高职高专规划教材

基础课教材系列

电子信息数学基础

陈晓江 主编

科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书是高职高专院校电子信息类专业数学基础课教材.包括集合与函数、微分学、积分学、常微分方程、无穷级数与拉普拉斯变换、矩阵及其应用、计算机数学初步、数学实验与数学建模等内容,每章后有习题.

本书满足电子信息类高职各专业的学习需要,精选了专业必需的数学知识和技术所需的数学方法,不恪守学科性、强化应用性,同时兼顾到二年制高职的需要.

图书在版编目(CIP)数据

电子信息数学基础/陈晓江主编.—北京:科学出版社,2005

(高职高专规划教材·基础课教材系列)

ISBN 7-03-015793-1

Ⅰ.电… Ⅱ.陈… Ⅲ.电子技术-数学-高等学校:技术学校-教材 Ⅳ.O1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 069291 号

责任编辑:刘 韩,苏 鹏,姚庆爽/责任校对:张 琪
责任印制:安春生/封面设计:陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
源海印刷有限责任公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005年8月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2005年8月第一次印刷 印张:13 1/2
印数:1—4 000 字数:255 000

定价:18.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈路通〉)

前　言

本书使用对象为二、三年制高职高专电子信息类专业学生.

为了适应高职教育逐步由规模的迅速扩展，转向结构调整和提高质量上来的形势发展需要，作为国家教育科学十五国家级课题IT领域高职课程结构改革与教材改革的研究与实验研究成果系列丛书之一，考虑到高职的培养目标是培养高技能人才、银领人才，高职数学课要充分体现为专业技能培养服务的指导思想.根据三年制高职数学的课时少、生源数学基础较薄弱的特点，同时又必须明确地支撑电子信息类高职各专业的学习需要，精选了专业所必需的数学知识和技术所需的数学方法，以“必需、够用”为度组织教材内容，叙述按照“问题提出→概念产生→数学知识和结论→基本运算→数学应用”组织体系，例题和习题的选择少而精，适当引入以Mathematica、Matlab软件为平台的数学实验和数学建模内容，不恪守学科性，强化应用性，同时兼顾到二年制高职需要，特编写本书.

全书共8章，分别为第1章：集合与函数(10学时)；第2章：微分学(18学时)；第3章：积分学(12学时)；第4章：常微分方程(10学时)；第5章：无穷级数与拉普拉斯变换(18学时)；第6章：矩阵及其应用(16学时)；第7章：计算机数学初步(14学时)；第8章：数学实验和数学建模简介(8学时).每章后都编写了配套习题，除第7、8两章外，分为填空题、选择题、计算与应用题三类题型，书末还附有习题参考答案.书中打“*”的内容和习题可作为选学选做内容.

本书由九江职业技术学院陈晓江副教授任主编，并拟定编写大纲，江西财经职业学院卢赛光副教授、九江职业技术学院孙永健讲师、刘业讲师、夏正喜助教任副主编.具体分工为：第1、2章由卢赛光编写，第3章由陈晓江编写，第4、5章由刘业编写，第6、7章由孙永健编写，第8章由夏正喜编写.本书主审人为江西财经职业学院何先应教授，他细致地审订了全部书稿，提出了许多宝贵的指导性意见，全书由陈晓江修改定稿.

限于水平，不妥或谬误之处在所难免，敬请广大读者和同仁批评指正.

目　　录

第 1 章

集合与函数

【学习目标】

集合与函数部分是高职电子信息类数学的基础知识，尽管有些内容读者以前可能学习过，但系统地掌握和巩固这些概念和基本运算，培养和提高必要的分析问题能力，可以为后续知识的学习奠定一个扎实的基础.

【基本要求】

要求通过学习，了解集合及其有关概念，掌握集合之间的运算；正确理解函数的有关概念和性质，熟悉基本初等函数的图像和特性，熟练掌握函数定义域的求法、反函数的建立和复合函数的分解；能根据实际问题建立一些比较简单的函数关系.

1.1 集合与数集

集合概念及其基本理论，是近代数学最基本的内容之一. 许多重要的数学分支，如数理逻辑、概率统计等，都建立在集合理论的基础上. 此外，集合思想还广泛渗透到包括电子信息在内的许多领域，因此有必要对中学学过的集合知识作简要的回顾.

1.1.1 集合及其有关概念

1. 集合的概念

所谓集合，就是指具有某种共同属性或特征的对象的全体. 如下面几个例子：

例 1 大于 2 小于 13 的所有偶数.

例 2 某大学 5 月 1 日出生的全体同学.

例 3 单位圆 $x^2+y^2=1$ 上所有的点.

例 4 所有的等腰梯形.

这些都是集合.

习惯上，集合常用大写字母 A、B、C 等表示；构成集合的每一个对象称为该集合的元素，常用小写字母 a、b、c、x 等表示.

设 A 是一个集合，若 a 是 A 的元素，则说 a 属于 A，记作 $a\in A$；若 a 不是 A 的元素，则说 a 不属于 A，记作 $a\overline{\in} A$ 或 $a\notin A$.

注意：集合的元素具有确定性、互异性、无序性三个特征.

确定性是指构成集合的元素具有明确的特征，而某一元素在集合 A 中或不在集合 A 中二者必居其一，能够明确地区分，不能模棱两可.

互异性是指集合中不同的字母表示不同的元素，而同一元素在集合中不能重复.

无序性是指集合的构成与元素的顺序无关，构成集合的元素相同而仅排列的顺序不同应认为是同一个集合.

2. 集合的表示法

(1) 列举法：将集合的所有元素按任意顺序列出，然后用"{ }"括起来，要求元素不能重复，不能遗漏.

例如，例 1 所指的集合，若用 A 表示，则 $A=\{4,6,8,10,12\}$.

例 5 设 B 表示方程 $x^2+x-2=0$ 的根，则 B 可用列举法表示为 $B=\{-2,1\}$.

(2) 描述法：设 A 是一个集合，a 是 A 中的任一元素，$P(a)$ 是 a 所具有的属性，则记 $A=\{a|P(a)\}$. 这里，a 也可用其他字母来代替.

例如，例 5 中的 B 也可用描述法表示为 $B=\{x|x^2+x-2=0\}$.

例 6 设 C 表示由大于或等于 -3 而小于 6 的全体实数构成的集合，则

$$C=\{x \mid -3\leqslant x<6\}$$

3. 集合的类型

(1) 有限集：集合中所包含的元素个数只有有限个，称为有限集.

例如，例 1、例 2、例 5 中所指的集合就是有限集.

(2) 无限集：集合中所包含的元素个数是无限个，称为无限集.

例如，例 3、例 4、例 6 中所指的集合都是无限集.

不含任何元素的集合称为空集，记为 $\varnothing$.

例 7 设 $A=\{x|x+1=x-1\}$，则 $A=\varnothing$.

4. 集合的相等

定义 1.1 若集合 A 与集合 B 是由完全相同的元素组成的，则称集合 A 与集合 B 相等，记为 $A=B$.

例 8 设 $A=\{x|2^x=1\}$，$B=\{0\}$，则 $A=B$.

注意不能将集合 $\{0\}$ 与空集 $\varnothing$ 相混淆，因为前者是含有单个元素"0"的集合，而后者是不含任何元素的集合.

5. 集合间的包含关系

定义 1.2 若集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，则称集合 A 为集合 B 的子集，记为 $A\subseteq B$（读作 A 包含于 B），或 $B\supseteq A$（读作 B 包含 A）.

例 9 设 $A=\{x|0\leqslant x<20\}$，$B=\{x|0\leqslant x<10\}$，$C=\{x|x\leqslant 10\}$，显然 B 是 A 的子集，也是 C 的子集，即 $B\subseteq A$，且 $B\subseteq C$. 但 A 不是 C 的子集，C 也不是 A 的子集.

关于子集有以下结论：

(1) $A\subseteq A$,即"任何集合都是其自身的子集";

(2) 对于任何集合 A,都有 $\varnothing\subseteq A$,即"空集是任何集合的子集";

(3) 如果 $A\subseteq B$,$B\subseteq C$,则 $A\subseteq C$,即"集合的包含关系具有传递性";

(4) 如果 $A\subseteq B$,$B\subseteq A$,则 $A=B$,即"两个集合相互包含,则它们必相等".

1.1.2 集合的运算

1. 并集

定义 1.3 由集合 A 与集合 B 中的所有元素汇总构成的集合,称为 A 与 B 的并集,记为 $A\cup B$.

例 10 设 $A=\{1,2,3,4,5\}$,$B=\{2,4,6,8,10\}$,则 $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,8,10\}$.

例 11 设 $A=\{x|0\leqslant x<3\}$,$B=\{x|-1<x\leqslant 2\}$,则 $A\cup B=\{x|-1<x<3\}$.

2. 交集

定义 1.4 由集合 A 与集合 B 中的公共元素所构成的集合,称为 A 与 B 的交集,记为 $A\cap B$.

如例 10 中 $A\cap B=\{2,4\}$,例 11 中 $A\cap B=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$.

3. 差集

定义 1.5 由属于集合 A 但不属于集合 B 的元素所构成的集合,称为 A 与 B 的差集,记为 $A-B$.

如例 10 中 $A-B=\{1,3,5\}$,例 11 中 $A-B=\{x|2<x<3\}$. 读者不妨思考一下,例 10、例 11 中,$B-A=$?.

集合以及集合间的关系可以用图形直观地表示,称为文氏图(也叫韦恩图)表示. 文氏图是用一个简单的平面区域(通常用圆形区域)代表一个集合,集合中的元素以区域内的点表示. 图 1.1 给出了集合相等、包含、并、交、差关系的文氏图.

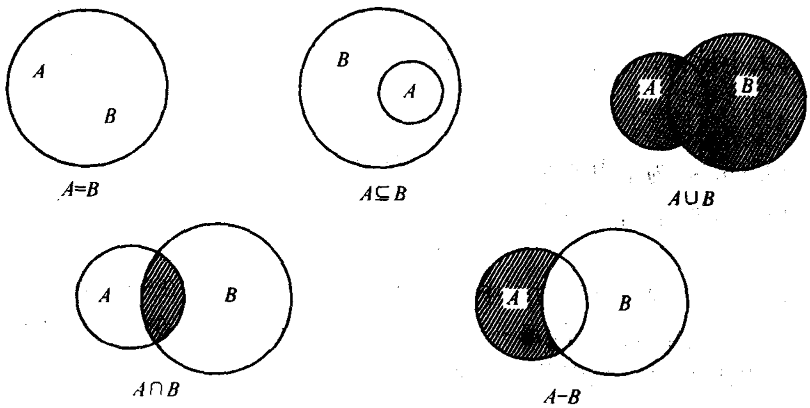


图 1.1

1.1.3 数集

由数组成的集合叫作数集. 常用的数集及符号如表 1.1 所示.

表 1.1 常用数集表

数 集	自然数集	整数集	有理数集	实数集	复数集
记 号	**N**	**Z**	**Q**	**R**	**C**

此外, 正整数集可用 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$ 表示.

在研究实数范围内的集合时常用到区间的概念.

设 a、b 是两个实数, 且 $a<b$. 我们把满足 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数 x 的集合叫作闭区间, 将其表示为 $[a,b]$; 把满足 $a<x<b$ 的实数 x 的集合叫作开区间, 将其表示为 (a,b); 把满足 $a\leqslant x<b$、$a<x\leqslant b$ 的实数 x 的集合, 都叫作半开半闭区间, 分别表示为 $[a,b)$、$(a,b]$. 这里的实数 a 和 b 都叫作相应区间的端点.

实数集 **R** 也可以用区间表示为 $(-\infty,+\infty)$, 同时, 我们把满足 $x\geqslant a$、$x>a$、$x\leqslant b$、$x<b$ 的实数 x 的集合分别表示为 $[a,+\infty)$、$(a,+\infty)$、$(-\infty,b]$、$(-\infty,b)$.

所以, 各种区间都是由实数构成的集合, 它们都是表示实数集合的另一种形式.

区间可分为四种类型, 其中 $[a,b]$、(a,b)、$(a,b]$、$[a,b)$ 称为有限区间, $b-a$ 称为这些区间的长度, 而 $[a,+\infty)$、$(a,+\infty)$、$(-\infty,b]$、$(-\infty,b)$ 称为无限区间.

1.2 函数概念和性质

1.2.1 函数的定义

在研究某一自然现象或实际问题的过程中, 总会发现问题中的各个量并不是独立变化的, 它们之间往往存在着依存关系. 下面考察几个具体的例子.

例 12 一个自由落体, 从开始下落时算起经过的时间设为 t, 在这段时间内落体的位移大小设为 s. 如果不计空气阻力, 那么 s 与 t 有如下的依存关系

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

其中 $g=9.8\text{m/s}^2$ 为重力加速度, 是一个常数.

例 13 由平面几何知, 半径为 r 的圆的面积 S 有如下计算公式

$$S=\pi r^2$$

定义 1.6 在某一变化过程中有两个变量 x、y, 如果存在一个对应规律 f, 对于变量 x 在其变化范围内的每一个值, 根据这一对应规律, 变量 y 都有确定的值与之对应, 则称变量 y 是变量 x 的函数, 记为

$$y=f(x)$$

这时, 称 x 为自变量, y 为因变量, 自变量 x 的变化范围称为函数的定义域, 记为

$D(f)$，它是使 $y=f(x)$ 有意义的自变量 x 的取值的全体.

所谓对应规律 f，它代表的只是 x 与 y 之间的一种关系，它也可以用其他符号代替，如 φ、g、F 等. 如果我们需要同时考察 x 的几个函数，为避免混淆，就要用不同的记号来分别表示对应规律.

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $D(f)$，对于 $x_0\in D(f)$，称函数 y 的对应值为函数在 x_0 处的函数值，记为 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$.

全体函数值所构成的集合叫作 $y=f(x)$ 的值域，记为 $Z(f)$.

例 14 已知 $y=f(x)=x^3+1$，求 $f(2)$，$f(a-1)$，$[f(x)]^2$，$f\left(\frac{1}{x}\right)$.

解 $f(2)=2^3+1=9$

$$f(a-1)=(a-1)^3+1=a^3-3a^2+3a$$

$$[f(x)]^2=(x^3+1)^2=x^6+2x^3+1$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^3+1=\frac{1}{x^3}+1$$

求函数定义域时，要注意两点：①在实际问题中，函数的定义域要由实际问题的意义确定. 例如，前面提到的圆的面积 S 与半径 r 之间的函数关系 $S=\pi r^2$，由于圆的半径不能为零和负数，所以 $D(f)=(0,+\infty)$. ②如果不考虑函数的实际意义，只研究用算式表达的函数，这时我们规定：函数的定义域是使函数表达式有意义时自变量所取的实数值的全体.

例 15 求函数 $y=\lg(1-x)+\sqrt{x+4}$ 的定义域.

解 因为负数和零没有对数，所以 $1-x>0$，即 $x<1$；又 $x+4\geqslant 0$，即 $x\geqslant -4$. 故函数的定义域为 $-4\leqslant x<1$，用区间表示为 $[-4,1)$.

例 16 求函数 $y=\arcsin\frac{1}{x}$ 的定义域.

解 除 x 不能为零外，且须 $\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$，即 $|x|\geqslant 1$，这个不等式已经把 $x=0$ 除外，所以函数的定义域是 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

1.2.2 函数的基本性质

1. 函数的奇偶性

定义 1.7 设函数 $y=f(x)$ 的定义区间关于原点对称，对任意 $x\in D(f)$，

(1) 若 $f(-x)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为偶函数；

(2) 若 $f(-x)=-f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为奇函数.

例 17 判断下列各函数的奇偶性：

(1) $y=x(x+\sin x)$　　(2) $y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{a^x-a^{-x}}$　　(3) $y=x^3+2\cos x$

解　(1) 因为

$$f(-x)=(-x)[(-x)+\sin(-x)]=-x(-x-\sin x)=x(x+\sin x)=f(x)$$

所以 $y=x(x+\sin x)$是偶函数.

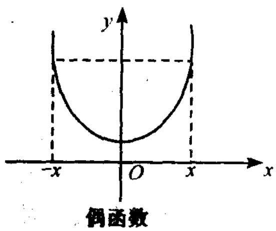
(2) 因为

$$f(-x)=\frac{a^{-x}+a^{-(-x)}}{a^{-x}-a^{-(-x)}}=\frac{a^{-x}+a^{x}}{a^{-x}-a^{x}}=-\frac{a^{x}+a^{-x}}{a^{x}-a^{-x}}=-f(x)$$

所以 $y=\dfrac{a^{x}+a^{-x}}{a^{x}-a^{-x}}$是奇函数.

(3) 因为 $f(-x)=(-x)^3+2\cos(-x)=-x^3+2\cos x\neq f(x)$，也不等于 $-f(x)$，所以 $y=x^3+2\cos x$ 为非奇非偶函数.

显然，偶函数的图形关于 y 轴对称，而奇函数的图形关于原点对称，如图 1.2 所示.



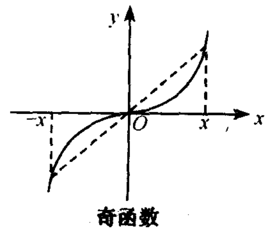


图 1.2

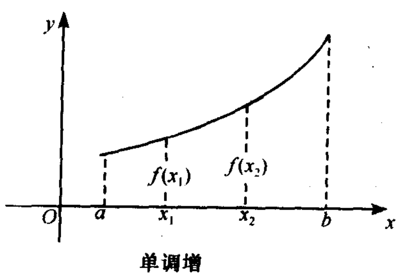
2. 函数的单调性

定义 1.8　设函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内有定义，对于任意 $x_1<x_2\in(a,b)$，

(1) 若 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $y=f(x)$在区间(a,b)内为单调增(或递增)函数，这时，(a,b)为 $y=f(x)$的单调增加区间；

(2) 若 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $y=f(x)$在区间(a,b)内为单调减(或递减)函数，这时，(a,b)为 $y=f(x)$的单调减少区间.

从几何图形上看，单调增函数的图形，表现为从左至右向上升的曲线，单调减函数的图形，表现为从左至右向下降的曲线，见图 1.3.



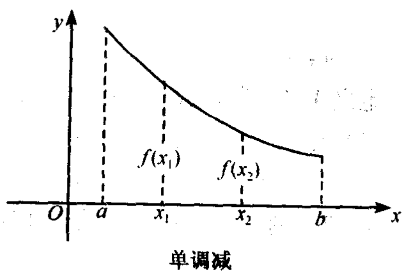


图 1.3

单调增函数和单调减函数统称为单调函数；使函数为单调函数的自变量的变化区间称为单调区间.

如函数 $y=x^3$ 在其定义域$(-\infty,+\infty)$内都是单调增加的；函数 $y=x^2$ 在$(-\infty,0)$内是单调减少的，而在$(0,+\infty)$内是单调增加的.

3. 函数的周期性

定义 1.9　设 T 为一个不为零的常数，如果函数 $y=f(x)$对于任意 $x\in D(f)$，都有 $f(T+x)=f(x)$，则称 $y=f(x)$是周期函数. 使上述关系式成立的最小正数 T，称为函数 $y=f(x)$的周期，或者说函数 $y=f(x)$是以 T 为周期的周期函数.

如函数 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；函数 $y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

周期函数的特点：周期函数的图形可由该函数在定义域内长度为 T 的区间上的图形平移而得到.

4. 函数的有界性

定义 1.10　设函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内有定义，如果存在一个正数 M，使得对于任意 $x\in(a,b)$，不等式$|f(x)|\leqslant M$ 或$-M\leqslant f(x)\leqslant M$ 恒成立，则称 $y=f(x)$是有界函数，即 $y=f(x)$在区间(a,b)内有界；如果这样的正数 M 不存在，则称 $y=f(x)$是无界函数，即 $y=f(x)$在区间(a,b)内无界.

注意：上述定义也适合于闭区间、半开区间和无限区间.

有界函数的特点：有界函数的图形介于直线 $y=M$ 和 $y=-M$ 之间.

例如，函数 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是有界的，因为对于任意实数 x，不等式$|\sin x|\leqslant 1$ 总成立，这里 $M=1$.

又如，函数 $y=\dfrac{1}{x}$在区间$(0,2)$内是无界的，因为不存在这样的正数 M，使得$\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$ 对于区间$(0,2)$内的一切 x 值都成立. 但是函数 $y=\dfrac{1}{x}$在区间$[1,3]$内是有界的，因为可取 $M=1$，对于区间$[1,3]$内的一切 x 值，不等式$\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$ 都成立.

1.2.3　反函数

定义 1.11　设有函数 $y=f(x)$，其定义域为 $D(f)$，值域为 $Z(f)$. 如果对于任意 $y\in Z(f)$，都可以从关系式 $y=f(x)$中确定唯一的值 $x\in D(f)$与之对应，那么所确定的以 y 为自变量的函数 $x=\varphi(y)$或 $x=f^{-1}(y)$称为函数 $y=f(x)$的反函数. 反函数的定义域为 $Z(f)$，值域为 $D(f)$.

习惯上，函数的自变量都以 x 表示，所以反函数也可以表示为 $y=f^{-1}(x)$.

注意：这里的 f^{-1}是一个完整的记号，不能误解为$\dfrac{1}{f}$.

函数 $y=f(x)$ 的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

例 18　求函数 $y=\frac{1}{2}e^x-\frac{3}{2}$ 的反函数，并确定反函数的定义域.

解　由 $y=\frac{1}{2}e^x-\frac{3}{2}$ 得

$$e^x = 2y+3$$

即

$$x = \ln(2y+3)$$

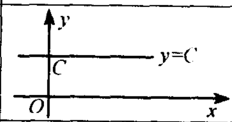
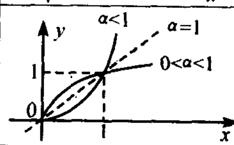
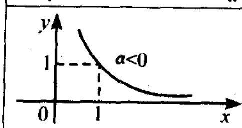
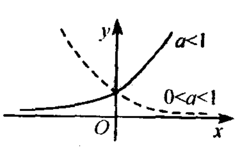
将上式中的 x、y 互换，因此得到函数 $y=\frac{1}{2}e^x-\frac{3}{2}$ 的反函数为 $y=\ln(2x+3)$，反函数的定义域为 $\left(-\frac{3}{2},+\infty\right)$.

1.3　基本初等函数与初等函数

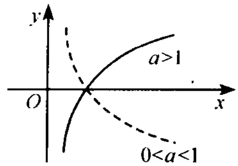
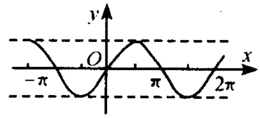
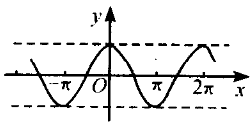
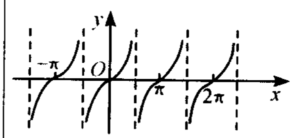
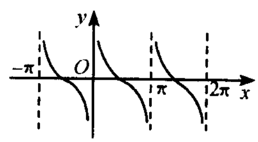
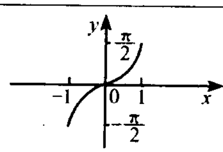
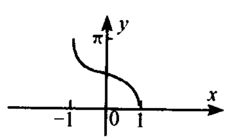
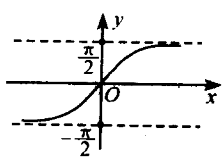
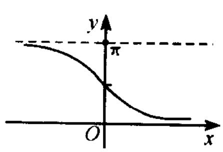
1.3.1　基本初等函数

我们把常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数这六类函数统称为基本初等函数，这些函数在中学数学中已作过详尽的讨论，这里不再重复. 为适应本书的需要，现将它们的表达式、定义域、性质及图像归纳成表 1.2，供查阅使用.

表 1.2　基本初等函数表

函数名称	表达式和定义域	图像特征及其性质	
1. 常数函数	$y=C$（C 为常数） $x\in\mathbf{R}$		平行于 x 轴，y 轴上截距为 C 的直线
2. 幂函数	$y=x^a$ （$a\neq0$，a 为常数） 定义域依 a 的取值而定，但不论 a 为何值，当 $x>0$ 时都有定义		$a>0$ 时，曲线过点 $(0,0)$，$(1,1)$，在 $(0,+\infty)$ 内为单调增加. 这时 $y=x^a$ 的图像称为 a 次抛物线
			$a<0$ 时，曲线过点 $(1,1)$，在 $(0,+\infty)$ 内为单调减少. 以 x 轴、y 轴为渐近线. 这时 $y=x^a$ 的图像称为 a 次双曲线
3. 指数函数	$y=a^x$ （$a>0$，$a\neq1$） $x\in\mathbf{R}$		曲线过点 $(0,1)$，在 x 轴上方 (1) $0<a<1$ 时，$y=a^x$ 为递减函数，沿 x 轴正方向接近 x 轴 (2) $a>1$ 时，$y=a^x$ 为递增函数，沿 x 轴负方向接近 x 轴

续表

函数名称	表达式和定义域		图像特征及其性质
4. 对数函数	$y=\log_a x$ $(a>0,a\neq 1)$ $x\in\mathbf{R}$		曲线过点(1,0),在 y 轴右边 (1) $0<a<1$ 时,$y=\log_a x$ 为递减函数,沿 y 轴正方向接近 y 轴 (2) $a>1$ 时,$y=\log_a x$ 为递增函数,沿 y 轴负方向接近 y 轴
5. 三角函数 (1) 正弦	$y=\sin x$ $x\in\mathbf{R}$		(1) 过原点,奇函数,有界,周期为 2π,值域为$[-1,1]$
(2) 余弦	$y=\cos x$ $x\in\mathbf{R}$		(2) 偶函数,有界,周期为 2π,值域为$[-1,1]$
(3) 正切	$y=\tan x$ $x\in\{x\mid x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$		(3) 奇函数,无界,周期为 π,在每个小定义区间内单调增加,值域为 $\mathbf{R}$
(4) 余切 (5) 正割 (6) 余割	$y=\cot x$ $x\in\{x\mid x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$ $y=\sec x$ $y=\csc x$		(4) 奇函数,无界,周期为 π,在每个小定义区间内单调减少,值域为 $\mathbf{R}$ (5)、(6)的图像和性质略
6. 反三角函数 (1) 反正弦	$y=\arcsin x$ $x\in[-1,1]$		(1) 有界,过原点,递增函数,奇函数,值域为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
(2) 反余弦	$y=\arccos x$ $x\in[-1,1]$		(2) 有界,递减函数,值域为$[0,\pi]$
(3) 反正切	$y=\arctan x$ $x\in\mathbf{R}$		(3) 有界,过原点,递增函数,奇函数,值域为$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$
(4) 反余切	$y=\operatorname{arccot} x$ $x\in\mathbf{R}$		(4) 有界,递减函数,值域为$(0,\pi)$

1.3.2 复合函数

从以上表格所列举的基本初等函数出发，经过加、减、乘、除（分母不为零）的四则运算以及函数的复合，可以派生出大量的较复杂的函数. 那么什么是函数的复合呢？

定义 1.12 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，其定义域为 $D(f)$；而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，其值域为 $Z(\varphi)$；如果 $Z(\varphi)\cap D(f)\neq\varnothing$，则通过 u 把 y 表示成 x 的函数 $y=f[\varphi(x)]$，我们把它称为复合函数，其中 u 称为中间变量.

例如，$y=\lg u$，$u=x-1$ 可复合成函数 $y=\lg(x-1)$. 又如，$y=u^3$，$u=\sin x$ 可复合成函数 $y=\sin^3 x$.

但要注意：不是任何两个函数都能组合成一个函数的. 如 $y=\arcsin u$ 和 $u=2+x^2$ 就不能组合成一个复合函数，因为对于 $u=2+x^2$ 的定义域$(-\infty,+\infty)$中的任何 x 值所对应的 u，都不能使 $|u|\leqslant 1$ 成立，所以 $y=\arcsin(2+x^2)$没有意义.

另一个值得注意的问题是：复合函数的中间变量可以不止一个，也就是函数可以多次复合.

例如，$y=\ln u$，$u=\ln v$，$v=\ln x$ 可以复合成函数

$$y=\ln\ln\ln x$$

这里 u、v 都是中间变量，有些函数的中间变量的个数甚至更多.

例 19 指出下列函数的复合过程：

(1) $y=(1-x)^{20}$ (2) $y=\tan^2 x$

(3) $y=\log_a \sin e^{x+1}$ (4) $y=[\arccos\sqrt{1-x^2}]^3$

解 (1) $y=(1-x)^{20}$是由 $y=u^{20}$，$u=1-x$ 复合而成.

(2) $y=\tan^2 x$ 是由 $y=u^2$，$u=\tan x$ 复合而成.

(3) $y=\log_a \sin e^{x+1}$是由 $y=\log_a u$，$u=\sin v$，$v=e^w$，$w=x+1$ 复合而成.

(4) $y=[\arccos\sqrt{1-x^2}]^3$ 是由 $y=u^3$，$u=\arccos v$，$v=\sqrt{w}$，$w=1-x^2$ 复合而成.

1.3.3 初等函数

定义 1.13 由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合构成，并能用一个解析式表示的函数，称为初等函数.

例如，函数 $y=e^{\frac{x^2}{2}}$，$y=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$，$y=\tan 2x+a^{3x}$，$y=\arcsin(x-2)$等都是初等函数.

由于大多数分段函数不能用一个解析式表示，所以分段函数一般来说不是初等函数. 例如

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x\leqslant 1\\ x-5 & x>1\end{cases}$$

不能用一个解析式表示，所以这个分段函数不是初等函数.

又如，分段函数

$$f(x)=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$$

能化为 $y=f(x)=|x|=\sqrt{x^2}$，而 $y=\sqrt{x^2}$ 是由 $y=\sqrt{u}$，$u=x^2$ 复合而成的，所以这个分段函数是一个初等函数.

1.4　函数模型

运用数学工具去解决实际问题，往往需要先找出问题中变量之间的函数关系，即建立数学模型，然后对它进行研究，这是解决实际问题的重要一步. 至于如何建立函数关系，并无一定的法则可循，只能根据具体问题作具体分析. 值得注意的是，这类问题的函数定义域，除函数的解析式要有意义外还要考虑变量在实际问题中的含义.

下面，我们通过几个实例来介绍如何建立函数关系，为以后运用微积分方法解决实际问题打下一些基础.

例 20　要做一个底为正方形，容积为 $108\mathrm{m}^3$ 的长方形开口容器，试将容器的表面积表示为底面边长的函数.

解　如图 1.4 所示，设容器的底面边长为 x，高为 h，则容器的表面积为

$$S=x^2+4xh$$

由于容器的容积为 $108\mathrm{m}^3$，即 $x^2h=108$，由此得 $h=\frac{108}{x^2}$，所以容器的表面积与底面边长的函数关系为

$$S=x^2+\frac{432}{x}$$

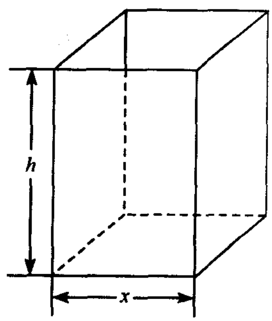


图 1.4

其中 $x\in(0,+\infty)$.

例 21　一条由西向东的河流，经过相距 150km 的 A、B 两城，为了从 A 城运货到 B 城正北 20 公里的某工厂 C，准备在河流北岸建筑码头 M，并修公路 MC（图 1.5）. 已知水运运费是 m 元/tkm，陆运运费是 n 元/tkm，求将货物沿路线 AMC 从 A 城运到 C 工厂每吨所需运费与距离 MB 之

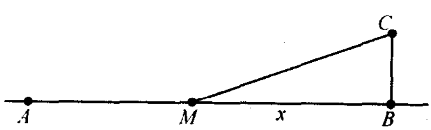


图 1.5

间的函数关系.

解 设 $MB=x$km,沿路线 AMC 运货每吨所需运费为 y 元.

由于 $AM=150-x$(km),$MC=\sqrt{x^2+400}$(km),因此

$$y=m(150-x)+n\sqrt{x^2+400}(\text{元})$$

其定义域为[0,150].

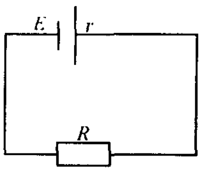


图 1.6

例 22 设由电动势 E、内阻 r 与外阻 R 所构成的闭合电路(图 1.6),当 E 和 r 已知时,试将消耗在外阻 R 上的电功率 P 表示为外阻 R 的函数.

解 由电学可知道,消耗在外阻 R 上的功率为 $P=I^2R$,I 为回路中的电流,又由欧姆定律知电流强度 $I=\frac{E}{R+r}$,所以功率 P 为 R 的函数

$$P=P(R)=\left(\frac{E}{R+r}\right)^2R=\frac{E^2R}{(R+r)^2}$$

其中 $R\in(0,+\infty)$.

例 23 设圆桌的半径为 a,在桌面中心的上方挂一电灯,灯距桌面的高低,直接影响到电灯照射圆桌边缘的亮度(图 1.7).如果电灯对圆桌边缘的照明度为 $I=K\frac{\sin\varphi}{r^2}$,$K$ 为常数,试将照明度 I 表示为灯与桌面的距离 x 的函数.

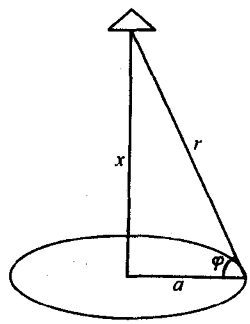


图 1.7

解 由于 $\sin\varphi=\frac{x}{r}$,$r=\sqrt{x^2+a^2}$,所以

$$I=K\frac{\sin\varphi}{r^2}=K\frac{x}{r^3}=\frac{Kx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$$

其中 $x\in(0,+\infty)$.

习 题 1

一、填空题

1. 设集合 $A=\{a,1,2,5\}$,$B=\{2,3,4,b\}$,若 $A\cap B=\{2,3,5\}$,则 $a=$_______,$b=$_______.

2. 设 A 为任意集合,则 $A\cup A=$_______,$A\cap A=$_______,$A\cup\varnothing=$_______,$A\cap\varnothing=$_______,$A-A=$_______,$A-\varnothing=$_______.

3. 若函数 $f(x-1)$的定义域是[0,2],则函数 $f(x+1)$的定义域是_______.

4. 函数 $y=f(x)$与 $y=f(-x)$的图像对称于_______.

5. 函数 $y=e^x$ 与 $y=\ln x$ 的图像对称于_______.