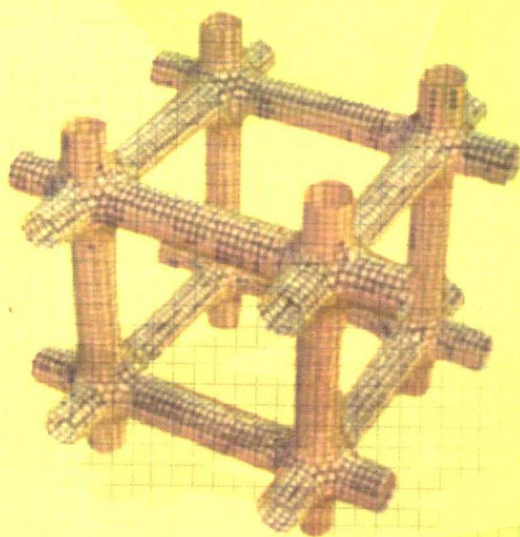


高等院校基础课教材

数 学 实 验 与 数 学 建 模 教 程

李 林 吴国民 主编



中国林业出版社

高等院校基础课教材

数学实验与数学建模教程

主 编 李 林 吴国民

副主编 周永正 李 崑 谭立云

北京高等学校教学内容及教学方法改革项目
《一般工科院校数学系列课程改革的研究与实践》成果

中国林业出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学实验与数学建模教程/李林主编. —北京:中国林业出版社, 2004.3

ISBN 7-5038-3712-8

I. 数… II. 李… III. ①高等数学-实验-高等学校-教材②数学模型-高等学校-教材 IV. 013-33②022

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 008570 号

数学实验与数学建模教程

出版 中国林业出版社 (100009 北京西城区刘海胡同 7 号)

E-mail: cfphz@public.bta.net.cn 电话: 66184477

发行 新华书店北京发行所

印刷 北京地质印刷厂

版次 2004 年 3 月第 1 版

印次 2004 年 3 月第 1 次

开本 787mm×1092mm 1/16

印张 12

字数 280 千字

印数 1~2500 册

定价 23.80 元

前 言

数学实验是计算机技术和数学软件引入数学教学后出现的新事物,是数学教学体系、内容和方法改革中的一项重大举措。开设数学实验课的目的,一是让学生学会独立使用各种先进的计算工具和信息传播技术,来探索解决一些典型数学问题的方法;二是培养学生的创新能力。

随着科学技术的发展,各门学科的定量化分析的加强,使用数学工具来解决各种问题的要求日益普遍,数学建模作为数学实现其技术化职能的主要手段之一,它的作用显得愈发突出,从而受到了更加普遍的重视,同时,世界范围内的数学建模竞赛持续地开展,而且参加的人数直线上升。在这种新形势下,数学建模教育越来越受到重视。开设数学建模课程,举办数学建模培训,参加数学建模竞赛在全国各类高等学校已经成为普遍现象。

本书是教育部教改项目《21 世纪初一般工科院校本科培养模式研究与实践》的子课题和北京高等学校教学内容及教学方法改革立项项目《一般工科院校数学系列课程改革的研究与实践》的成果之一。作为教学改革项目,我们的目的是,普及数学实验、数学建模的思想与方法,使学生四年在校期间成为自觉运用这些思想方法的学习者,成为运用这些思想方法的终生受益者。自我们承担上述项目以来,开始采用本教材在大学一年级开设数学实验和数学建模课程。本教材是实践的产物,是我们在讲义的基础上几经修订而成的。考虑到上述项目的定位,即面向一般院校在一年级开设数学实验课、数学建模课,我们的课程建设和此次成书的指导思想是:

(一) 数学实验

- (1) 掌握一门计算机语言——Mathematica;
- (2) 掌握可以用来作数学的工具——Mathematica;
- (3) 利用 Mathematica 验证数学中的结论;
- (4) 利用 Mathematica 解决综合性问题;
- (5) 通过分析综合问题学到相关的知识,培养分析解决问题的能力;

(二) 数学建模

(1) 对大学低年级进行强化数学建模思想的教育,低起点介绍数学建模的重要思想,数学建模的意义,数学建模的方法。

(2) 由于数学建模的基本方法应该包含建立模型的各种方法,和研究

模型修改模型使之不断完善、更符合实际。

(3) 尽量少涉及高深数学知识, 少一些理论性强的内容, 而使方法介绍和具体计算稍微详细。

本书由两部分组成, 第一部分为数学实验, 由十四个实验组成, 其中实验一至实验五为基础实验, 实验六、实验七为提高实验, 实验八至实验十四为综合实验。第二部分为数学建模, 由三章组成, 第一章数学模型, 第二章建立数学模型, 第三章几类数学模型的建立与研究。全书由李林策划, 由李林、吴国民(北京石油化工学院)主编。参编情况为第一部分实验一至实验四由李林、杨硕(中国防卫科技学院)编写, 实验五、十一由谭立云(华北科技学院)编写, 实验七至实验十由李林编写, 实验十二、十三由李林、李崑(天津城建学院)编写。实验六由曹晓东(北京石油化工学院)编写; 实验十四由董小燕(北京石油化工学院)编写; 第一部分的附录由李林编写。第二部分具体分工是第一章由吴国民编写, 第二章由吴国民、谭立云编写, 第三章的第三节由吴国民、李崑、谭立云编写; 第三章的第一节由吴国民、李林编写; 第三章的第二、四节由周永正(景德镇陶瓷学院)、李林编写, 第三章的第五节由王若鹏(北京石油化工学院)编写。参加讨论和编写的还有景德镇陶瓷学院的张三强, 黄祖庆, 詹棠森和天津城建学院的徐兴艾、刘昊暘等。周永正、李崑、谭立云三位对全书稿内容文字都有过全面的审阅并提出了改进的意见。

在编写的过程中, 数学实验部分吸收了同类教材的优点, 兼顾基础性实验、提高性实验和综合性实验以及数学建模思想的渗透。基础性实验主要用于学习、掌握 Mathematica 软件的各种功能。通过提高性实验学习 Mathematica 软件的使用, 同时也学习一些数学知识。综合性实验来源于实际问题, 这些问题涵盖数学的许多方面。综合性实验既能培养学生的数学建模能力和模型求解能力, 又能增强运用 Mathematica 软件编程的能力。数学建模部分则强调对数学建模的重要思想、数学建模的意义、数学建模的方法的认识。此外, 在第三章对五类问题进行了展开讨论, 用不同的方法或者是用同一方法进行不断深入的研究, 不断修改模型使之不断完善、更符合实际。

本教材基本上只涉及高等数学课程的知识。学完本教材, 同学们可以

运用 Mathematica 软件, 解决以后所遇到的大部分数学理论推导与数值计算。也初步具有一定的数学建模的能力和运用 Mathematica 软件解决实际问题的能力。同时也为将来进一步学习其它数学软件奠定一定的基础。本书按教材编写, 不仅能用于教学, 而且也可适合广大初学者的自学。

在本书的编写过程中, 上述两个教改项目全体成员和单位领导给予了极大的支持与关怀。同时几年来, 广大同学特别是参加全国大学数学建模竞赛的同学, 以及使用本书的教师对本书提出了许多修改意见。我们谨在此向关心本书和对本书提出过宝贵意见的同志们表示衷心的感谢。由于我们水平有限、掌握的材料和条件所限, 错误、不妥之处必然很多, 恳请同行专家批评指正。

作 者

2003 年 12 月

目 录

第一部分 数学实验

实验一 Mathematica 基本知识、表及其有关操作	(3)
实验二 Mathematica 的符号运算功能	(13)
实验三 Mathematica 的作图功能 (一)	(22)
实验四 Mathematica 的作图功能 (二)	(29)
实验五 微积分运算	(39)
实验六 提高实验: 动画制作	(49)
实验七 提高实验: 近似计算	(54)
实验八 综合实验: 曲线的最佳拟合	(61)
实验九 综合实验: 微分方程及其数值解	(68)
实验十 综合实验: 圆周上的围棋子	(74)
实验十一 综合实验: 数学趣题	(79)
实验十二 综合实验: 保险中的数学问题	(85)
实验十三 综合实验: 产生一个分形	(91)
实验十四 综合实验: 摆线的最速下降和等时性	(96)

第二部分 数学建模

第一章 数学模型	(105)
第一节 引言	(105)
第二节 数学模型	(110)
第三节 全国大学生数学建模竞赛	(115)
第二章 建立数学模型	(119)
第一节 建立数学模型示例	(119)
第二节 建立数学模型的方法和步骤	(130)
第三节 数学模型的特点和建模能力的培养	(134)
第四节 数学模型的分类	(137)
第三章 几类数学模型的建立与研究	(139)
第一节 人口增长模型	(139)
第二节 隧道窑热效率的因素分析	(147)

第三节	经济模型系列	(154)
第四节	瓷石样品分类的研究	(165)
第五节	一个优化问题的数学模型	(175)
参考文献		(182)

第一部分 数学实验

数学这门科学，需要观察，也需要实验。

——欧 拉

没有人能给你指明前进之路，只有你自己去探索。

——李正道

劳作与智慧是取得成功的两把钥匙。

——高 斯

原书空白页

实验一 Mathematica 基本知识、表及其有关操作

实验目的：了解 Mathematica 的基本知识，会进行简单的计算；了解表的概念及其简单应用。

实验内容：介绍 Mathematica 系统；系统启动与退出；数的计算；常用的数学函数；表的概念，表的生成；表的结构与有关操作。

预备知识：基本的计算机知识及操作技能；WINDOWS 的使用；数的计算、函数等基本数学知识。

1 Mathematica 简介

Mathematica 系统是美国 Wolfram 公司研究开发的一个功能强大的计算机数学系统。它的主要功能包括：符号演算、数值计算和函数作图，这三种功能融合在一个系统里，使用起来非常方便和灵活。Mathematica 系统可以看作是一个非常高级的计算器，它接受键盘输入的表达式（命令），完成后将计算结果显示在屏幕上。

2 系统的启动与退出

进入 WINDOWS，由 [开始] 进入 [程序]，找到 Mathematica 的执行文件，双击鼠标，稍等片刻，即出现 Mathematica 的运行界面。可以看到它与其它应用软件有一些差别，它主要包括一个执行各种功能的工作条和一个工作区窗口，这两部分是分开的，下面的工作区窗口可以随时关闭，只留下工作条。如果需要，可以随时打开多个工作区窗口，也可以用鼠标拖动任意改变窗口的大小，这些窗口还是相互独立的，可以在这些窗口之间相互切换，进行不同的运算和操作，使用起来非常方便。如果选中了一个工作区，就可通过键盘输入命令，也可打开[file]中的[Palettes]，能看到七类函数的菜单（注意 Mathematica 系统中的函数概念较广），包括各种代数式的运算，如：展开多项式、分解因式、通分、约分等；微积分的运算，如：求极限、求导、求积分等；作图函数，如：二维作图、三维作图、参数作图等；以及各种数学符号等等。用户可以直接在此菜单中寻找所需的命令，然后直接点击即可。可一次输入一个命令，也可一次输入多个命令。如果一行命令太长，可用回车符将命令分行，但要注意：回车符相当于一个空格的作用，应避免在禁止使用空格的地方分行，命令输入完毕，要想运行，可按键盘上的[Enter]+[Shift]键。运行完毕，想要退出，可由主对话框中[file]中的[Exit]退出，也可单击右上角的[×]，即关闭。操作非常简单、快捷。需要说明的是，当第一次输入的命令运行完毕后，系统会自动给第一次输入的命令加上标号 In[1]，输出的结果则标上 Out[1]。表示第一次输入的命令及输出的结果，如果想要再输入一个与第一个命令大同小异的命令，可直接将光标停在第一次输入的命令上，进行修改，然后

运行, 这时修改后命令行会自动标出 In[2], 并输出结果 (标号为 Out[2]), 也可利用工作条的[Edit]中的 Copy, Paste 等编辑功能.

3 数的计算

3.1 基本计算

Mathematica 的最基本的功能之一是进行数的计算, 并且在计算中可以保持和控制精度. 算术运算的优先顺序符合一般数学中的习惯, 先乘方(^), 再乘(*)、除(/), 最后加(+)、减(-). 可用括号改变运算顺序, 负号用减号(-)表示, 乘号(*)可以用空格符号代替, 一般情况下不可省略.

3.2 整数运算

对于整数的运算, Mathematica 系统将永远给出精确的结果.

$(87-235)*24-28 \rightarrow -3580$
 $2^{64}-1 \rightarrow 18446744073709551615$

上式中的符号 “ $\rightarrow$ ” 表示运算结果为符号 $\rightarrow$ 后的数, 以后本书都采用这个符号, 表示运算结果.

3.3 精确数

Mathematica 支持数的精确表示, 系统自动对有理数进行可能的简化, 并设法用分数的形式将有理数表示成两个整数的商, 例如

$562/213 \rightarrow \frac{562}{213}$
 $14/14^5 \rightarrow \frac{1}{38416}$
 $15^{(1/2)} \rightarrow \sqrt{15}$

3.4 %的用法

如果计算上一表达式的输出结果的四次方根, 可以写成

$\%^{(1/4)}$

这里的符号 “%” 表示前面紧挨的一次计算结果. 两个百分号 “%%” 表示倒数第二次的计算结果. 符号 “%” 后面紧跟一个整数表示以这整数为序号的那一次计算的结果. 例如,

$\%4^{(1/4)}$

表示第 4 行的计算结果 (即 out[4]的那一行) 的 4 次方根.

3.5 精度

Mathematica 可以表示精度很高的实数(用多位有效数字表示), 并且在计算中不轻易丢失精度, 例如,

$3.258^3+372 \rightarrow 406.582$

这里没有说明保留几位有效数字, 系统默认是 6 位. 如果算式中有小数, 则输出的结果

为默认的 6 位有效数字，也可以系统函数 $N[...]$ 求出括号中表示数的近似值，或计算的数后加写双斜杠和 N 实现同样的功能，例如，

$N[381/209] \rightarrow 1.82297$ (默认 6 位有效数字)

$381/209 // N \rightarrow 1.82297$ (默认 6 位有效数字)

如果要得到精度更高的数可以把光标放在输出的结果处然后回车，就会出现比原来多出 11 位的有效数字；如果精度依然不够，还可以运用函数 $N[expr, n]$ 计算表达式 $expr$ 得到具有 n (大于 17) 位的有效数字。

3.6 数学常数

Mathematica 系统里用第一个字母大写的英文字母串表示常用的数学常数，这些常数 (见表 1-1) 可以直接参加数学计算。

表 1-1 数学常数的表示

常用符号	含 义
Pi	圆周率 π ，表示一个数可以直接参加运算
E	自然对数的底 e ，表示一个数可以直接参加运算
Degree	角度 1 度， $\pi/180$ ， 15° 可以写为 15 Degree
I	虚数单位，如复数， $3-5i$ 可以写为 3-5 I
Infinity	无穷大 ∞ ，正无穷大可表示为，+ Infinity

要计算 $10\pi + 15e$ 可以键入

$10\text{Pi}+15\text{E} \rightarrow 15\text{E}+10\text{Pi}$

要计算其近似值可以键入

$N[10\text{Pi}+15\text{E}] \rightarrow 72.1902$

而

$\text{Sin}[45*\text{Degree}]/N \rightarrow 0.707107$

表示的是正弦函数在 45° 处的近似值。

4 常用数学函数

4.1 函数名称与计算

Mathematica 系统定义了常用数学函数，它们可以参加所有的数学计算和 Mathematica 运算，其中大部分与数学上的习惯相同，但有几个函数有差别，请注意常见函数表 1-2 中的对数函数、指数函数和反三角函数。

表 1-2 数学中常用函数的表示

常用函数	含 义
$\text{Sqrt}[x]$ 或 $x^{(1/2)}$	x 的平方根 $\sqrt{x}$ ；
x^u	x 的幂函数， x^u

(续表)

Exp[x] 或 E^x	x 的指数函数 e^x
b^x	以 b 为底 x 的指数函数 b^x
Log[x]	以 e 为底 x 的自然对数函数 $\ln x$ 或者 $\log x$
Log[b, x]	以 b 为底 x 的对数函数 $\log_b x$
Sin[x]	x 的正弦函数 $\sin x$
Cos[x]	x 的余弦函数 $\cos x$
Tan[x]	x 的正切函数 $\tan x$
Cot[x]	x 的余切函数 $\cot x$
Sec[x]	x 的正割函数 $\sec x$
Csc[x]	x 的余割函数 $\csc x$
ArcSin[x]	x 的反正弦函数 $\arcsin x$
ArcCos[x]	x 的反余弦函数 $\arccos x$
ArcTan[x]	x 的反正切函数 $\arctan x$
ArcCot[x]	x 的反余切函数 $\text{arccot } x$
ArcSec[x]	x 的反正割函数 $\text{arcsec } x$
ArcCsc[x]	x 的反余割函数 $\text{arccsc } x$

要计算 $x = 3.14$ 时, 正弦函数的值可以键入

Sin[3.14] $\rightarrow$ 0.00159265

4.2 函数名输入规则

系统函数名的输入有如下一些规则:

- (1) 函数的自变量用方括号括起来, 不能用圆括号. Mathematica 中的括号是有专门规定的: 圆括号出现于算式中, 方括号只用于函数, 大括号只用于表的表示中. 如 $a(x+y)$ 表示 a 与 $(x+y)$ 相乘, 而 $f[x+y]$ 表示函数在 $x+y$ 处的值.
- (2) 函数名称都以大写字母开头, 后面是小字母. 当函数名可以分成几段时, 每一段的头一个字母大写, 后面的字母小写. 如反三角函数 ArcSin[], ArcCos[].
- (3) 函数是一个字符串, 其中不能有空格.
- (4) 当函数有多个参数时, 参数之间用逗号分隔, 例如对数函数 Log[b, x].

4.3 其它函数

Mathematica 所定义的实函数均可用于复数运算, 关于复数运算有几个特殊函数, 如 Abs[] (取模或绝对值), Re[] (取实部), Im[] (取虚部). 除此之外, 表 1-3 列出了 Mathematica 中用于作整数运算的函数.

表 1-3 其它常用函数

常用函数	含 义
$n!$	n 的阶乘;
$\text{Mod}[m, n]$	表示求 m 取模 n 的结果 (即 m 被 n 除得到的余数)
$\text{Quotient}[m, n]$	表示求出 m 除以 n 商的整数部分
$\text{Prime}[n]$	表示从 2 开始的第 n 个素数
$\text{GCD}[m, n]$	表示求 n 和 m 的最大公约数
$\text{LCM}[m, n]$	表示求 n 和 m 的最小公倍数
$\text{Round}[x]$	距离近似数 x 最近的整数
$\text{Floor}[x]$	不大于 x 的最大整数.
$\text{Abs}[x]$	求 x 的模或绝对值
$\text{Arg}[x]$	求 x 的幅角
$\text{Re}[b+c I]$	取 $b+c I$ 实部
$\text{Im}[b+c I]$	取 $b+c I$ 虚部

练习 1-1

1. 计算下列各式的精确值与近似值:

$$(1) e^{\sqrt{\pi^2+1}}$$

$$(2) e^{2+5i} \log_{10} \sqrt{3}$$

$$(3) \arctan \frac{e+\pi}{4}$$

$$(4) \sin 25^\circ$$

2. 求 3^{1000} , 它是一个多少位的数? 求 $200!$, 它是一个多少位的数?

(提示: 可用 $N[]$ 函数, 转换成科学计数法)

3. 求表达式 $e^{x^2} \cos x$ 在 $x=1.5, 2$ 的值, 并注意结果的异同, 为什么?

4. 计算 $35!$ 与 2008 的最小公倍数与最大公约数.

5. 求下列复数的模和实部:

$$(1) \sqrt{2.37^4 + i 3.29^2}$$

$$(2) \frac{1.24+i 2.57}{2\pi}$$

6. 在国际象棋的棋盘上第一格放 1 粒米, 第二格放 2 粒米, 以后依次放 4, 8, 16, 32, ..., 2^{63} 粒米 (国际象棋的棋盘有 64 个格), 摆完整个棋盘, 一共要多少粒米? 如果 4×10^7 粒米是 1 立方米, 这些米有多少立方米? (提示: 利用等比数列求和公式).

5 表与表的生成

5.1 表的概念及其简单运算

像数学中的集合概念一样, Mathematica 系统引入了“表”, 它是一种重要的表示结构, 用于表示相互有关系的一组表达式. 表在形式上是用花括号括起来的若干个表

达式, 表达式之间用逗号隔开, 可以用字母作为表的名字

aa1={1, 2, 3, 4, 5} -> {1, 2, 3, 4, 5}

表的元素还可以是其它形式的表达式. 系统对表的结构不做任何特殊的操作 (包括不改变表中元素的位置次序), 它仅仅作表中元素表达式本身所要求的计算, 例如,

aa2={Sqrt[2.0], 2+4, x+1} -> {1.41421, 6, 1+x}

与数学中集合不同的是 Mathematica 中的表可以参加数学运算:

(1) 数与表的运算 当一个表与一个数 (或表达式) 做运算时, 系统将该数 (或表达式) 分别与表中的每一个元素做运算, 结果仍是一个表, 例如,

aa3=aa2+5 -> {6.41421, 11, 6+x}

(2) 表与表之间的运算 两个长度一样 (元素个数一样多) 的表之间也可以进行运算, 这时两个表的元素依次分别进行运算, 结果还是一个表, 例如,

aa4=aa3-{2, 13, 3x+5} -> {4.41421, -2, 1-2x}

(3) 函数作用于表上 Mathematica 的数学函数都可以直接作用在表上, 这时系统将函数分别作用在表的每一个元素上, 得到的结果再构成一个表, 例如,

Sin[aa4] -> {-0.955874, -Sin[2], Sin[1-2 x]}

5.2 两个生成表的函数

其主要用法见表 1-4.

表 1-4 生成表的函数

常用函数及其格式	含 义
Table[表达式, {整数变量, 初值 (缺省时为 1), 终值, 步长 (缺省时为 1)}]	产生一个表, 其中的元素为表达式当整数变量从初值按照要求的步长取到终值的值
Table[表达式, {n, n1, n2, h1}, {m, m1, m2, h2}]	产生一个表, 其中的元素仍为一个表, 相当于双层循环, 外循环由 n 确定, 内循环由 m 确定
Range[整数]	给出从 1 到该整数所有整数为元素的表
Range[整数 1, 整数 2, 步长 (缺省时为 1)]	给出从整数 1 到整数 2 所有整数为元素的表

(1) 用 Table[] 构造表 如果能够写出表元素的“通项”形式, 就可以用系统函数 Table[] 生成这个表. 各种用法举例如下:

Table[n^2, {n, 1, 10}] -> {1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100}

Table[n^2, {n, 10}] -> {1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100}

Table[n^2, {n, 2, 10, 2}] -> {4, 16, 36, 64, 100}

再如

Table[1+x, {6}] -> {1+x, 1+x, 1+x, 1+x, 1+x, 1+x}

Table[Prime[n], {n, 10}] -> {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29}

Table[{x, Sin[x]}, {x, 0, 0.5, 0.1}] -> {{0, 0}, {0.1, 0.0998334}, {0.2, 0.198669}, {0.3, 0.29552}, {0.4, 0.389418}, {0.5, 0.479426}}

最后一句生成一个两层表, 子表中两个元素构成一点 $\{x, \sin x\}$.

Table[n+m, {m, 1, 6}, {n, 1, 5}] $\rightarrow$ $\{\{2, 3, 4, 5, 6\}, \{3, 4, 5, 6, 7\}, \{4, 5, 6, 7, 8\}, \{5, 6, 7, 8, 9\}, \{6, 7, 8, 9, 10\}, \{7, 8, 9, 10, 11\}\}$

这里生成了一个具有 6 个元素(子表)的表, 每一个子表的元素数为 5, 因此易知, **Table[]** 先对 n 作表, 再对 m 作表, 它等价于

Table[n+Table[m,{m,1,5}],{n,1,6}]

(2) 用 **Range[]** 作表 **Range[]** 用于生成以数值为元素的表, 其各种用法举例如下:

Range[10] $\rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

Range[2, 8] $\rightarrow \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

Range[2, 8, 2] $\rightarrow \{2, 4, 6, 8\}$

Range[1, 2, 0.31] $\rightarrow \{1, 1.31, 1.62, 1.93\}$

Range[10, 8] $\rightarrow \{ \}$.

练习 1-2

1. 构造下面的表: (写出命令行)

(1) $\{1, 4, 9, 16, \dots, 100\}$ (2) 用小数表示 $\{\frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \dots, \frac{1}{10!}\}$

(3) $\{\{1, 2, 3, \dots, 10\}, \dots, \{1, 2, 3, \dots, 10\}\}$, 共 10 个子表

2. 以表的形式生成下列数列的前 10 项:

$$(1) \quad x_n = \frac{n}{n+1}$$

$$(2) \quad x_n = \frac{1}{2^n}$$

$$(3) \quad x_n = \frac{n + (-1)^{n+1}}{n}$$

$$(4) \quad x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$$

3. 写出第一个素数到第 1000 个素数的表.

6 表的结构及有关操作

表是一些表达式聚集成的整体, 这些表达式称为这个表的元素. 表的元素是有序的, 表的元素还可以是表, 甚至更复杂, 例如

{3, {2, x^2}, {3+y, {abc, {x, 7}, 4}}, d}

一个表还可以没有元素, 称为“空表”, 即 $\{ \}$.

6.1 表中取出部分元素

表 1-5 列出了从表中取出部分元素的操作.