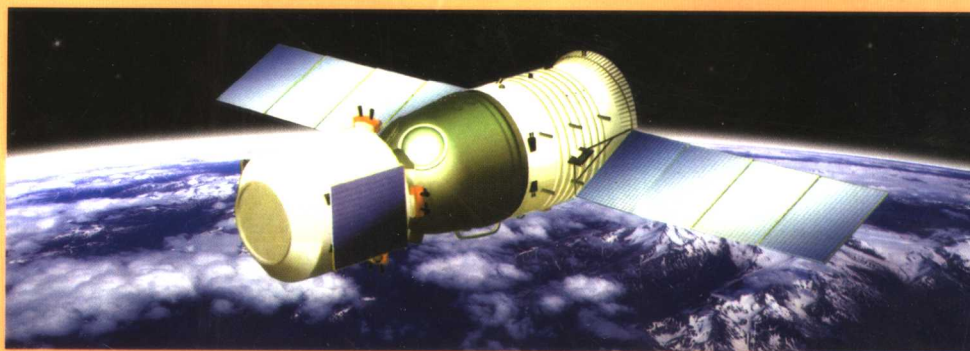


21世纪高等学校自动控制类系列教材

现代控制理论基础



曲延滨 王新生 编
张晋格 审

哈尔滨工业大学出版社

21 世纪高等院校自动控制类教材

现代控制理论基础

曲延滨 王新生 编

张晋格 审

哈尔滨工业大学出版社

·哈尔滨·

内 容 提 要

本书系统地介绍了现代控制理论的基本理论和基本方法。全书共分八章,内容包括绪论,控制系统的状态空间描述,线性控制系统的运动分析,线性控制系统的能控性和能观测性,控制系统的李雅普诺夫稳定性分析,状态反馈和状态观测器,最优控制,MATLAB在现代控制理论中的应用。

本书可作为高等学校自动化、电气工程及其自动化等专业的本科生教材,也可作为非控制类学科的研究生教材,还可供控制领域的工程技术人员自学与参考。

图书在版编目(CIP)数据

现代控制理论基础/曲延滨,王新生编. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2005.5

ISBN 7-5603-2176-3

I. 现… II. ①曲…②王… III. 自动控制理论-高等学校-教材
IV. TV.TPB

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 003493 号

出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>
印 刷 哈尔滨市龙华印刷厂
开 本 787×1092 1/16 印张 13 字数 312 千字
版 次 2005 年 8 月第 1 版 2005 年 8 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 7-5603-2176-3/TP·216
印 数 1~4 000
定 价 19.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

前 言

为了适应 21 世纪高素质科技人才培养的需要,我国教学改革正按照“优化知识结构,培养创新意识,提高综合素质”的总原则向纵深发展。为适应这种态势,哈尔滨工业大学开始了现代控制工程基础理论课程体系与教材建设的研究工作,其研究成果获黑龙江省优秀高等教育科研成果一等奖。在此基础上,结合目前我国多数工科院校的课程设置情况与教学现状,决定编写一套控制工程基础理论系列教材(“自动控制原理”、“现代控制理论基础”、“计算机控制理论与应用”、“智能控制技术”),本系列教材已确定为“十五”期间哈尔滨工业大学重点教材。

本书在内容上将覆盖控制理论的经典部分、现代部分、离散与数字部分以及最新发展的智能控制方法等。在编写风格上突出了以下特点:

(1)先进性:将计算机辅助工具 MATLAB 融入系列教材编写中,用于系统的分析、计算、设计与仿真。顺应现代科技的发展潮流,给控制理论教材注入新的活力。

(2)适用性:控制理论要求学生具有较强的数理概念,根据这一特点,教材努力将数学的严谨性与物理的直观性相结合,理论与实践相结合,加大例题与习题的选择力度,注重工程应用背景,兼顾机、电类各专业的应用特点。

(3)系统性与渐进性:遵循控制理论的发展规律,教材各分册之间循序渐进,有机连接,充分体现控制理论发展的系统性和渐进过程。

本书的主要内容是介绍现代控制理论的基本理论和基本方法。全书共分八章,包括绪论,控制系统的状态空间描述,线性控制系统的运动分析,线性控制系统的能控性和能观测性,控制系统的李雅普诺夫稳定性分析,状态反馈和状态观测器,最优控制, MATLAB 在现代控制理论中的应用。

本书在编写过程中注重保证基础、精选内容,在保证现代控制理论内容的严谨性和系统性前提下,不刻意追求定理证明中数学上的严密性,而是突出问题背景和提法,不去盲目追求系统的完整性,避免内容繁杂,篇幅过大。为了便于读者理解书中内容,在各章中都列有较典型的例题和习题。

本书第一至四章由曲延滨副教授编写,第五至八章由王新生副教授编写。

本书由哈尔滨工业大学张晋格教授主审。张教授在主审过程中提出了许多宝贵的意见,在此深表感谢。

在本书编写过程中得到哈尔滨工业大学冉树成教授、梁景凯教授、编者工作单位的领导和许多同志的关心、帮助和支持,在此一并表示衷心感谢。

由于编者水平有限,书中不足之处在所难免,恳请读者对本书提出批评与指正,以便进一步修订与完善。

作 者
2005 年 3 月

目 录

第一章 绪论	(1)
1.1 控制理论发展史	(1)
1.2 现代控制理论的基本内容	(2)
第二章 控制系统的状态空间描述	(3)
2.1 控制系统的状态空间表达式	(3)
2.2 由微分方程求状态空间表达式	(9)
2.3 系统的传递函数矩阵	(16)
2.4 状态方程的线性变换	(19)
2.5 离散系统的数学描述	(30)
小结	(33)
习题	(34)
第三章 线性控制系统的运动分析	(37)
3.1 线性定常齐次状态方程的解	(37)
3.2 状态转移矩阵	(39)
3.3 线性定常非齐次状态方程的解	(50)
3.4 线性时变系统状态方程的解	(52)
3.5 线性离散系统状态方程的解	(55)
3.6 线性连续时间系统的离散化	(59)
小结	(61)
习题	(62)
第四章 线性控制系统的能控性和能观测性	(66)
4.1 线性连续系统的能控性	(66)
4.2 线性连续系统的能观测性	(72)
4.3 对偶原理	(76)
4.4 线性系统的能控标准形与能观测标准形	(78)
4.5 线性定常离散系统的能控性与能观测性	(84)
4.6 线性系统的结构分解	(87)
4.7 能控性、能观测性与传递函数矩阵的关系	(94)
小结	(95)
习题	(96)
第五章 控制系统的李雅普诺夫稳定性分析	(100)
5.1 李雅普诺夫意义下的稳定性	(100)
5.2 李雅普诺夫稳定性理论	(102)
5.3 线性系统的李雅普诺夫稳定性分析	(109)

5.4 非线性系统的李雅普诺夫稳定性分析	(113)
小结	(119)
习题	(120)
第六章 状态反馈和状态观测器	(122)
6.1 状态反馈和输出反馈	(122)
6.2 极点配置问题	(125)
6.3 状态观测器	(130)
6.4 带状态观测器的状态反馈系统	(135)
小结	(139)
习题	(140)
第七章 最优控制	(142)
7.1 用变分法求解最优控制问题	(142)
7.2 极小值原理及应用	(156)
7.3 二次型性能指标的线性最优控制	(162)
7.4 动态规划法	(172)
小结	(182)
习题	(183)
第八章 MATLAB 在现代控制理论中的应用	(185)
8.1 几种数学模型及其转换	(185)
8.2 状态方程的解	(188)
8.3 控制系统的能控性和能观测性分析	(192)
8.4 Lyapunov 稳定性分析	(196)
8.5 极点配置控制器的设计	(197)
8.6 线性二次型的最优调节器设计	(199)
参考文献	(200)

第一章 绪 论

1.1 控制理论发展史

控制理论包括经典控制理论和现代控制理论两大部分。经典控制理论一般是指以单变量系统为主,用频率法和根轨迹法研究控制系统动态特性的理论。现代控制理论是在经典控制理论基础上逐步发展起来的。它是以时域法,特别是状态空间法为主,研究系统状态的运动规律,并以所要求的各种指标最优为目标来改变这种运动规律。

理论来源于实践,又反过来指导实践。控制理论的发展过程也符合这一规律。在控制理论未形成之前,人类就已经发明了具有自动功能的装置,如公元前 14 ~ 公元前 11 世纪在中国、埃及和巴比伦出现的自动计时漏壶。1765 年瓦特(J. Watt)发明了蒸汽机离心调速器,开始了自动控制技术在工业中的应用。但是调速器在使用过程中,某些条件下蒸汽机的速度会自发地产生剧烈的振荡,从而引发了一些学者对此现象的分析和研究。英国学者麦克斯韦(J. C. Maxwell)于 1868 年发表了《论调速器》一文,对它的稳定性进行了分析,指出控制系统的品质可用微分方程来描述,系统的稳定性可用特征方程根的位置和形式加以分析。1875 年英国的劳斯(E. J. Routh)和 1895 年德国的赫尔维茨(A. Hurwitz)先后提出了根据代数方程系数判别系统稳定性的准则。1892 年俄国学者李雅普诺夫(A. М. Ляпунов)出版了专著《论运动稳定性的一般问题》,提出了用李雅普诺夫函数(一种能量函数)的正定性及其导数的负定性来判别系统稳定性的准则,从而建立了动力学系统的一般稳定性理论。

1940 年以前,自动控制系统的的设计主要考虑系统的稳定性和稳态精度,对于系统的暂态性能很少考虑。

第二次世界大战期间,不少国家重视研制具有快速、准确跟踪性能的伺服系统,从而促进了对伺服系统结构及其暂态和稳态性能的研究。一些科学家借鉴和吸取了通信理论的一些成果,特别是伯莱克(H. S. Black)关于负反馈放大器的理论和乃奎斯特(H. Nyquist)的频率响应理论,并加以发展,形成了控制理论中的一种基本方法——频率法。

1948 年,依万斯(W. R. Evans)提出了根轨迹法。这是研究控制系统的另一种简便有效的方法。在某些情况下,根轨迹法更加简便、直观,是对频率法的重要补充。至此,形成了建立在频率法和根轨迹法基础上的经典控制理论。

20 世纪 50 年代,自动控制技术的应用已经相当广泛,并取得了显著效果,这就激起了一种希望,把控制理论推广到更多的领域和更复杂的系统中去。如核反应堆的控制、航空航天等的控制等。经典控制理论就相对显出它的局限性,难以用来解决复杂的控制问题。

贝尔曼(R. Bellman)等人提出了状态空间法,这种反映系统内部全部状态变量信息的内部描述法已发展成为现代控制理论的基本数学描述方法。同一时期,前苏联的庞德李亚金(Л. С. Понтрягин)等人提出了极大值原理,它已经成为研究最优控制的主要方法之一。1960 年,美国学者卡尔曼(R. E. Kalman)提出了关于控制系统能控性和能观测性理论,把对

现代控制理论的研究引向深入。系统能控性和能观测性是现代控制论的两个重要的基本概念,其有关理论是最优控制和最优估计的基础。此后,卡尔曼等人又创建了一种滤波理论,并且得到了成功的应用。1970年英国的罗森布诺克(H. H. Rosenbrock)等人把经典控制理论中的频率特性法加以推广,用来解决线性多变量系统中的问题,被称为现代频域法。

以上的这些理论和方法为现代控制理论奠定了基础。

1.2 现代控制理论的基本内容

现代控制理论是对系统的状态进行分析和综合的理论,主要包括以下几个方面。

一、线性系统理论

线性系统理论是现代控制理论的基础,也是现代控制理论中理论最完善、技术较成熟、应用最广泛的部分。它主要研究线性系统在输入作用下状态运动过程的规律和改变这些规律的可能性与措施;建立和揭示系统的结构性质、动态行为和性能之间的关系。线性系统理论主要包括系统的状态空间描述,能控性、能观性和稳定性分析,状态反馈、状态观测器及补偿器的理论和设计方法等内容。

二、建模和系统辨识

建立动态系统在状态空间的模型,使其能正确反映系统输入、输出之间的基本关系,是对系统进行分析 and 控制的出发点。如果模型的结构已经确定,只需确定其参数,就是参数估计问题。若模型的结构和参数需同时确定,就是系统辨识问题。

三、最优滤波理论

最优滤波理论亦称最佳估计理论。当系统受到环境噪声或负载干扰时,其不确定性可以用概率和统计的方法进行描述和处理。也就是在系统数学模型已经建立的基础上,利用被噪声等污染的系统输入输出的量测数据,通过统计方法获得有用信号的最优估计。

四、最优控制

最优控制是在给定限制条件和性能指标下,寻找使系统性能在一定意义下为最优的控制规律。所谓限制条件,即约束条件,指的是物理上对系统所施加的一些约束;所谓性能指标,则是为评价系统在全工作过程中的优劣所规定的标准;所寻求的控制规律,就是综合出来的最佳控制器。

五、自适应控制

自适应控制,即随时辨识系统的数学模型并按照当前的模型去修改最优控制律。当被控对象的内部结构和参数以及外部的环境特性和扰动存在不确定时,系统自身能在线量测和处理有关信息,在线相应地修改控制器的结构和参数,以保持系统所要求的最佳性能。

第二章 控制系统的状态空间描述

在经典控制理论中,用系统输入量和输出量之间的关系(微分方程或传递函数)来描述系统的运动状态,这种方法只反映了系统外部的输出量和输入量之间的关系,而系统内部的各个中间变量都消去了。因此,被称为输入、输出描述方法,或称外部描述法。

在现代控制理论中,通常采用状态空间表达式做系统的数学模型,用时域分析法分析和研究系统的动态特性。状态空间表达式是由状态方程和输出方程组成的,状态方程是一个一阶微分方程组,它主要描述系统输入与系统内部状态的变化关系,即描述系统的内部行为,揭示控制系统的内在规律;输出方程是一个代数方程,它主要描述系统状态与输出的关系,即描述系统的外部行为,说明控制系统的外部输出规律。因此,状态空间表达式反映了控制系统动态行为的全部信息,它是对系统的一种完全描述。

2.1 控制系统的状态空间表达式

一、状态、状态变量和状态空间

1. 状态

控制系统的状态,是指能够完全描述系统时域行为的一个最小变量组。最小变量组是指这组变量中各个变量是相互独立的;完全描述是指这个最小变量组还必须具备以下条件:若给定了这个最小变量组在初始时刻 $t = t_0$ 时的值(即初始状态),又已知 $t \geq t_0$ 时系统输入的时间函数,则系统在 $t \geq t_0$ 任何瞬时的行为(即系统在 t 时刻的状态),就完全而且惟一地被确定了。

系统在时间 $t(t \geq t_0)$ 的状态,是由系统在 t_0 时刻的初始状态和 $t \geq t_0$ 时的输入惟一确定的,它与 t_0 前的状态和 t_0 前的输入是无关的。

状态变量是构成系统状态的变量,是指能完全描述系统行为的最小变量组中的每一个变量。例如,若为完全描述某控制系统,其最小变量组必须由 n 个变量组成,这 n 个变量为 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$,则这个系统就具有 n 个状态变量。

系统状态变量不同于系统输出变量,因为输出变量必须是能够观测的物理量,而状态变量不一定是在物理上可观测的。

2. 状态向量

设系统的状态变量为 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$,以这 n 个状态变量为分量,构成一个 n 维向量,则称这个向量为系统的状态向量,记为

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad \cdots \quad x_n(t)]^T$$

3. 状态空间

以控制系统的 n 个状态变量 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 为坐标轴构成的 n 维空间称为状态空间。

状态空间中的每一个点, 对应于系统的某一个特定状态。如果给定了 t_0 时刻系统的初始状态, 则状态向量的初始位置就确定了, 在 $t \geq t_0$ 各瞬时, 系统状态不断地改变, 则状态向量的端点不断地产生位移, 其所移动的路径, 就称为系统的状态轨迹。

二、系统的状态空间表达式

状态空间表达式是对被控系统建立的一种数学模型, 它是应用现代控制理论对系统进行分析 and 综合的依据。用图 2.1 所示的方框图来表示一个多输入 - 多输出系统, 方框以外的部分为系统环境, 环境对系统的作用为系统输入, 系统对环境的作用为系统输出, 分别用 $u_1, u_2, \dots, u_r$ 和 $y_1, y_2, \dots, y_m$ 来表示, 它们被称为系统的外部变量。用以刻画系统在每个时刻所处状况的状态变量是系统的内部变量, 用 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 表示, 这些变量随着时间的变化体现了系统的行为。描述系统输入、输出和状态变量之间关系的方程组, 称为系统的状态空间表达式。

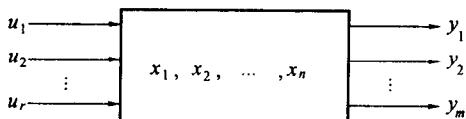


图 2.1 系统的方框图表示

设系统的 r 个输入变量为 $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$; m 个输出变量为 $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$; 系统的状态变量为 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 。

把系统的状态变量与输入变量之间的关系用一组一阶微分方程来描述, 称之为系统的状态方程, 即

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= \dot{x}_1(t) = f_1[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t); u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t); t] \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= \dot{x}_2(t) = f_2[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t); u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t); t] \\ &\vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} &= \dot{x}_n(t) = f_n[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t); u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t); t] \end{aligned}$$

用向量矩阵表示, 得到一个一阶向量矩阵微分方程

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \quad (2.1)$$

式中, $\mathbf{x}(t)$ 为 n 维状态向量; $\mathbf{u}(t)$ 为 r 维输入向量(控制向量); $\mathbf{f}[\cdot]$ 为 n 维向量函数, 即

$$\mathbf{f}[\cdot] = [f_1(\cdot), f_2(\cdot), \dots, f_n(\cdot)]^T$$

系统输出变量与状态变量、输入变量之间的数学表达式称为系统的输出方程, 即

$$\begin{aligned} y_1(t) &= g_1[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t); u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t); t] \\ y_2(t) &= g_2[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t); u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t); t] \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$y_m(t) = g_m[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t); u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t); t]$$

用向量矩阵方程表示为

$$y(t) = g[x(t), u(t), t] \quad (2.2)$$

式中, $y(t)$ 为 m 维输出向量; $g[\cdot]$ 为 m 维向量函数, 即

$$g[\cdot] = [g_1(\cdot), g_2(\cdot), \dots, g_m(\cdot)]^T$$

描述系统输入变量、状态变量和输出变量之间关系的状态方程和输出方程, 构成了对系统动态行为的完整描述, 称为系统的状态空间表达式。

例 2.1 对于图 2.2 所示的 RLC 串联网络, 试列写以 $u(t)$ 为输入、 $u_C(t)$ 为输出的状态空间表达式。

解 $i_L(t)$ 和 $u_C(t)$ 为网络中的独立变量, 若它们的初始值 $i_L(t_0)$ 、 $u_C(t_0)$ 及外加电压 $u(t)$ 为已知, 则网络的运动状态完全可以用 $i_L(t)$ 和 $u_C(t)$ 来描述, 故 $i_L(t)$ 和 $u_C(t)$ 可以作为给定网络的一组状态变量。也可以根据网络中独立的储能元件, 即电容 C 和电感 L 来确定状态变量, 有两个独立的储能元件, 则有两个状态变量, 选取电感电流 $i_L(t)$ 和电容电压 $u_C(t)$ 作为状态变量。根据电路理论可知, 回路中的 $i_L(t)$ 和 $u_C(t)$ 的变化规律满足方程

$$L \frac{di_L(t)}{dt} + Ri_L(t) + u_C(t) = u(t)$$

$$C \frac{du_C(t)}{dt} = i_L(t)$$

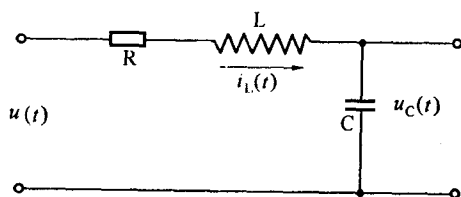


图 2.2 RLC 串联网络

令 $x_1(t) = i_L(t)$, $x_2(t) = u_C(t)$, 写成一阶矩阵微分方程形式, 则状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (2.3)$$

系统的输出方程为

$$y(t) = u_C(t) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

将式(2.3)和式(2.4)写成矩阵方程的形式

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

其中

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [0 \quad 1]$$

式(2.5)为RLC串联网络的状态空间表达式。

应该指出,状态变量的选择不是惟一的,对于本题,还可以选择

$$x_1(t) = i_L(t) \quad x_2(t) = q_C(t)$$

则对应的状态方程和输出方程可写为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{LC} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = u_C(t) = \frac{1}{C}q_C(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

由此可以看出,系统状态变量的选取不是惟一的,同一个系统可以选择不同的状态变量,但一组状态变量是另外一组状态变量的线性组合,而且状态变量的个数是惟一的,等于系统的阶数,即系统中独立储能元件的个数。

例 2.2 图 2.3 所示为某机械运动系统的物理模型,它是一个弹簧 - 质量 - 阻尼器系统。试建立输入为外力 $u(t)$ 、输出为位移 $y(t)$ 的状态空间表达式。

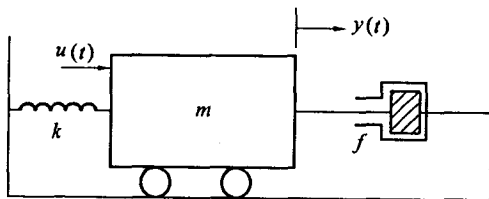


图 2.3 弹簧 - 质量 - 阻尼器系统

解 令 k 为弹簧的弹性系数, f 为阻尼器的阻尼系数。首先选择系统的状态变量。

根据牛顿定律可写出系统的动态方程为

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = u(t) - f \frac{dy(t)}{dt} - ky(t)$$

将上式改写为

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + f \frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = u \quad (2.6)$$

若已知质量为 m 的物体在 t_0 时刻的初始位移 $y(t_0)$ 和初始速度 $\dot{y}(t_0)$, 又已知系统的输入函数, 则方程(2.6)有惟一解, 即在 $t \geq t_0$ 的任意瞬间, 质量为 m 的物体的位移可以被确定下来。因此, 可以选 $y(t)$ 和 $\dot{y}(t)$ 作为系统的状态变量。

令 $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = \dot{y}(t) = \dot{x}_1(t)$, 并将式(2.6)改写为一阶微分方程组, 有

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{k}{m}x_1(t) - \frac{f}{m}x_2(t) + \frac{1}{m}u(t) \end{aligned} \quad (2.7)$$

写成一阶矩阵微分方程的形式, 即

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{f}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t) \quad (2.8)$$

式(2.8)即为用来描述系统运动的状态方程。

系统输出方程可表示为

$$y(t) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

将式(2.8)和式(2.9)写成矩阵方程的形式,即

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (2.10)$$

式中

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{f}{m} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [1 \ 0]$$

式(2.10)即为弹簧 - 质量 - 阻尼器系统的状态空间表达式。

多输入 - 多输出的线性定常系统如图 2.4 所示, 设系统具有 n 个状态变量, r 个输入变量, m 个输出变量, 并且系统输入对输出有直接影响, 则系统的状态方程和输出方程为

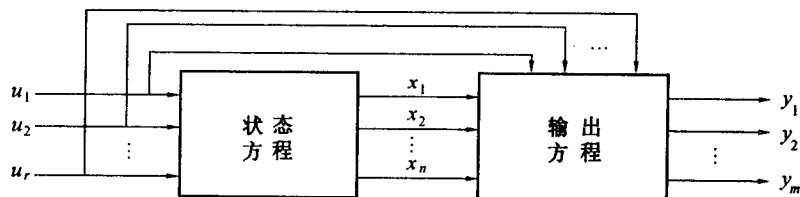


图 2.4 多输入 - 多输出线性定常系统

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t) \end{aligned} \quad (2.11)$$

式中

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad n \times 1 \text{ 维状态向量}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix} \quad r \times 1 \text{ 维输入向量}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \quad m \times 1 \text{ 维输出向量}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad n \times n \text{ 维系统矩阵} \quad (2.12)$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix} \quad n \times r \text{ 维输入矩阵} \quad (2.13)$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} \quad m \times n \text{ 维输出矩阵} \quad (2.14)$$

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr} \end{bmatrix} \quad m \times r \text{ 维直接矩阵} \quad (2.15)$$

系统矩阵 A 表示了系统内部状态变量间的关系,它取决于被控系统的作用原理、结构和各项参数;输入矩阵 B 表示了各输入变量如何影响各状态变量;输出矩阵 C 表示了状态变量与输出变量间的作用关系;直接矩阵 D 反映了输入对输出的直接作用。一般情况下,系统输入与输出的直接作用是不存在的,所以可不考虑 D 。

三、状态空间表达式的一般形式

对于具有 r 个输入、 m 个输出、 n 个状态变量的系统,不管是线性的、非线性的、时变的还是定常的,其状态空间表达式的一般形式为

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f[x(t), u(t), t] \\ y(t) &= g[x(t), u(t), t] \end{aligned} \quad (2.16)$$

式中, $x(t)$ 为 $n \times 1$ 维状态向量; $u(t)$ 为 $r \times 1$ 维输入向量; $y(t)$ 为 $m \times 1$ 维输出向量; f 为 $n \times 1$ 维向量函数; g 为 $m \times 1$ 维向量函数。

按线性、非线性、时变和定常可以划分为以下几类系统。

1. 非线性时变系统

对于非线性时变系统,向量函数 f 和 g 的各元是状态变量和输入变量的非线性时变函数,表示系统参数随时间变化,状态方程和输出方程是非线性时变函数,状态空间表达式只能用式(2.16)表示。

2. 非线性定常系统

非线性定常系统中,向量函数 f 和 g 不依赖于时间变量 t ,因此,状态空间表达式可写为

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f[x(t), u(t)] \\ y(t) &= g[x(t), u(t)] \end{aligned} \quad (2.17)$$

3. 线性时变系统

线性时变系统中,向量函数 f 和 g 的各元为状态变量和输入变量的线性函数,系统参数随时间变化,线性时变系统的状态空间表达式为

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{aligned} \quad (2.18)$$

式中, $A(t)$ 为 $n \times n$ 维系统矩阵; $B(t)$ 为 $n \times r$ 维输入矩阵; $C(t)$ 为 $m \times n$ 维输出矩阵; $D(t)$ 为 $m \times r$ 维直接矩阵。

4. 线性定常系统

对于线性定常系统, 状态空间表达式中各元素均是常数, 与时间无关, 系数矩阵为常数矩阵, 状态空间表达式为式(2.11)。

对于单输入 - 单输出线性定常系统, u 和 y 是一维的, 即为标量, 其状态空间表达式可表示为

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}\quad (2.19)$$

四、线性系统状态空间表达式的结构图和信号流图

对于线性系统, 系统的状态方程和输出方程可以用结构图的方式表达出来, 它形象地说明了系统输入、输出和系统状态之间的信息传递关系。

图 2.5 所示为 n 阶线性定常系统的结构图, 图中双箭头表示通道中传递的是向量信号。图 2.6 所示为系统的信号流图, 其绘制规则与单变量系统完全相同, 只是此时的变量是向量, 两变量间传输的是矩阵。

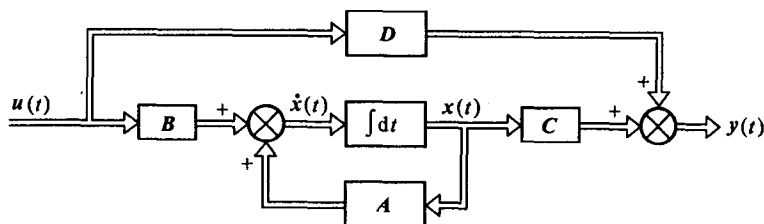


图 2.5 线性定常系统结构图

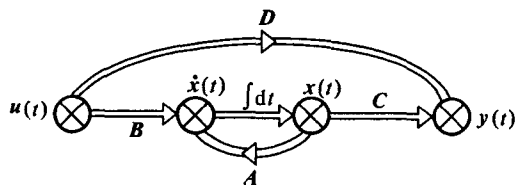


图 2.6 线性定常系统信号流图

结构图和信号流图是用来描述系统输入变量、状态变量和输出变量之间函数关系的, 既表示了输入变量与系统内部状态变量的因果关系, 又反映了内部状态变量对输出变量的影响。

2.2 由微分方程求状态空间表达式

在经典控制理论中, 系统的输入输出关系采用微分方程或传递函数来描述。经典控制理论中采用输入变量和输出变量间的高阶微分方程来描述系统, 而现代控制理论中是采用输入变量、状态变量和输出变量间的一阶微分方程组来描述系统, 需要选取合适的状态变量, 将高阶微分方程转换为状态空间表达式, 并保持原系统输入输出关系不变。

一、微分方程中不含输入函数导数项

当输入函数中不包含导数项时,系统微分方程的形式为

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = bu \quad (2.20)$$

要将上式 n 阶微分方程变换为状态空间表达式,需要选择系统的 n 个状态变量。根据微分方程理论,若已知 $y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$ 及 $t \geq 0$ 时的输入 $u(t)$, 则微分方程有惟一解,即系统在 $t \geq 0$ 的任何瞬时的状态都被惟一地确定了。因此,可选取 $y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}$ 作为系统的一组状态变量。令

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= \dot{y} \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= y^{(n-2)} \\ x_n &= y^{(n-1)} \end{aligned} \quad (2.21)$$

则式(2.20)可变换为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \cdots - a_2 x_{n-1} - a_1 x_n + bu \end{aligned}$$

写成向量矩阵形式

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (2.22)$$

其中

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

输出方程为

$$y = x_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

其中

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

系统的状态空间表达式为

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned}\quad (2.23)$$

系统的结构图如图 2.7 所示。

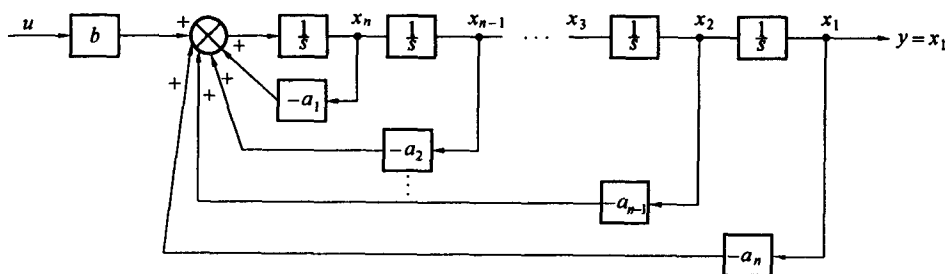


图 2.7 系统结构图

例 2.3 设系统微分方程为

$$\dddot{y} + 6\ddot{y} + 11\dot{y} + 6y = 6u$$

求系统的状态空间表达式。

解 选取状态变量为

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{y} = \dot{x}_1$$

$$x_3 = \ddot{y} = \dot{x}_2$$

由微分方程可得

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = -6x_1 - 11x_2 - 6x_3 + 6u$$

$$y = x_1$$

则状态空间表达式为

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

二、输入函数中包含导数项时的变换

当输入函数包含导数项时,系统微分方程的形式为

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1} \dot{u} + b_n u \quad (2.24)$$