TANXING LIXUE JI YOUXIAN DANYUANFA

弹性力学
及有限单元法

张雷顺　王俊林　祝彦知　郭庆海　编著

黄河水利出版社

弹性力学及有限单元法

张雷顺　王俊林　祝彦知　郭庆海　编著

黄 河 水 利 出 版 社

内 容 提 要

本书内容分两部分，一部分是线弹性力学，另一部分是有限单元法。弹性力学部分主要介绍了线弹性力学的基本概念、平面问题的基本理论、平面问题的直角坐标解答、平面问题的极坐标解答、空间问题的基本理论、空间问题的解答和薄板弯曲问题。有限单元法部分主要介绍了线弹性力学问题的有限单元法：对平面问题介绍了三角形三结点单元、三角形六结点单元、矩形四结点单元和八结点等参单元；对薄板弯曲问题介绍了矩形四结点单元；对空间问题介绍了四面体四结点单元、二十结点等参单元。

本书可作为本科生和硕士研究生的教材和教学参考书，也可供科研工作者和工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

弹性力学及有限单元法/张雷顺，王俊林，祝彦知，郭庆海编著.—郑州：黄河水利出版社，2005.8

ISBN 7-80621-868-8

Ⅰ.弹…　Ⅱ.①张…②王…③祝…④郭…　Ⅲ.①弹性力学 ②有限元法　Ⅳ.①O343　②O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 128447 号

策划组稿：王路平　电话：0371-66022212　E-mail：wlp@yrcp.com

出 版 社：黄河水利出版社

地址：河南省郑州市金水路 11 号　　邮政编码：450003

发行单位：黄河水利出版社

发行部电话：0371-66026940　　传真：0371-66022620

E-mail：yrcp@public.zz.ha.cn

承印单位：黄河水利委员会印刷厂

开本：787 mm×1 092 mm　1/16

印张：14

字数：320 千字　　印数：1—2 600

版次：2005 年 8 月第 1 版　　印次：2005 年 8 月第 1 次印刷

书号：ISBN 7-80621-868-8/O·14　　定价：25.00 元

前　言

弹性力学和有限单元法是高等学校水利、土建和机械等专业的本科生和硕士研究生的一门重要的技术基础课。由于它在科研和工程领域中的广泛应用，所以受到高校师生、科研工作者和广大工程技术人员的高度重视。

弹性力学是固体力学的一个分支，它是研究弹性体在外力、温度改变和支座沉陷等因素作用下所产生的应力、应变和位移的一门学科。它研究的弹性体形状要比材料力学更为广泛；所求得的结果较材料力学更接近实际。它和材料力学相互配合，可更好地对构件强度、刚度和稳定性进行设计和校核。

弹性力学是塑性力学、断裂力学、损伤力学等学科的基础。

有限单元法中的弹性力学有限单元法是以弹性力学为理论、采用一定的数学方法、以计算机为工具进行计算的一种数值解法。这种方法自产生以来，得到了迅速的发展，目前已有非常广泛的应用。原来理论上不能求解的问题，大都可以通过有限单元法得到相应的数值解。

有限单元法作为一种计算方法，已应用到固体力学、流体力学、热传导、电磁学等很多学科领域。目前，开发的有限单元法程序很多，有些功能已相当全面。

弹性力学与有限单元法的有机结合，是弹性力学在计算技术上实现现代化的一个重要标志，它使过去认为无法解决的一些计算难题成为常规问题。

本书作者多年来一直从事本科和硕士研究生的弹性力学和有限单元法的教学，本书是作者在整理讲稿基础上编著而成的。在编著时，一方面吸取了国内外同类教材、论文和论著的优点，另一方面也反映了作者多年的教学经验、教学研究成果和部分科研成果。

本书编著分工如下：张雷顺编著第一章，王俊林编著第二、五、九、十三章，祝彦知编著第三、六、七、十一章，郭庆海编著第四、八、十、十二章。全书由张雷顺负责统稿。

由于作者水平有限，所以书中难免存在错误和不妥之处，恳请读者提出宝贵意见。

编著者

2005 年 6 月

目　录

第一章　绪　论

§1－1　弹性力学的任务和特点

弹性力学的任务是研究弹性体在外部因素(外力、温度改变和支座沉陷等)作用下产生的应力、应变和位移的一门学科。

弹性力学与材料力学和结构力学比较,从研究对象上讲:材料力学主要是研究杆,结构力学主要是研究杆件系统,弹性力学则不仅研究杆,也研究板、壳以及实体结构。从研究方法上讲:这三门力学都是运用静力学研究物体的平衡状态,运用几何学研究物体的形变协调状态,运用物理学研究物体材料的应力与应变的关系。从研究所取的假定上讲:这三门力学具有相同的基本假定,但材料力学中针对不同构件,又引入了较多的形变状态或应力分布的假定,而在弹性力学中一般不必再引用那些假定。

总之,弹性力学研究的对象较广泛,推导过程较严密,所得结果也较精确,当然计算过程较复杂。

在解决实际工程问题时,应将材料力学、结构力学和弹性力学有机地结合起来。

§1－2　弹性力学的基本假定

弹性力学的基本假定如下:

(1)假定物体处处连续。

这一假定认为物体处处密实无孔隙。严格地讲,实际的物体并非处处连续。但只要组成物体的微粒及微粒之间的距离远小于物体的尺寸,就可以近似地将其当做处处连续。只有采用这一假定,物体的位移、应变和应力才可能成为坐标的连续函数,也才可能采用数学分析的方法进行分析。

(2)假定物体是线弹性的。

这一假定,一方面认为物体是弹性的,即认为作用在物体上的外力撤去后,物体能完全恢复原状;另一方面则认为弹性体服从虎克定律。很多实际物体在受力不太大时,能较好地满足这一假定。采用这一假定,可使反映材料弹性的弹性常数不随应力或应变的水平而变化。

(3)假定物体是均匀的。

这一假定认为物体是由同一种材料组成的。当物体是由多种材料组成时,只要每种材料的粒度远小于物体的尺寸,且分布均匀,则可近似将其当做均匀的。该假定使得材料的弹性与坐标位置无关。

(4)假定物体是各向同性的。

这一假定认为材料的弹性在各个方向都相同。

(5)假定位移和形变很小。

所谓位移很小,指的是各点位移远小于物体的原始尺寸,以便在分析物体平衡时可采用物体的原始尺寸。所谓形变很小,指的是各点的应变远小于1,以便所导出的有关方程为线性方程。

假定(1)至假定(4)是对物体材料方面的假定,满足这些假定的物体称为理想弹性体。假定(5)是对位移和形变的一种限定。满足这5条假定的弹性力学问题,称为线弹性力学问题。在线弹性力学里,可以应用叠加原理。

§1-3 弹性力学中的几个基本概念

有几个基本概念在弹性力学中经常使用,它们是:

(1)外力。所谓外力是指其他物体作用在所研究物体上的力。外力又可分为面力和体力。

面力:作用在物体表面上的力称为面力。液体压力、风力、接触力等都是面力。作用在物体表面上任一点处的面力,可用那点的面力集度来描述。面力集度定义为

$$\boldsymbol{F} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{Q}}{\Delta S} = \{\overline{X} \quad \overline{Y} \quad \overline{Z}\} \tag{1-1}$$

其中 ΔS 为那点的面积元素,$\Delta \boldsymbol{Q}$ 为作用在该面积元素上的面力的合力。$\overline{X}$、$\overline{Y}$、$\overline{Z}$ 为面力集度 $\boldsymbol{F}$ 的 x、y 和 z 向分量,它们以沿坐标轴正向为正。面力集度为那点单位面积上所受到的力。

体力:分布在物体体积内的力称为体力。重力、惯性力都是体力。作用在物体体积内任一点处的体力,可用那点的体力集度来描述。体力集度定义为

$$\boldsymbol{F} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{Q}}{\Delta V} = \{X \quad Y \quad Z\} \tag{1-2}$$

其中 ΔV 为那点的体积元素,$\Delta \boldsymbol{Q}$ 为作用在该体积元素上的体力的合力。X、Y、Z 为体力集度 $\boldsymbol{F}$ 的 x、y 和 z 向分量,它们也是以沿坐标轴正向为正。体力集度为那点单位体积所受到的力。

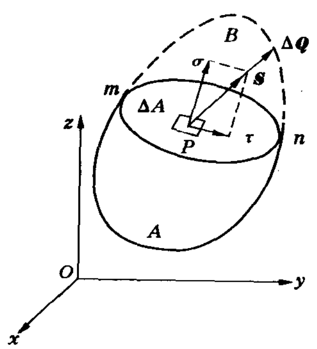

图 1-1

(2)内力。物体本身不同部分之间的作用力称为内力。内力可通过截面法进行形象显示,如图1-1所示。对于物体内任一点 P,可作截面 mn,将物体分为 A、B 两部分,A 与 B 之间的相互作用力就是内力。B 对 A 的 P 点作用的内力,可用那点的内力集度来描述,它定义为

$$\boldsymbol{S} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{Q}}{\Delta A} = \{\sigma \quad \tau\} \tag{1-3}$$

其中 ΔA 为 P 点的面积元素,$\Delta \boldsymbol{Q}$ 为作用在该面积元素上的分布力的合力。

内力集度又称为应力。应力通常沿截面法线方向和

切线方向分解,记为 σ 和 τ。σ 称为正应力分量,τ 称为剪应力分量。说到内力集度或应力需要指出体内哪一点和沿哪个截面。

(3)位移。物体各点发生的位置移动,可用位移来描述。位移为矢量。任一点的位移可用其在坐标轴 x、y、z 方向的分量 u、v、w 来表示,它们以沿坐标轴的正向为正。

(4)直角坐标系中的微分体各面应力分量的记号。直角坐标系中的微分体:对于弹性体内任一点,可用直角坐标面切割出一微小正平行六面体,如图 1-2 所示,它为直角坐标系中的微分体。微分体共有六个面。为叙述方便,外法线方向与坐标轴正向相同的面称为正面,否则称为负面。

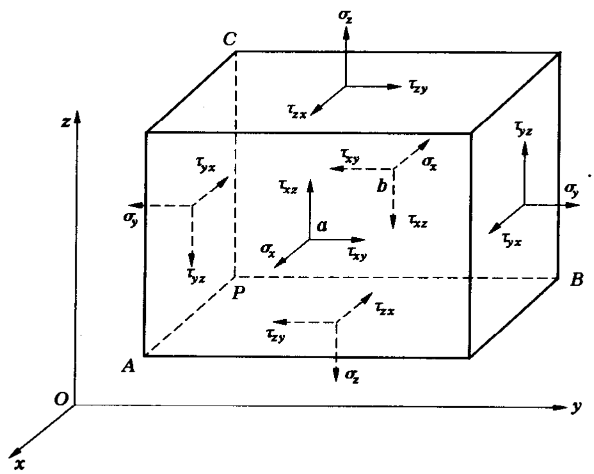

图 1-2

微分体各面应力分量的记号:微分体各面都有应力,由于微分体很小,任一面上各点的应力可以认为相等。习惯上用作用在该面形心处的应力代表该面各点的应力。各面应力可沿坐标轴方向进行分解,得到一个正应力分量和两个剪应力分量。规定:正面上的应力分量以沿坐标轴正向为正;负面上的应力分量以沿坐标轴负向为正。平行于坐标轴 x、y、z 的正应力分别记为 σ_x、σ_y、σ_z,剪应力下标的第一个字母表示该应力的作用面的法线与那个坐标轴平行,第二个字母表示该应力与那个坐标轴平行。对应面上应力相等只有在微分体尺寸趋于零时才成立。由微分体上应力分量对两对应面中点连线的力矩平衡条件,可得

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz} \tag{1-4}$$

这正是剪应力互等定律。

(5)应变分量和它的记号。对于弹性体中任一点,可沿坐标轴方向取三个微分线段:$PA = \mathrm{d}x$、$PB = \mathrm{d}y$、$PC = \mathrm{d}z$,如图 1-2 所示。x、y 和 z 方向的三个微分线段的单位长度改变量,称为 x、y 和 z 向的正应变,记为 ε_x、ε_y 和 ε_z,它们以线段伸长为正。一点任二方向上微分线段之间夹角的改变,称为该二方向的剪应变,记为 γ,并以角度变小时为正。γ_{xy}代表 x、y 向微分线段之间夹角的改变,余类推。显然

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \gamma_{yz} = \gamma_{zy}, \gamma_{zx} = \gamma_{xz}$$

应变是无量纲量。

可以证明：当已知一点的六个应力分量时，过该点任一截面上的应力都可以求出，即六个应力分量确定了一点的应力状态；当已知一点的六个应变分量时，过该点的任一方向的正应变和过该点任二方向的剪应变也都可求出，即六个应变分量确定了一点的应变状态。

第二章　平面问题的基本理论

由于平面问题比空间问题简单得多，且实际存在平面问题或近似平面问题，故先讨论平面问题。

§2-1　平面应力问题与平面应变问题

一、平面应力问题

若弹性体在外力作用下，应力分量满足

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0 \tag{2-1}$$

$$\sigma_x = \sigma_x(x,y), \sigma_y = \sigma_y(x,y), \tau_{xy} = \tau_{xy}(x,y) \tag{2-2}$$

则称该弹性力学问题为平面应力问题。

对等厚薄板，当外力平行于板面且不沿厚度方向变化时，如图2-1所示，由于板前后面上应力分量 $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$，应力分量沿板厚又连续变化，故可认为板内任一点都有 $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$。这相当于认为板厚之间无相互作用，因而 σ_x、σ_y、τ_{xy} 仅是 x、y 的函数，与 z 无关。于是，这类问题可近似为平面应力问题。

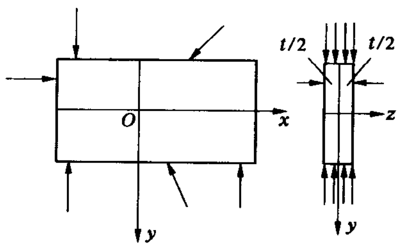

图 2-1

根据平面应力问题的特点可知，其位移分量为

$$u = u(x,y), v = v(x,y), w = w(x,y,z) \tag{2-3}$$

其应变分量为

$$\gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0, \varepsilon_z = \varepsilon_z(x,y) \tag{2-4}$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x(x,y), \varepsilon_y = \varepsilon_y(x,y), \gamma_{xy} = \gamma_{xy}(x,y) \tag{2-5}$$

二、平面应变问题

若弹性体在外力作用下，位移分量满足

$$u = u(x,y), v = v(x,y), w = 0 \tag{2-6}$$

则称该弹性力学问题为平面应变问题。

对柱形体而言，当两端截面被限制在两个固定的光滑刚性平面之间或为无限长时，外力平行于柱的横截面且不沿长度方向变化时，任一截面都没有轴向位移，即 $w=0$，u、v 只是 x、y 的函数，因而属于平面应变问题。

根据平面应变问题的特点可知，其应变分量为

$$\varepsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0 \tag{2-7}$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x(x,y), \varepsilon_y = \varepsilon_y(x,y), \gamma_{xy} = \gamma_{xy}(x,y) \tag{2-8}$$

其应力分量为

$$\tau_{zx}=\tau_{zy}=0,\sigma_z=\sigma_z(x,y) \tag{2-9}$$

$$\sigma_x=\sigma_x(x,y),\sigma_y=\sigma_y(x,y),\tau_{xy}=\tau_{xy}(x,y) \tag{2-10}$$

平面应力问题和平面应变问题都称为平面问题。

§2－2　平面问题平衡状态的描述

在弹性力学中,对弹性体平衡状态的描述是通过两个方面实现的。一是弹性体内任一点都应处于平衡,二是弹性体边界上任一点都应处于平衡。

一、体内点的平衡——平衡微分方程

对于平面问题,在弹性体内任一点取一微分体,它在 x、y 向的尺寸为 $\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$,为方便起见,z 向尺寸取为单位长度,如图 2-2 所示。

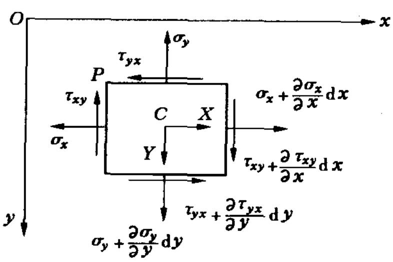

图 2-2

由于微分体很小,可认为各面应力均匀分布,也可以认为微分体内体力是均匀分布。设 P 点的坐标为(x,y),x、y 面上的应力分量记为 σ_x、σ_y、τ_{xy}、τ_{yx},则 $x+\mathrm{d}x$、$y+\mathrm{d}y$ 面上的应力分量,由于坐标 x、y 的变化而有近似的微小增量 $\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x$、$\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}\mathrm{d}y$、$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}\mathrm{d}x$、$\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}y$。

由 x 向平衡,得

$$\left(\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\times1-\sigma_x\mathrm{d}y\times1+\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\times1-\tau_{yx}\mathrm{d}y\times1+X\mathrm{d}x\mathrm{d}y\times1=0$$

整理后,得

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+X=0$$

同理,可得 y 向平衡微分方程。将二者写在一起

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+X=0\\[2ex]\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\dfrac{\partial\sigma_y}{\partial y}+Y=0\end{cases} \tag{2-11}$$

由对过形心 C 并与 z 轴平行的直线的力矩平衡,可得

$$\tau_{xy}=\tau_{yx} \tag{2-12}$$

这又一次证明了剪应力的互等性。

式(2-11)称为平面问题的平衡微分方程。平衡微分方程描述了弹性体内点的平衡,它把弹性体内点的应力分量与体力分量联系起来。它适用于两类平面问题。

需要注意的是,在推导平衡微分方程时,采用的是弹性体变形前的尺寸,而没有采用平衡状态下的、变形以后的尺寸,在以后的平衡分析中,不再加以说明。

二、边界点的平衡——应力边界条件

在任一边界点取一微分体，一般情况下得到的是三角板，厚度仍取为1，如图2-3所示。记边界点的法线方向数为

$$l=\cos\alpha, m=\sin\alpha=\cos\beta$$

斜边的边长为ds，面力集度的 x、y 向分量为 $\overline{X}$、$\overline{Y}$，则由 x 向平衡，得

$$\overline{X}\mathrm{d}s+\frac{1}{2}Xml\mathrm{d}s\mathrm{d}s-\tau_{yx}m\mathrm{d}s-\sigma_x l\mathrm{d}s=0$$

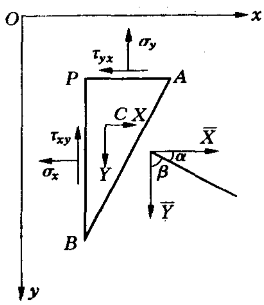

图 2-3

即

$$\sigma_x l+\tau_{yx}m=\overline{X}+\frac{1}{2}Xml\mathrm{d}s$$

令 ds→0，即 P 点趋近于边界点，则有

$$(\sigma_x)_s l+(\tau_{yx})_s m=\overline{X}$$

同理，由 y 向平衡条件，可得类似式子。将二者写在一起，为

$$\begin{cases}(\sigma_x)_s l+(\tau_{yx})_s m=\overline{X}\\(\tau_{xy})_s l+(\sigma_y)_s m=\overline{Y}\end{cases}\tag{2-13}$$

由对形心 C 的转动平衡，得

$$(\tau_{xy})_s=(\tau_{yx})_s$$

式(2-13)称为平面问题的应力边界条件。它描述了边界点的平衡，并把边界点的应力分量和面力分量联系起来。应力边界条件式(2-13)适用于两类平面问题。

当边界垂直于某一坐标轴时，可直接利用边界点的平衡写出其应力边界条件。图2-4所示悬臂梁上、右、下边的应力边界条件为

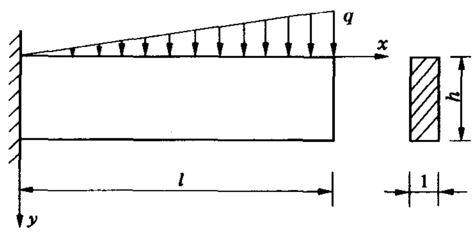

图 2-4

$$(\sigma_y)_{y=0}=-\frac{q}{l}x,(\tau_{yx})_{y=0}=0$$

$$(\sigma_x)_{x=l}=0,(\tau_{xy})_{x=l}=0$$

$$(\sigma_y)_{y=h}=0,(\tau_{yx})_{y=h}=0$$

注意：平行于 x 轴的边界上的应力边界条件式中不出现 σ_x；平行于 y 轴的边界上的应力边界条件式中不出现 σ_y。这是因为，利用边界点的平衡无法确定它们。

由平衡微分方程和应力边界条件知，弹性体内任一点都是静不定的，边界点在通常情况下也是静不定的。因此，要求解应力分量，还需要增加适当的方程。

§2-3　平面问题形变相容状态的描述

弹性体受力发生形变时，为了保证材料的连续性，体内点的位移应为坐标的单值连续函数，边界点的位移应符合已知的位移约束条件。当位移满足这两条时，称为形变协调或相容。

一、体内形变相容——几何方程、相容方程

在体内位移为坐标的单值连续函数，且具有所需的各阶导数时，可以推得任一点应变分量和位移分量的关系——几何方程。

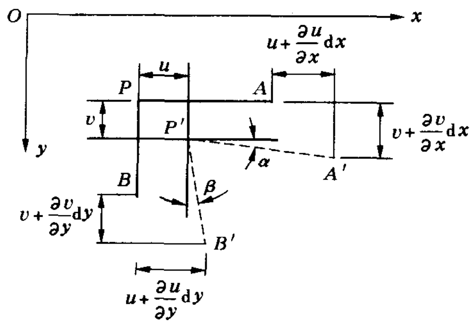

图 2-5

如图 2-5 所示，设变形前的点 P、A、B，在变形后分别移到 P'、A'、B'。记 P 点的位移为 u、v，在位移很小时，A 点的位移可近似表示为 $u+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x$、$v+\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x$，$B$ 点的位移可近似表示为 $u+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y$、$v+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y$。

由应变定义，有 $\varepsilon_x=\frac{P'A'-PA}{PA}$，$\varepsilon_y=\frac{P'B'-PB}{PB}$，$\gamma_{xy}=\alpha+\beta$。

因位移很小，故可用 $P'A'$、$P'B'$ 在 x、y 向的投影长度近似代替 $P'A'$、$P'B'$。于是

$$\varepsilon_x=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial u}{\partial x},\varepsilon_y=\frac{\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y}=\frac{\partial v}{\partial y}$$

由于应变很小，α、β 可近似取为 $\tan\alpha$、$\tan\beta$，从而

$$\gamma_{xy}=\tan\alpha+\tan\beta=\frac{\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x}+\frac{\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y}$$

$$=\frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1+\varepsilon_x}+\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{1+\varepsilon_y}$$

又 ε_x、ε_y 远小于 1，故

$$\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}$$

综合以上三式，就得平面问题的几何方程

$$\left\{\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{\partial u}{\partial x}\\ \varepsilon_y&=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \gamma_{xy}&=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}\right.\tag{2-14}$$

几何方程式(2-14)适用于平面问题的两种类型。

当位移单值连续时，几何方程成立。但由几何方程可以看出，不是任意一组应变分量都能保证通过积分求得单值连续位移的。事实上，由几何方程知，三个应变分量必须满足

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}\tag{2-15}$$

式(2-15)称为以应变分量表示的相容方程。可以证明:对单连体,当应变分量满足相容方程时,由几何方程即可求得单值连续位移。

分析几何方程,还可以发现:当已知位移分量时,由几何方程可完全确定应变分量;当已知应变分量时,则不能由几何方程完全确定位移分量。原因是:从数学上讲,积分后有待定函数;从物理意义上讲,在同样的应变情况下,弹性体可有不同的刚体位移。令 ε_x、ε_y、γ_{xy} 为零,则从几何方程求得的位移应为刚体位移。具体方法如下:

积分几何方程的前两式,有

$$u = f_1(y), v = f_2(x)$$

将其代入几何方程的第三式,得

$$\frac{\mathrm{d}f_1(y)}{\mathrm{d}y} = -\frac{\mathrm{d}f_2(x)}{\mathrm{d}x}$$

该式要在弹性体内恒成立,只有等式两边同时等于一个共同的常数,即

$$\frac{\mathrm{d}f_1(y)}{\mathrm{d}y} = \omega, \frac{\mathrm{d}f_2(x)}{\mathrm{d}x} = -\omega$$

积分,即得

$$f_1(y) = \omega y + u_0, f_2(x) = -\omega x + v_0$$

于是,刚体位移为

$$u = \omega y + u_0, v = -\omega x + v_0 \tag{2-16}$$

显然,常数 u_0、v_0 代表刚体平动位移,常数 ω 自然代表刚体转动位移。当已知应变分量,由几何方程要完全确定位移,需要三个独立的约束条件。

二、边界点形变相容——位移边界条件

边界点形变相容指的是:在给定位移的边界上,边界点的位移应等于给定的位移,即

$$u_s = \overline{u}, v_s = \overline{v} \tag{2-17}$$

式中下标 s 代表给定位移的边界,$\overline{u}$、$\overline{v}$ 为已知的位移。式(2-17)称为位移边界条件。

位移边界条件描述了边界点形变的相容性。

§2-4　平面问题的物理方程

根据物体是完全弹性的假定及虎克定律,当弹性体内一点仅有正应力分量 σ_x 且不为零时,它所产生的正应变分量为

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\sigma_x, \varepsilon_y = -\frac{\mu}{E}\sigma_x, \varepsilon_z = -\frac{\mu}{E}\sigma_x$$

其中 E 为材料的弹性模量,μ 为材料的泊松比。

当弹性体内一点仅有剪应力分量 τ_{xy} 且不为零时,它所产生的剪应变分量为

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$

其中 G 为材料的剪切模量。G 与 E、μ 的关系为

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

在一般情况下,当弹性体一点六个应力分量都不为零时,由叠加原理可得

$$\begin{cases}\varepsilon_x = \dfrac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z = \dfrac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \\ \gamma_{xy} = \dfrac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} \\ \gamma_{yz} = \dfrac{2(1+\mu)}{E}\tau_{yz} \\ \gamma_{zx} = \dfrac{2(1+\mu)}{E}\tau_{zx}\end{cases} \tag{2-18}$$

式(2-18)称为直角坐标系中的物理方程。

对于平面应力问题,因为

$$\sigma_z = 0, \tau_{zx} = 0, \tau_{zy} = 0, \gamma_{zx} = 0, \gamma_{zy} = 0$$

式(2-18)简化为

$$\begin{cases}\varepsilon_x = \dfrac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} = \dfrac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}\end{cases} \tag{2-19}$$

及

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \tag{2-20}$$

式(2-19)称为平面应力问题的物理方程。当 σ_x、σ_y 求得后,可由式(2-20)求 ε_z。

对于平面应变问题,因为

$$\tau_{zx} = 0, \tau_{zy} = 0, \varepsilon_z = 0, \gamma_{zx} = 0, \gamma_{zy} = 0$$

式(2-18)简化为

$$\begin{cases}\varepsilon_x = \dfrac{1-\mu^2}{E}(\sigma_x - \dfrac{\mu}{1-\mu}\sigma_y) \\ \varepsilon_y = \dfrac{1-\mu^2}{E}(\sigma_y - \dfrac{\mu}{1-\mu}\sigma_x) \\ \gamma_{xy} = \dfrac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}\end{cases} \tag{2-21}$$

及

$$\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y) \tag{2-22}$$

式(2-21)称为平面应变问题的物理方程。当 σ_x、σ_y 求得后,可由式(2-22)求 σ_z。

比较式(2-19)和式(2-21),将平面应力问题的物理方程中 E 换为 $\frac{E}{1-\mu^2}$,μ 换为 $\frac{\mu}{1-\mu}$