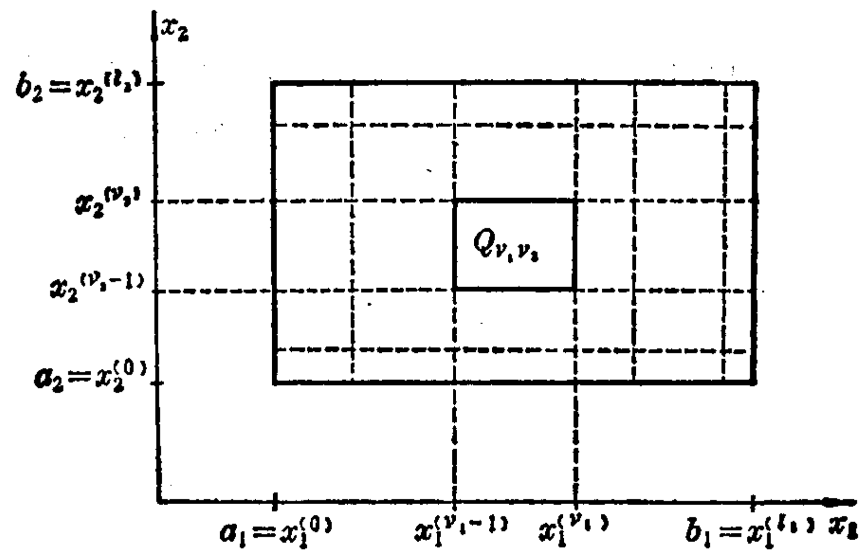


图 1

$$Q_{\nu_1\cdots\nu_k}=\{(x_1, \cdots, x_k): x_i^{(\nu_i-1)}\leqq x_i\leqq x_i^{(\nu_i)},\quad i=1, \cdots, k\}.$$

$Q_{\nu_1\cdots\nu_k}$ 的测度是

$$mQ_{\nu_1\cdots\nu_k}=\Delta x_1^{(\nu_1)}\cdots\Delta x_k^{(\nu_k)}.$$

Q 的全部 k 维部分区间 $Q_{\nu_1\cdots\nu_k}$ 的测度的总和当然就是 Q 的测度：

$$\sum_{\nu_1,\cdots,\nu_k} mQ_{\nu_1\cdots\nu_k}=\sum_{\nu_1,\cdots,\nu_k}\Delta x_1^{(\nu_1)}\cdots\Delta x_k^{(\nu_k)}$$

$$=\sum_{\nu_1}\Delta x_1^{(\nu_1)}\cdots\sum_{\nu_k}\Delta x_k^{(\nu_k)}=(b_1-a_1)\cdots(b_k-a_k)$$
$$=mQ. \tag{2}$$

现在假设在Q上定义了一个实值的有界函数f. 相应于Q的一个分割, f对应于由

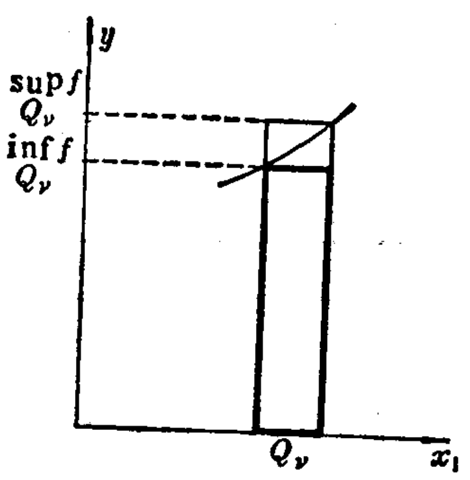
$$s=\sum_{\nu_1,\cdots,\nu_k}\inf_{Q_{\nu_1\cdots\nu_k}}f\cdot mQ_{\nu_1\cdots\nu_k}$$

与由

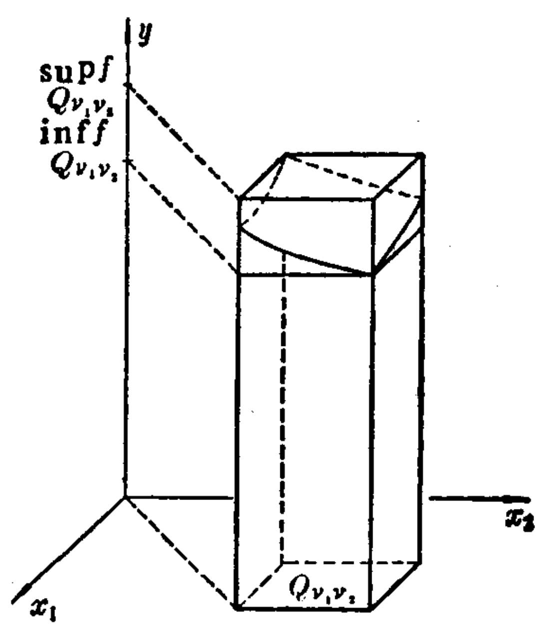
$$S=\sum_{\nu_1,\cdots,\nu_k}\sup_{Q_{\nu_1\cdots\nu_k}}f\cdot mQ_{\nu_1\cdots\nu_k}$$

所确定的所谓下和与上和(因为f在整个Q上是上有界与下有界的, 故在部分区间$Q_{\nu_1\cdots\nu_k}$上也必定如此, 由此就保证了$\inf\limits_{Q_{\nu_1\cdots\nu_k}}f$与$\sup\limits_{Q_{\nu_1\cdots\nu_k}}f$的存在).

考虑f的图形, 就可得出下和与上和的几何意义(于此假定$f(x)\geqq 0, \forall x$). 例如, 假如f是一个实变量的函数, 那么$\inf f\cdot mQ_\nu$与$\sup f\cdot mQ_\nu$就是图中给出的矩形长条的测度(参看图2a). 假如



(a)



(b)

图 2

f 是两个实变量的函数，那么 $\inf\limits_{Q_{\nu_1\nu_2}} f\cdot mQ_{\nu_1\nu_2}$ 与 $\sup\limits_{Q_{\nu_1\nu_2}} f\cdot mQ_{\nu_1\nu_2}$ 则是方形柱体的测度(参看图 2b).

下和与上和的性质：

1. 将不等式

$$\inf_{Q} f \leqq \inf_{Q_{\nu_1\cdots\nu_k}} f \leqq \sup_{Q_{\nu_1\cdots\nu_k}} f \leqq \sup_{Q} f$$

乘以 $mQ_{\nu_1\cdots\nu_k}$，然后对于所有 $\nu_1, \cdots, \nu_k (\nu_j = 1, \cdots, l_j)$ 求和，于是由(2)得

$$\begin{aligned}\inf_{Q} f\cdot mQ &\leqq \sum_{\nu_1,\cdots,\nu_k} \inf_{Q_{\nu_1\cdots\nu_k}} f\cdot mQ_{\nu_1\cdots\nu_k}\\ &\leqq \sum_{\nu_1,\cdots,\nu_k} \sup_{Q_{\nu_1\cdots\nu_k}} f\cdot mQ_{\nu_1\cdots\nu_k}\\ &\leqq \sup_{Q} f\cdot mQ,\end{aligned} \tag{3}$$

故根据下和与上和的定义有

$$\inf_{Q} f\cdot mQ \leqq s \leqq S \leqq \sup_{Q} f\cdot mQ.$$

2. 将 $\{x_i : a_i \leqq x_i \leqq b_i\}$ 的每个部分区间 $\{x_i : x_i^{(\nu_i-1)} \leqq x_i \leqq x_i^{(\nu_i)}\}$ 再进行分割，于是每个 $Q_{\nu_1\cdots\nu_k}$ 又分割为某些部分区间 $Q_{\nu_1\cdots\nu_k|\mu_1\cdots\mu_k}$. 将全部 $Q_{\nu_1\cdots\nu_k}$ 作了这种分割之后，我们就得到 Q 的一个新的分割. 这个分割称为原来的分割的*加细*(参看图 3).

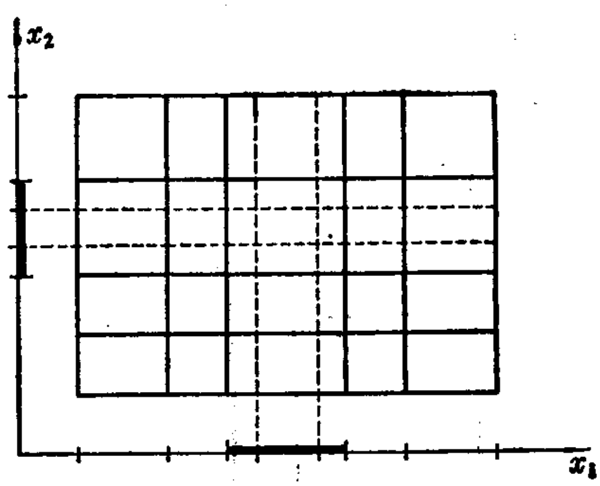


图 3

设相应于分割的加细的下和与上和为 $\tilde{s}$ 与 $\tilde{S}$. 将 (3) 应用于 $Q_{\nu_1\cdots\nu_k}$ 的分割，我们得到

$$\inf_{Q_{\nu_1\cdots\nu_k}} f\cdot mQ_{\nu_1\cdots\nu_k} \leqq \sum_{\mu_1,\cdots,\mu_k} \inf_{Q_{\nu_1\cdots\nu_k|\mu_1\cdots\mu_k}} f\cdot mQ_{\nu_1\cdots\nu_k|\mu_1\cdots\mu_k}$$

$$\leqq \sum_{\mu_1,\cdots,\mu_k} \sup_{Q_{\nu_1\cdots\nu_k|\mu_1\cdots\mu_k}} f\cdot mQ_{\nu_1\cdots\nu_k|\mu_1\cdots\mu_k} \leqq \sup_{Q_{\nu_1\cdots\nu_k}} f\cdot mQ_{\nu_1\cdots\nu_k}.$$

对于所有 $\nu_1, \cdots, \nu_k(\nu_j=1, \cdots, l_j)$写出这些不等式，然后将它们相加，则得

$$s\leqq\tilde{s}\leqq\tilde{S}\leqq S. \tag{4}$$

3. 由一维区间$\{x_i: a_i\leqq x_i\leqq b_i\}$的两个不同的分割得出$Q$的两个不同的分割. 由$\{x_i: a_i\leqq x_i\leqq b_i\}$的这二分割的诸分点我们得出$\{x_i: a_i\leqq x_i\leqq b_j\}$的一个新的分割，从而也就得出$Q$的一个新的分割. 由于它是原来的两个分割的加细，它就称为它们的*公共的加细*(参看图 4). 如果s, S与s', S'分别表示f相应于原来二分割的下和与上和，而$\tilde{s}, \tilde{S}$表示f相应于它们的公共的加细的下和与上和，那么由(4)有

$$s\leqq\tilde{s}\leqq\tilde{S}\leqq S \text{ 与 } s'\leqq\tilde{s}\leqq\tilde{S}\leqq S'.$$

由此特别得到

$$s\leqq S' \text{ 与 } s'\leqq S. \tag{5}$$

4. 关于(5)的说明：取定一个分割，其相应的下和与上和设为s'与S'. 于是由(5)对于任意另一下和s均有

$$s\leqq S'.$$

从而所有下和所成的集合是上有界的. 因此下和所成的集合的上确界存在，记它为$\sup s=I_{下}$. 因而对于每个下和s均有$s\leqq I_{下}$.

类似，由(5)对于所有上和S若再固定s'则均有

$$s'\leqq S.$$

所以上和所成的集合是下有界的，从而存在$\inf S=I_{上}$. 因而对于每个上和S均有$S\geqq I_{上}$.

我们分别称$I_{下}$与$I_{上}$为f在Q上的*下积分与上积分*.

如果我们使s遍取所有下和各值，那么由$s\leqq S'$即得$I_{下}=\sup s\leqq S'$. 由此令S'遍取所有上和各值，即得$I_{下}\leqq\inf S'=I_{上}$. 因此对于任意下和s与上和S均有

$$s \leqq I_{下} \leqq I_{上} \leqq S. \tag{6}$$

定义. 如果 $I_{下}=I_{上}$，则称 f 在 Q 上是 Riemann 可积的. 于是 $I_{下}$ 与 $I_{上}$ 的公共值 I 称为 f 在 Q 上的 Riemann 积分(R积分). 函数 f 称为被积函数.

由于 $mQ_{\nu_1\cdots\nu_k}=\Delta x_1^{(\nu_1)}\cdots\Delta x_k^{(\nu_k)}$，故

$$s=\sum_{\nu_1,\cdots,\nu_k}\inf_{Q_{\nu_1\cdots\nu_k}} f\cdot\Delta x_1^{(\nu_1)}\cdots\Delta x_k^{(\nu_k)},$$

$$S=\sum_{\nu_1,\cdots,\nu_k}\sup_{Q_{\nu_1\cdots\nu_k}} f\cdot\Delta x_1^{(\nu_1)}\cdots\Delta x_k^{(\nu_k)}.$$

下和与上和的这个形式引出了表示 I 的下列符号写法:

$$I=\int_Q f(x_1,\cdots,x_k)dx_1\cdots dx_k=\iint_Q\cdots\int f(x_1,\cdots,x_k)dx_1\cdots dx_k$$
$$=\int_Q f(x)dx=\int_Q fdx.$$

如果 $Q=\{x:a\leqq x\leqq b\}$(一维区间)，则替代$\int_Q f(x)dx$ 我们也写成 $\int_{x=a}^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx.$

下面我们假定 f 在 Q 上是连续的. 因为 Q 是紧致的，于是 f 也是一致连续的(参看 4.3.). 即有

给定 $\varepsilon>0 \Longrightarrow \exists\delta_\varepsilon>0$: $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$, $\forall x_1$, $\forall x_2$, $d(x_1,x_2)<\delta_\varepsilon$.

定理1. 如果 Q 的一个分割的所有 $Q_{\nu_1\cdots\nu_k}$ 的棱长均小于 $\frac{1}{\sqrt{k}}\delta_\varepsilon$，则相应于这个分割的下和与上和适合:

$$S-s<\varepsilon\cdot mQ.$$

注意. 如果 $Q_{\nu_1\cdots\nu_k}$ 的棱长小于$\frac{1}{\sqrt{k}}\delta_\varepsilon$，则 $\phi(Q_{\nu_1\cdots\nu_k})<\delta_\varepsilon$. 因为对于 $Q_{\nu_1\cdots\nu_k}$ 的任意二点 $x'=(x_1',\cdots,x_k')$ 与 $x''=(x_1'',\cdots,x_k'')$ 就有

$$d(x',x'')=\sqrt{\sum_i(x_i''-x_i')^2}<\sqrt{k\cdot\frac{1}{k}\delta_\varepsilon^2}=\delta_\varepsilon.$$

定理 1 的证明. 根据 4.2. 的定理在 $Q_{\nu_1,\cdots,\nu_k}$ 中存在点 x_* 与 x_{**}，使得 $f(x_*)=\sup\limits_{Q_{\nu_1\cdots\nu_k}} f$ 与 $f(x_{**})=\inf\limits_{Q_{\nu_1\cdots\nu_k}} f$. 由上面所提注意的证明我们有 $d(x_*, x_{**})<\delta_\varepsilon$, 所以 $|f(x_*)-f(x_{**})|<\varepsilon$, 从而

$$\sup_{Q_{\nu_1\cdots\nu_k}} f-\inf_{Q_{\nu_1\cdots\nu_k}} f<\varepsilon.$$

现在

$$S-s=\sum_{\nu_1,\cdots,\nu_k}\left(\sup_{Q_{\nu_1\cdots\nu_k}} f-\inf_{Q_{\nu_1\cdots\nu_k}} f\right)mQ_{\nu_1,\cdots,\nu_k},$$

故

$$S-s<\varepsilon\sum_{\nu_1,\cdots,\nu_k} mQ_{\nu_1,\cdots,\nu_k}=\varepsilon\cdot mQ.$$

证完.

推论 1. f 在 Q 上连续 $\Rightarrow f$ 在 Q 上 R 可积.[1]

---

1) 还存在 Riemann 可积的不连续函数. 例如，每个在区间 $I=\{x: a\leqq x\leqq b\}$ 上定义的实值单调增(或减)函数就是 R 可积的. 因为，将 I 剖分为 n 个等长的部分区间

$$Q_\nu=\left\{x: a+(\nu-1)\frac{b-a}{n}\leqq x\leqq a+\nu\frac{b-a}{n}\right\},\quad \nu=1,\cdots,n,$$

那么(设 f 是单增的) $\inf\limits_{Q_\nu} f$ 与 $\sup\limits_{Q_\nu} f$ 就分别等于 f 在 Q_ν 的起点与终点处的函数值:

$$\inf_{Q_\nu} f=f\left(a+(\nu-1)\frac{b-a}{n}\right),\qquad \sup_{Q_\nu} f=f\left(a+\nu\frac{b-a}{n}\right).$$

因而相应的下和与上和是

$$s=\sum_{\nu=1}^{n} f\left(a+(\nu-1)\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n},$$

$$S=\sum_{\nu=1}^{n} f\left(a+\nu\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n},$$

故

$$S-s=f(b)\frac{b-a}{n}-f(a)\frac{b-a}{n}=(f(b)-f(a))\frac{b-a}{n}.$$

这表示: 当 n 选择得充分大时，则 $S-s$ 就可变得任意地小. 假如 f 不是 R 可积的，则 $I_上-I_下=d>0$. 然而由于(6)，则也有 $S-s>d$; 因而 $S-s$ 就不可能变得任意地小.

这个例子指出，存在 R 可积的不连续函数，然而下面我们仅只积分连续的函数(应用 Lebesgue 积分来作某些不连续函数的积分是最为适宜的，然而对于这种积分这里不拟论及)。

证明. 设给出了 $\varepsilon>0$. 于是对于其所有部分区间 $Q_{\nu_1,\cdots,\nu_k}$ 的棱长均小于 $\frac{1}{\sqrt{k}}\delta_\varepsilon$ 的每一种分割便有 $S-s<\varepsilon\cdot mQ$. 由(6)得 $I_{上}-I_{下}\leqq S-s$. 故 $I_{上}-I_{下}\leqq\varepsilon\cdot mQ$. 由于 $\varepsilon>0$ 可任意选择，故必 $I_{上}-I_{下}=0$. 证完.

还是假定 f 在 Q 上定义并且连续. 对于 Q 的每个分割，它的所有 $Q_{\nu_1,\cdots,\nu_k}$ 的棱长均小于 $\frac{1}{\sqrt{k}}\delta_\varepsilon$ 者，推论 2 成立:

推论 2. 在定理 1 的假定下有

$$\left|\int_Q f(x)dx-\sum_{\nu_1,\cdots,\nu_k} f(x_{\nu_1,\cdots,\nu_k})mQ_{\nu_1,\cdots,\nu_k}\right|<\varepsilon\cdot mQ,$$

于此 $x_{\nu_1,\cdots,\nu_k}$ 是 $Q_{\nu_1,\cdots,\nu_k}$ 中任意选择的一点(参看图 5).

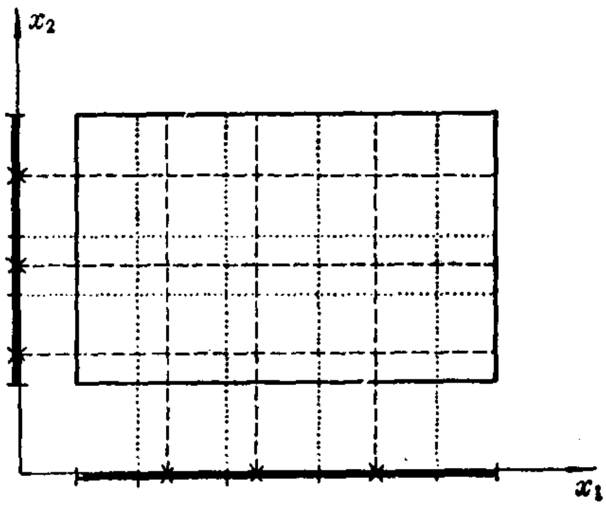


图 4

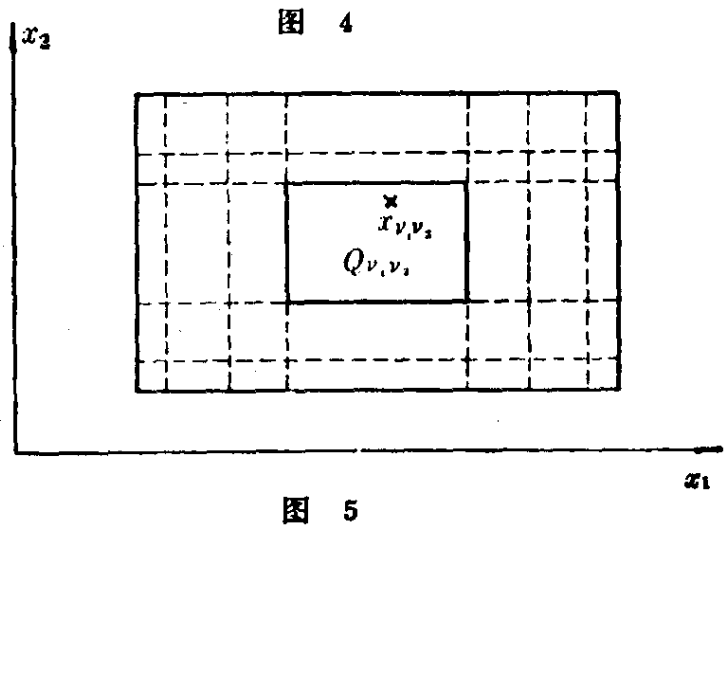


图 5

证明. 我们有

$$\inf_{Q_{\nu_1\cdots\nu_k}} f \leqq f(x_{\nu_1\cdots\nu_k}) \leqq \sup_{Q_{\nu_1\cdots\nu_k}} f,$$

故

$$\inf_{Q_{\nu_1\cdots\nu_k}} f\cdot mQ_{\nu_1\cdots\nu_k} \leqq f(x_{\nu_1\cdots\nu_k})\cdot mQ_{\nu_1\cdots\nu_k} \leqq \sup_{Q_{\nu_1\cdots\nu_k}} f\cdot mQ_{\nu_1\cdots\nu_k}.$$

对于所有 $\nu_1, \cdots, \nu_k (\nu_j = 1, \cdots, l_j)$ 来求和并令

$$\sum_{\nu_1,\cdots,\nu_k} f(x_{\nu_1\cdots\nu_k})\cdot mQ_{\nu_1\cdots\nu_k} = \sigma,$$

则由最后一个不等式得

$$s \leqq \sigma \leqq S. \tag{7}$$

根据推论 1 有 $I_{下} = I_{上} = I$. 因而(6)就呈形式

$$s \leqq I \leqq S. \tag{8}$$

由(7)与(8)得

$$|I-\sigma| \leqq S-s.$$

因而根据定理 1 有 $|I-\sigma| \leqq S-s < \varepsilon\cdot mQ$. 证完.

定义. 量

$$\sigma = \sum_{\nu_1,\cdots,\nu_k} f(x_{\nu_1\cdots\nu_k})\cdot mQ_{\nu_1\cdots\nu_k}$$

称为相应于所考虑的分割的*近似和*.[1]

定义. 一个由分割所组成的序列称做是优越的分割序列, 如果它满足:

若 λ_n 是第 n 次分割的诸部分区间 $Q^{(n)}_{\nu_1\cdots\nu_k}$ 的最大棱长, 则 $\lambda_n \to 0$.

例 1. 若是我们将一区间的所有的棱逐次地二等分, 我们就得一个优越的分割序列(正规分割序列, 参看图 6).

推论 3. 设已给一个优越的分割序列, 而 σ_n 是相应于第 n 次

1) 近似和的值是与 $Q_{\nu_1\cdots\nu_k}$ 中点 $x_{\nu_1\cdots\nu_k}$ 的选择有关的.

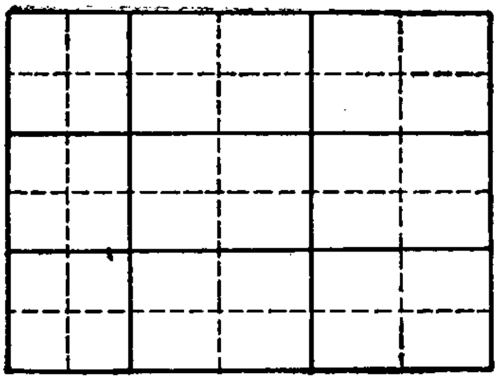


图 6

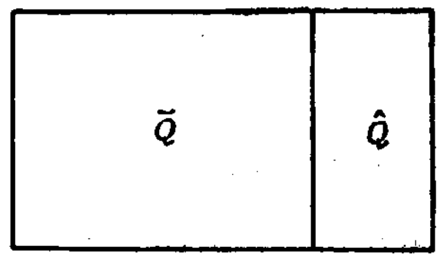


图 7

分割的近似和，则

$$\sigma_n \to I.$$

证明. 设给定了 $\varepsilon > 0$. 对此(由于一致连续性)对应地有 δ_ε. 由于已给的分割序列是优越的，故存在一个 N，使得对于 $n \geqq N$，则相应的分割的所有部分区间的棱长都小于 $\frac{1}{\sqrt{k}}\delta_\varepsilon$. 因而根据推论 2 有

$$|I - \sigma_n| < \varepsilon \cdot mQ, \forall n \geqq N.$$

由于 $\varepsilon > 0$ 可以任意选择，故 $\sigma_n \to I$. 证完.

假设区间 Q 剖分为二部分区间 $\tilde{Q}$ 与 $\hat{Q}$(参看图 7).[1] 假定 f 在 Q 上定义并且连续. 于是有

推论 4. 下式成立：

$$\int_Q f(x)dx = \int_{\tilde{Q}} f(x)dx + \int_{\hat{Q}} f(x)dx.$$

证明. 考虑 Q 的如下的优越分割序列：将 Q 剖分为 $\tilde{Q}$ 与 $\hat{Q}$，构成 Q 的第一次分割. Q 的进一步的分割则由 $\tilde{Q}$ 与 $\hat{Q}$ 的逐次正规分割来求得(因而 $\tilde{Q}$ 与 $\hat{Q}$ 的第 $n-1$ 次正规分割合起来就给出 Q 的第 n 次分割).

因此对于相应于 Q 的第 n 次分割的近似和 σ_n 成立

1) 相应的开区间不具有公共点.