中国科学院研究生教学丛书

物理学中的群论

马中骐　编著

科学出版社

中国科学院研究生教学丛书

物理学中的群论

马中骐 著

科学出版社

1998

内 容 简 介

本书是物理类研究生的群论教材。主要内容包括群的基本概念和线性表示理论，转动群，晶体的对称性，置换群，SU(N)群，SO(N)群，李群和李代数。内容详实。每章后均配有适量习题，便于读者切实掌握有关知识。

图书在版编目（CIP）数据

物理学中的群论/马中骐著．一北京：科学出版社，1998.1

（中国科学院研究生教学丛书/路甬祥主编）

ISBN 7-03-005971-9

Ⅰ.物…　Ⅱ.马…　Ⅲ.群论-应用-物理学-研究生-教材

Ⅳ.O411.1

中国版本图书馆CIP数据核字（97）第05124号

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1998年1月第一版　开本：850×1168　1/32

1998年1月第一次印刷　印张：23 3/8

印数：1—1 600　字数：615 000

定价：42.00 元

《中国科学院研究生教学丛书》序

在21世纪曙光初露，中国科技、教育面临重大改革和蓬勃发展之际，《中国科学院研究生教学丛书》——这套凝聚了中国科学院新老科学家、研究生导师们多年心血的研究生教材面世了。相信这套丛书的出版，会在一定程度上缓解研究生教材不足的困难，对提高研究生教育质量起着积极的推动作用。

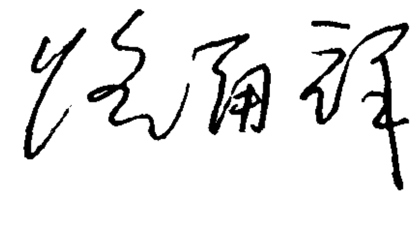
21世纪将是科学技术日新月异，迅猛发展的新世纪，科学技术将成为经济发展的最重要的资源和不竭的动力，成为经济和社会发展的首要推动力量。世界各国之间综合国力的竞争，实质上是科技实力的竞争。而一个国家科技实力的决定因素是它所拥有的科技人才的数量和质量。我国要想在21世纪顺利地实施“科教兴国”和“可持续发展”战略，实现小平同志规划的第三步战略目标——把我国建设成中等发达国家，关键在于培养造就一支数量宏大、素质优良、结构合理，有能力参与国际竞争与合作的科技大军，这是摆在我国高等教育面前的一项十分繁重而光荣的战略任务。

中国科学院作为我国自然科学与高新技术的综合研究与发展中心，在建院之初就明确了出成果出人才并举的办院宗旨，长期坚持走科研与教育相结合的道路，发挥了高级科技专家多，科研条件好，科研水平高的优势，结合科研工作，积极培养研究生；在出成果的同时，为国家培养了数以万计的研究生。当前，中国科学院正在按照江泽民同志关于中国科学院要努力建设好“三个基地”的指示，在建设具有国际先进水平的科学研究基地和促进高新技术产业发展基地的同时，加强研究生教育，努力建设好高级人才培养基地，在肩负起发展我国科学技术及促进高新技术产业

发展重任的同时，为国家源源不断地培养输送大批高级科技人才。

质量是研究生教育的生命，全面提高研究生培养质量是当前我国研究生教育的首要任务。研究生教材建设是提高研究生培养质量的一项重要的基础性工作。由于各种原因，目前我国研究生教材的建设滞后于研究生教育的发展。为了改变这种情况，中国科学院组织了一批在科学前沿工作，同时又具有相当教学经验的科学家撰写研究生教材，并以专项资金资助优秀的研究生教材的出版。希望通过数年努力，出版一套面向 21 世纪科技发展，体现中国科学院特色的高水平的研究生教学丛书。本丛书内容力求具有科学性、系统性和基础性，同时也兼顾前沿性，使阅读者不仅能获得相关学科的比较系统的科学基础知识，也能被引导进入当代科学研究的前沿。这套研究生教学丛书，不仅适合于在校研究生学习使用，也可以作为高校教师和专业研究人员工作和学习的参考书。

“桃李不言，下自成蹊。”我相信，通过中国科学院一批科学家的辛勤耕耘，《中国科学院研究生教学丛书》将成为我国研究生教育园地的一丛鲜花，也将似润物春雨，滋养莘莘学子的心田，把他们引向科学的殿堂，不仅为科学院，也为全国研究生教育的发展作出重要贡献。



前　　言

我们周围的世界处在对称和不对称的矛盾统一之中. 对客观世界对称性的研究，能帮助人们更深刻地认识各种物质的运动规律，欣赏客观世界的自然美. 群论是研究系统对称性的十分有效的数学工具. 在群论方法创立之初，伽罗华 (Galois) 就根据代数方程根的置换对称性，证明了五次和五次以上代数方程不能通过有限次加减乘除和开方运算求得方程根的精确解，第一次显示了群论方法在研究系统对称性中的巨大潜力.

1890 年费德罗夫 (Federov) 和 1891 年熊夫利 (Schoenflies) 相继用群论方法系统地解决了晶体分类问题，证明了具有周期性排列的规则空间点系总共有 230 种. 19 世纪末，群论方法与微分方程的研究结合起来，把有限群的概念扩充到无限群，建立了连续群的理论. 20 世纪群论和拓扑学相结合，形成拓扑群理论，成为近代代数的重要分支之一.

随着人类对客观世界的认识逐步深入到微观领域，物质运动规律呈现出新的特征，实验和理论研究变得更加困难. 量子理论建立以后，对称性的内容更丰富了，更加迫切地需要深入研究微观系统的对称性质. 用群论方法研究量子系统的对称性，可以得到系统的各种定量或定性的重要性质. 这些性质直接来自系统的对称性，与系统的具体细节无关. 反之，对这些性质的实验检验，可以鉴别系统是否具有此种对称性. 特别是对所知甚少的微观系统，通过猜测系统的可能对称性，可以帮助探索系统的基本运动规律. 因此，在对微观世界的深入探索中，近代物理理论和群论理论共同得到了迅速的发展. 近年来，群论方法已经深入到物理学的各个领域，物理工作者迫切需要掌握系统的群论方法，群论课已成为物理专业研究生的必修课.

群论本身是一种抽象的代数理论. 作为一种数学理论, 群论有它自身的特点和规律性. 在刚进入这一领域时, 不可避免地要接触许多新的概念和新的研究方法. 群论理论本身的逻辑性非常强, 开始时部分读者可能会感到有些抽象. 作者从 1962 年开始长期担任物理系本科生或研究生的群论教学工作, 近十年来一直在中国科技大学研究生院 (京区) 为物理学部研究生讲授群论课, 对初学读者的困难比较了解. 另一方面, 作者的专业是理论物理, 在科研工作中, 从物理学不同角度应用群论方法来研究和处理问题, 因此对物理专业科研工作中运用群论方法有切身的体会. 再通过几本群论讲义和教科书的编写, 逐渐形成了比较适合物理专业学生学习群论的教学体系, 而且尽可能把科研中的最新发展和成果, 以适合教学规律的方式, 反映在群论课的教学工作和本教材的编写中.

我们把本教材定位为物理专业研究生的群论教材. 群论既是一门抽象数学, 又是在物理学各个领域都有广泛应用的实用学科. 把抽象的理论体系和广泛的实际应用有机地结合起来, 始终是本教材编写的努力方向.

作为物理专业的教材, 不能过多地使用高深的数学概念和工具, 不能片面追求数学理论的严格性, 应该从读者的实际情况出发, 重视群论方法在实际问题中的应用. 学习群论最重要的基础知识是线性代数和量子力学. 考虑到读者的背景不同, 对线性代数和量子力学的了解差距很大, 而基础的不足常会影响读者顺利学习群论方法, 因而本教材专门在第一章概括地复习了学习群论所必须的线性代数知识, 强调容易混淆的概念和公式, 使教材自成体系. 在量子力学知识方面, 本教材在用到时也尽量作简明的介绍. 在李群和李代数部分, 我们努力避免引入抽象的拓扑概念, 但又尽力用物理工作者便于接受的语言, 深入浅出地讲清楚这些抽象的数学概念.

另一方面, 本教材又十分注意避免另一种倾向, 不过多地深入具体的物理领域, 以防冲淡对群论理论和方法本身的系统讲述. 现

在培养的学生是 21 世纪科研和教学的栋梁，教材必须考虑将来的需要. 那种只让学生知其然，而不知其所以然的教材是不可取的. 本教材尽可能用深入浅出的方法证明书中出现的大部分定理，但又反复引导读者把注意力放在理解定理在理论中的地位和定理的应用上，放在真正掌握基本理论，基本知识和基本技能上. 作者努力使本教材既适合讲课需要，又能适合自学.

本书第一章是线性代数复习. 重点放在统一符号和公式，强调某些容易引起混淆的概念，使每位读者都能掌握学习群论理论所必不可少的线性代数知识. 第二章群的基本概念和第三章群的线性表示理论是群论理论的基础. 希望读者熟悉这些基本概念和理解群论在物理学中应用的基本方法 (第二章前四节和第三章前六节). 对具体例子，例如正多面体对称群的讨论，则可以根据读者的需要进行选择. 第四章至第八章是对物理学中常见的对称群进行具体研究，从而了解群论的基本研究方法. 第四章讲解物理学中最常见的各向同性体系的对称变换群，并以这最简单的非阿贝尔李群作为例子，对李群的基本概念作简单的介绍. 这是非理论物理专业读者应该掌握的关于李群的最基本概念. 本章涉及的某些繁琐的计算，例如克莱布施 - 戈登系数和拉卡系数的计算，是供查阅用的. 第五章讲解晶体对称性，重点放在前两节和第三节部分内容，其余内容读者可根据专业需要进行选择. 第六章研究全同粒子体系的置换对称性，它在物理学和数学中都十分重要. 本章重点是杨算符方法及其应用. 第七章和第八章介绍物理学中比较重要的两类李群，使读者对一般李群有较具体的概念. 这里介绍的用杨算符分解张量表示的方法，在物理学中有广泛的应用. 洛伦兹群在物理学中是很重要的. 但由于读者所学专业不同，这两章的内容可作较大的取舍. 第九章介绍李群和李代数的分类，主要适合理论物理专业读者的需要，对其他读者来说，了解一些基本概念，例如基林型，嘉当 - 外尔基等，可能会对今后的科研工作有所帮助. 第十章介绍无穷维代数，仅供有关专业读者参考.

针对不同读者的不同需要，本书包括了部分比较专门的内容，

例如正二十面体对称群的乘法表和正则表示的约化，转动群的克莱布施 - 戈登系数和拉卡系数的具体计算，空间群及其表示，旋子群理论，味道 SU(3) 对称性及其在粒子物理理论中的应用，SU(N) 群和其它各种单纯李代数的不可约表示具体形式与克莱布施 - 戈登系数的计算方法，洛伦兹群及其表示，和第十章李代数理论的新发展等. 对这些专门知识，读者可以根据自己的需要自由选择.

群论理论虽然比较抽象，但它的应用十分广泛和具体，值得化力气来掌握这套有效的工具. 在这方面，诺贝尔 (Nobel) 奖获得者，物理学家萨拉姆 (Salam) 教授在 1963 年关于李群理论的报告中所谈的他自己的体会值得借鉴. 1951 年他在普林斯顿荣幸地听取拉卡 (Racah) 教授关于李群的讲演，当时他觉得这理论太难了，他学不会，他觉得人们不太会需要所有这些复杂的内容. 但是他完全错了. 11 年后轮到他来讲演这一专题，他真诚地希望听众不要重复他的错误，再推迟学习这一优美的理论.

作者衷心感谢胡宁教授和段一士教授在作者成长过程中所给予的关怀和指导，感谢陈金全教授的热情讨论，感谢戴安英副教授认真校阅了本书的初稿，并提出宝贵的意见.

马中骐

1997 年于北京

目　录

第一章 线性代数复习

群论的主要数学工具是线性代数. 要学好群论, 必须非常熟悉线性代数中的基本概念和运算方法. 虽然我们假定读者已学习过线性代数, 但根据作者的教学经验, 由于读者在过去的学习中所用符号不同, 练习不够, 甚至接受了某些糊涂概念, 有时会给群论学习造成一些不必要的困难. 因此, 在本书之初, 我们先紧密结合物理学, 复习线性代数中的一些基本概念和运算方法, 统一符号, 强调某些容易混淆的概念. 我们愿意提醒读者, 理解这些概念和运算方法, 并不等于能熟练使用它们, 而能熟练使用本章复习的线性代数方法, 必将对以后的群论学习产生很大的帮助.

§1-1 线性空间和矢量基

设系统的哈密顿量为 $H(x)$, 它的本征值 E 称为能级或能量. 若 E 是 m 度简并的, 则能找到 m 个线性无关的本征函数 $\psi_\mu(x)$, 满足:

$$H(x)\psi_\mu(x) = E\psi_\mu(x) , \quad \mu = 1,\ 2,\ \cdots,\ m, \tag{1.1}$$

其中 x 代表系统所有自由度的坐标. $\psi_\mu(x)$ 的任何线性组合

$$\phi(x) = \sum_{\mu=1}^{m} \psi_\mu(x)a_\mu , \tag{1.2}$$

仍是 $H(x)$ 的同一本征值的本征函数, 反之, $H(x)$ 的本征值为 E 的本征函数都能表成 $\psi_\mu(x)$ 的线性组合形式 (1.2). $\phi(x)$ 的集合

构成 m 维函数空间，或称线性空间， $\phi(x)$ 称为该空间的矢量. $\psi_\mu(x)$ 称为该空间的函数基，或称矢量基. (1.2) 式中的 a_μ 称为矢量 $\phi(x)$ 在矢量基 $\psi_\mu(x)$ 中的分量.

在线性空间中，两矢量相加 (减)，它们的对应分量相加 (减)；矢量和数相乘，所有分量都乘此数. 矢量为零必须所有分量都为零. 矢量加法满足线性关系：

$$c\left(\sum_{\mu=1}^{m} \psi_\mu(x)a_\mu + \sum_{\mu=1}^{m} \psi_\mu(x)b_\mu\right) = \sum_{\mu=1}^{m} \psi_\mu(x)\left(c\,a_\mu + c\,b_\mu\right) . \tag{1.3}$$

把这些概念抽象出来，就形成线性空间和矢量的概念. 对于给定的 m 个客体 $\mathbf{e}_\mu$，定义它们的加法和与数的乘法，满足如下线性运算关系：

$$\begin{aligned} &\mathbf{e}_\mu a_\mu + \mathbf{e}_\nu a_\nu = \mathbf{e}_\nu a_\nu + \mathbf{e}_\mu a_\mu \ , \\ &c\left(\sum_\mu \mathbf{e}_\mu a_\mu + \sum_\mu \mathbf{e}_\mu b_\mu\right) = \sum_\mu \mathbf{e}_\mu\left(ca_\mu + cb_\mu\right) \ , \end{aligned} \tag{1.4}$$

其中 c, a_μ, a_ν 和 b_μ 都是常数. 要求在此线性运算中，这 m 个客体 $\mathbf{e}_\mu$ 是线性无关的，即不存在 m 个不同时为零的数 c_μ 使下式成立：

$$\sum_{\mu=1}^{m} \mathbf{e}_\mu c_\mu = 0 . \tag{1.5}$$

这样的 m 个客体 $\mathbf{e}_\mu$ 称为矢量基，矢量基的复线性组合 $\mathbf{a}$ 称为矢量，

$$\mathbf{a} = \sum_{\mu=1}^{m} \mathbf{e}_\mu a_\mu . \tag{1.6}$$

a_μ 称为矢量 $\mathbf{a}$ 的第 μ 个分量. 所有这样的矢量的集合称为 m 维线性空间，记作 $\mathcal{L}$. 在线性空间中，两矢量相等必须 m 个分量全部对应相等；两矢量相加 (减)，所有对应分量相加 (减)；数与矢量相乘，该数与矢量的每个分量分别相乘；所有分量为零的矢量称

为零矢量. 在数学上, 线性空间和矢量的概念, 是与作为矢量基的客体的具体物理内容无关的.

从 (1.6) 式可知, 在给定的线性空间和给定的矢量基中, 矢量 $\mathbf{a}$ 与一组有序数 $(a_1, a_2, \cdots, a_m)$ 存在一一对应的关系, 这组有序数有 m 个分量, 它们作为一个整体完全描写了这个矢量. 通常把这组有序数排成 m 行一列的列矩阵形式:

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} . \tag{1.7}$$

矢量基给定后, 列矩阵与矢量有一一对应的关系, 它是矢量的一种描写方式. 矢量基也是一个矢量, 它只有一个分量不为零:

$$(\mathbf{e}_\mu)_\nu = \delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & 当 \ \mu = \nu \\ 0 & 当 \ \mu \neq \nu . \end{cases} \tag{1.8}$$

其中 $\delta_{\mu\nu}$ 称为克罗内克 (Kronecker)δ 函数.

如果存在 n 个不全为零的常数 c_i, 使 n 个矢量 $\mathbf{a}^{(1)}$, $\mathbf{a}^{(2)}$, $\cdots$, $\mathbf{a}^{(n)}$, 满足线性关系

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}^{(i)} c_i = 0 , \tag{1.9}$$

则称此 n 个矢量线性相关. 反之, 如果不存在这样 n 个不同时为零的常数 c_i 使 (1.9) 式成立, 则称此 n 个矢量线性无关. 注意, (1.9) 式是一个矢量等式, 它包含 m 个分量等式. m 维线性空间中, 线性无关的矢量数目不能大于 m. 矢量基是线性无关的, 任何 m 个线性无关的矢量都可以作为一组矢量基.

在 $\mathcal{L}$ 中, n 个线性无关矢量的所有线性组合, 构成一个 n 维线性空间, 称为线性空间 $\mathcal{L}$ 的子空间 $\mathcal{L}_1$, 也称由 n 个矢量生成的 n 维子空间. 只包含零矢量的子空间称为零空间. 零空间和全空