



普通高等教育“十五”国家级规划教材

结构力学

(下册)

朱慈勉 主编



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育“十五”国家级规划教材

结 构 力 学

(下 册)

朱慈勉 主编

高等教育出版社

内容提要

本书属普通高等教育“十五”国家级规划教材,是按照教育部力学课程教学指导委员会拟定的《结构力学课程教学基本要求》编写的,旨在适应当代工程概念分析及概念设计的理念和需要。本书的特点是:以结构力学的基本概念、基本原理及其科学运用为主线;以认知规律为出发点;以工程实践为背景;以素质与能力的提高为目标。本书是同济大学有关教师在长期从事结构力学教学和科研以及工程实践的基础上写成的,体现了作者有关“概念结构力学”的基本思想。

全书分上、下两册。上册共7章,主要包括静定结构部分、力法和位移法。下册共5章,主要包括矩阵位移法、超静定结构的实用计算方法与概念分析、结构动力学、结构的稳定性和极限荷载,并附有平面刚架静力分析的源程序及说明。

本书概念清晰、内容简明、深入浅出和联系实际。在介绍解题方法的同时更注重“就事论道”和“由技入道”,力求使读者深刻领会客观规律并掌握事物的本质。另外,研制了CAI教学软件光盘,通过动画生动地展现教学内容并积极引发课堂讨论,可供教师方便地实现多媒体教学。

本书可作为高等学校土木、交通、水利、机械和力学等各专业的结构力学教材,也可作为相关专业工程技术人员等的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

结构力学(下册)/朱慈勉主编. —北京:高等教育出版社, 2004.1

ISBN 7-04-013080-7

I. 结... II. 朱... III. 结构力学—高等学校—教材 IV. O342

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 105277 号

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100011
总 机 010-82028899

购书热线 010-64054588
免费咨询 800-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>

经 销 新华书店北京发行所
印 刷 高等教育出版社印刷厂

开 本 787×1092 1/16
印 张 17.75
字 数 430 000
插 页 1

版 次 2004 年 1 月第 1 版
印 次 2004 年 1 月第 1 次印刷
定 价 21.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

主要符号表

A	面积、振幅(多自由度)
$\mathbf{A}$	位移幅值向量、主振型向量、主振型矩阵
a	振幅(单自由度)
$\mathbf{B}$	应变矩阵
c	支座广义位移、粘滞阻尼系数
C	弯矩传递系数
$\mathbf{C}$	阻尼矩阵
c_{cr}	临界阻尼系数
d	结间距离
E	弹性模量
E_p	势能
f	矢高、工程频率
F	简谐荷载幅值
F_p	集中荷载
$\mathbf{F}$	结点荷载向量
F_H	水平推力
F_x, F_y	水平(x)、垂直(y)方向的分力
F_N	轴力
F_Q	剪力
F_Q^L, F_Q^R	截面左、右的剪力
F_Q^F	固端剪力
F_{Pe}	欧拉临界荷载
F_{Pcr}	临界荷载
F_{Pu}	极限荷载
F_p^+	可破坏荷载
F_p^-	可接受荷载
F_s	弹性力
F_i	惯性力
F_D	阻尼力
F_R	广义反力、反力合力
$\bar{\mathbf{F}}^e$	局部坐标系下单元杆端力向量

F^e	整体坐标系下单元杆端力向量
G	切变模量
i	弯曲线刚度
I	截面惯性矩
$\mathbf{I}$	单位矩阵
k	刚度系数、切应力分布不均匀系数
k_θ	弹簧的转动刚度系数
$\bar{k}^e$	局部坐标系下单元刚度矩阵
k^e	整体坐标系下单元刚度矩阵
$\mathbf{K}$	结构刚度矩阵
m	质量
$\mathbf{m}$	单元质量矩阵
$\bar{m}$	单位杆长的质量
M	力矩、力偶矩、弯矩
$\mathbf{M}$	结构质量矩阵
M^L, M^R	截面左、右的弯矩
M^F	固端弯矩
M_u	极限弯矩
M_s	弹性极限弯矩
N	形函数矩阵
q	均布荷载集度
R	半径
r	半径、反力影响系数
S	转动刚度、影响线量值
t	时间
T	周期、动能
$\mathbf{T}$	坐标转换矩阵
U	应变能
u	x 方向位移
v	y 方向位移、挠度、速度
W	功、计算自由度、重量、弯曲截面系数
W_u	截面塑性抵抗矩
w	单元位移向量
X	广义多余约束力、广义多余未知力
Y	振型函数
y	位移
Z	广义未知位移
$\mathbf{Z}$	广义未知位移向量

α	线膨胀系数、初相角
β	弦转角、动力系数
γ	剪力分配系数
γ_0	平均切应变
Δ	广义未知位移
Δ	位移向量
$\overline{\Delta'}$	局部坐标系下单元杆端位移向量
Δ'	整体坐标系下单元杆端位移向量
δ	柔度系数、位移影响系数
δ	柔度矩阵
ε	线应变
ε_s	屈服应变
μ	弯矩分配系数
κ	曲率
φ	转角
θ	截面转角、干扰力频率
ξ	阻尼比
ρ	材料密度
σ_b	强度极限
σ_s	屈服应力
σ_u	极限应力
ω	自振频率(圆频率)

目 录

主要符号表	(I)	§ 10-10 近似法求自振频率	(137)
第8章 矩阵位移法	(1)	§ 10-11 有限单元法求自振频率 ..	(142)
§ 8-1 概述	(1)	习题	(150)
§ 8-2 矩阵位移法的基本原理	(1)	第11章 结构的弹性稳定	(157)
§ 8-3 单元刚度矩阵	(4)	§ 11-1 概述	(157)
§ 8-4 直接刚度法	(12)	§ 11-2 有限自由度体系的稳定	(160)
§ 8-5 直接刚度法的另一种形 式——先处理法	(24)	§ 11-3 用静力法确定弹性压杆 的临界荷载	(165)
§ 8-6 等效结点荷载	(32)	§ 11-4 用能量法确定弹性压杆 的临界荷载	(171)
习题	(36)	§ 11-5 组合压杆的稳定	(177)
第9章 超静定结构的实用计算方法 与概念分析	(38)	§ 11-6 刚架的稳定	(183)
§ 9-1 概述	(38)	§ 11-7 拱和窄梁的稳定	(192)
§ 9-2 弯矩分配法	(39)	习题	(197)
§ 9-3 剪力分配法	(49)	第12章 结构的塑性分析和极限 荷载	(201)
§ 9-4 超静定结构受力状态的概 念分析	(55)	§ 12-1 概述	(201)
§ 9-5 超静定结构的影响线及其 应用	(62)	§ 12-2 纯弯曲梁的极限弯矩和 塑性铰	(203)
习题	(69)	§ 12-3 梁的极限荷载	(207)
第10章 结构动力学	(74)	§ 12-4 比例加载时判定极限荷 载的一般定理	(213)
§ 10-1 概述	(74)	§ 12-5 平面刚架的极限荷载	(216)
§ 10-2 体系振动的自由度	(75)	习题	(226)
§ 10-3 单自由度体系运动方程 的建立	(79)	附录 A 平面刚架静力分析程序及其 应用	(229)
§ 10-4 单自由度体系的自由振动 ..	(83)	附录 B 习题答案	(263)
§ 10-5 单自由度体系的强迫振动 ..	(90)	附录 C 索引	(269)
§ 10-6 多自由度体系的自由振动 ..	(104)	主要参考文献	(273)
§ 10-7 主振型的正交性	(123)	Synopsis	(274)
§ 10-8 多自由度体系的强迫 振动	(125)	Contents	(275)
§ 10-9 无限自由度体系的自由 振动	(135)	主编简介	

第8章 矩阵位移法

§8-1 概 述

随着经济建设的发展和科学技术进步,工程实践中所提出的结构分析问题愈来愈向大型化和复杂化的方向发展,这就使得传统的结构力学分析方法与手段难以相适应,而其中主要的障碍是令人生畏的庞大的计算工作量。于是,高效率的计算工具的使用就成为解决上述问题的关键。在另一方面,电子计算机技术在近几十年来取得了突飞猛进的发展,它为结构分析方法与手段取得根本性的进步创造了条件。

在用力法或位移法分析结构时,一个力学问题最终演化为一组线性代数方程的求解问题。这样,在利用电子计算机进行结构分析时,就需要有一个统一的途径和步骤,让计算机自动建立起这样的方程组。这一过程可以这样来实现,首先可将结构离散为各个单元,建立单元受力性态的控制方程,然后再将各单元按在结构中的实际状况组装成原结构,得到关于结构受力性态的一组控制方程。求解这一方程组就可以得到关键未知量,并进而完成结构受力分析的全部工作。上述分析和运算过程可以用矩阵的形式既简洁而又非常规格化地表达,这就是结构的矩阵分析方法。有了这样一种高度统一和规格化的分析方法,就可以编制出相应的对于一类问题具有普遍适用性的计算机程序,从而达到由计算机来完成结构受力分析的目的。由此可见,结构的矩阵分析方法是利用计算机进行结构受力分析的桥梁。

结构的矩阵分析方法需要建立在一定的力学理论基础之上。这就提出了选择何种理论基础的问题。当用力法分析超静定结构时,对于同一个结构可以采用不同形式的基本结构,这样就容易使分析过程与基本结构的选取联系在一起;而用位移法分析时,对应一定的结构,基本结构的形式是相同的。另外,位移法对于超静定结构和静定结构实际上是同样适用的,求解过程也是完全一致的。由此可见,位移法的分析过程比力法更容易规格化,也就更适宜于利用电子计算机来实现其分析过程。因此,矩阵位移法就成为最为重要的一种结构矩阵分析方法。这一方法无论对于杆件结构还是连续体结构的受力分析,都具有最为广泛的应用价值。

§8-2 矩阵位移法的基本原理

矩阵位移法是以位移法作为基础的结构矩阵分析方法,或者说,它是以矩阵形式表达的位移法分析过程。在矩阵位移法中也是以结构的结点位移作为基本未知量。这样,杆端的变形协调条件在设取基本未知量时已经满足。与位移法稍有不同的是,在采用矩阵位移法利用计算机进行结构分析时,一般都计及刚架杆件轴向变形的影响,而且将构成刚架的所有杆件,包括静定杆件在内,均归结为两端固定杆件。因此,在矩阵位移法中可以只定义一类两端固定的基本杆件。这样,就可以很容易地确定矩阵位移法基本未知量的数目,分析和计算过程也更加便于规格化。

当采用矩阵位移法进行结构分析时,为了分析的方便,首先需对结点和杆件进行编号。例如,在分析图 8-1a 所示的平面桁架时,可以如图 8-1b 那样对该桁架的每一个结点和杆件进行编号。对于图 8-2a 所示的平面刚架的结点和杆件编号可以如图 8-2b 所示。结点和杆件的编号顺序原则上是任意的,对于同一个结构可以有不同的编号方法。在矩阵位移法中,将每一个编号的杆件称为一个单元,并将原结构看成是由这些单元按照实际的联结条件组装而成的。这一过程常被称作为结构的离散化。为了表示位移和力的方向,需为结构设定一个坐标系,这个坐标系称为结构的整体坐标系,以下简称为结构坐标系。

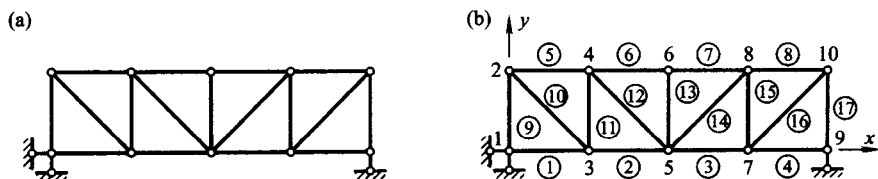


图 8-1

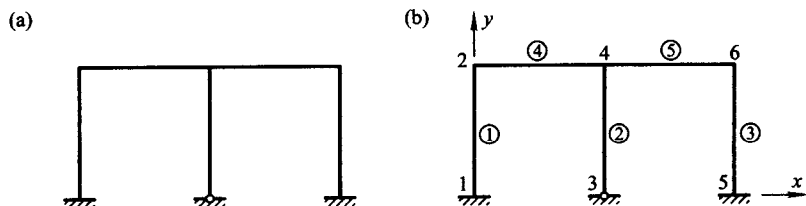


图 8-2

对于图 8-1a 所示的平面桁架,在考虑支座约束之前每个结点有两个独立的未知位移,即沿 x 、 y 方向的线位移;对于图 8-2a 所示的平面刚架,在考虑支座约束之前每个结点有三个独立的未知位移,即沿 x 、 y 方向的线位移和结点的角位移。这样的分析是考虑了刚架杆件的轴向变形。在矩阵位移法中,可以先将结构的所有结点位移都看作基本未知量。因此,如果一个平面桁架共有 n 个铰结点,则该桁架基本未知量的总数为 $2n$ 个;如果一个平面刚架共有 n 个刚结点,则该刚架基本未知量的总数为 $3n$ 个。显然,一旦所有这些结点位移的值被求解确定,就可以求得结构中各单元的内力。

在线弹性范围内,结构的位移与荷载之间具有惟一确定的关系。反映这种关系的是结构的刚度,它取决于其组成单元的刚度和结构的构成方式。在矩阵位移法中,单元和结构的刚度都采用矩阵的形式表达,分别称为单元刚度矩阵和结构刚度矩阵。单元刚度矩阵是单元的杆端力与杆端位移之间的关系矩阵。表达这种关系的数学式称为单元刚度方程。采用矩阵形式表达的单元刚度方程为

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{k}^e \Delta^e$$

式中 $\mathbf{k}^e$ 即为单元刚度矩阵,可以利用静力法或能量原理导出; Δ^e 为单元两端的结点位移向量; $\mathbf{F}^e$ 为单元两端的杆端力向量。以上上标“e”表示是对单元而言的。同样,对于一个结构,在未考

考虑支座约束前, 结点力与结点位移之间的关系可表达为

$$\mathbf{K}^0 \Delta^0 = \mathbf{F}^0$$

上式称为结构的总刚度方程。式中 $\mathbf{K}^0$ 称为总刚度矩阵; Δ^0 可称为总的结点位移向量; $\mathbf{F}^0$ 可称为总的结点力向量。以上上标“0”表示还未引入支座位移条件。应当注意的是, Δ^0 和 $\mathbf{F}^0$ 中包括了所有结点(含支座结点)的结点位移和结点力在内。对于结构的线性分析来说, 单元刚度矩阵和总刚度矩阵的元素均为常数。根据各单元刚度矩阵, 以及由单元构成结构的几何形式, 可以按一定的规则集合形成总刚度矩阵。

结构总是在一定的支座条件之下承受荷载的, 因此结构的某些结点位移实际上是已知的。例如, 图 8-2a 所示的平面刚架, 支座结点 1、3、5 的水平 and 竖向位移均为零, 结点 1、5 的角位移也为零。结构的求解只有在考虑了它的支座位移条件之后才有可能, 这样就需要将原结构的这些支座位移条件引入总刚度方程, 从而得到对应于实际结构的刚度方程:

$$\mathbf{K}\Delta = \mathbf{F}$$

上式称为结构刚度方程, 其中 $\mathbf{K}$ 称为结构刚度矩阵; Δ 中仅包括结构全部未知的结点位移; $\mathbf{F}$ 中仅包括与未知结点位移相应的各已知的结点荷载。 Δ 和 $\mathbf{F}$ 分别称为结构的结点位移向量和结点荷载向量。求解结构刚度方程便可得到所有未知的结点位移, 此后就可以通过单元刚度方程求得每一个单元的杆端力并进而求得支座反力。

由上述可见, 用矩阵位移法进行结构分析的大体步骤如下:

- (1) 结构标识。其中包括结点、单元编号和坐标系的设定。
- (2) 计算各单元刚度矩阵 $\mathbf{k}^e$ 。
- (3) 形成总刚度矩阵 $\mathbf{K}^0$ 和总刚度方程 $\mathbf{K}^0 \Delta^0 = \mathbf{F}^0$ 。
- (4) 引入位移边界条件, 形成结构刚度矩阵 $\mathbf{K}$ 和刚度方程 $\mathbf{K}\Delta = \mathbf{F}$ 。
- (5) 求解结构刚度方程, 得未知的结点位移 Δ 。
- (6) 计算各单元杆端力和支座反力。

一般来说, 单元刚度矩阵的通式是在单元为等截面直杆的条件下导得的。如果结构的某一个杆件是分段等截面的, 在用矩阵位移法分析时, 可以将该杆件的每一等截面段作为一个单元。例如, 图 8-3 的刚架柱是分段等截面的, 在结点和单元编号时每一根柱被作为两个单元。对于一般的变截面杆件或曲杆, 可以近似地把它看作是由若干个分段等截面直杆构成的。当分段数足够多时, 这种近似处理方法的计算精度可以得到保证。图 8-4 示出了对一横梁为曲杆的刚架, 单元的划分以及结点和单元的编号方法。

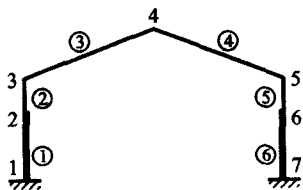


图 8-3

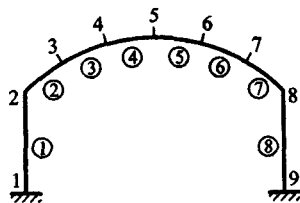


图 8-4

在采用矩阵位移法进行结构分析时, 结构刚度方程的右端为结点荷载向量。因此, 所有荷载均应化为等效结点荷载。如果仅有少数的集中荷载作用于杆件上时, 也可以将集中荷载作用点

作为一个结点来处理。这样,这些集中荷载也就成了结点荷载。例如,对于图 8-5a 所示的刚架,可以采用图 8-5b 所示的单元划分和结点、单元编号方法。

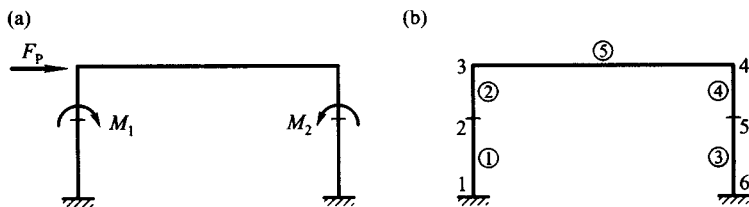


图 8-5

前面介绍了矩阵位移法的基本思路与大体步骤,其中结构的支座位移边界条件是在总刚度方程形成之后引入的,这种方法常称为矩阵位移法的后处理法。另外还有一种做法是,在形成单元刚度矩阵时就将实际的位移边界条件以及位移相关关系考虑进去,如此形成的总刚度方程也就是结构刚度方程。这种分析方法称为矩阵位移法的先处理法。

§ 8-3 单元刚度矩阵

单元刚度矩阵是反映单元两端的杆端位移与杆端力之间关系的矩阵。对于杆件单元来说,这种关系可以通过两种途径导得。一种途径是采用静力法推导,这就是本节中要介绍的方法;另一种途径是采用能量原理或虚功原理推导,将在第 10 章中介绍。

在上一节中提到,采用矩阵位移法分析结构时需设定一个结构坐标系,一般可采用右手坐标系,记为 Oxy 。此时,结点位移和结点力均取与结构坐标的方向一致为正,其中结点的角位移和结点力矩按右手法则均取逆时针方向为正。以下用 u 、 v 和 θ 分别表示结点沿结构坐标系 x 、 y 轴的线位移和沿逆时针方向的角位移,用 F_x 、 F_y 和 M 分别表示沿上述方向的结点力。若仅有一个单元,结点力也就是单元的杆端力;对于一个由若干单元组成的结构,根据结点的平衡条件可知,结点力应等于与该结点相联结的各单元杆端力之和。

为了单元刚度矩阵推导的方便,可给每个单元设定一个单元的局部坐标系(单元坐标系) $i\bar{x}\bar{y}$ 。局部坐标系也采用右手系,原点设在单元的一个端点,并且使它的 $\bar{x}$ 轴与杆件的轴线重合。局部坐标系相对于结构坐标系的方位角用 α 表示,如图 8-6 所示。 α 角定义为由结构坐标系的 x 轴沿逆时针方向转至局部坐标系的 $\bar{x}$ 轴方向所转过的角度。为了便于区分,将字母上加一短划表示关于局部坐标系的量。局部坐标系中的杆端位移和杆端力分别用 $\bar{u}$ 、 $\bar{v}$ 、 $\bar{\theta}$ 和 $\bar{F}_x$ 、 $\bar{F}_y$ 、 $\bar{M}$ 表示,它们均以与该单元的局部坐标方向一致为正。这样, $\bar{u}$ 、 $\bar{v}$ 和 $\bar{\theta}$ 即表示杆端沿单元轴向、横向的位移和转角; $\bar{F}_x$ 、 $\bar{F}_y$ 和 $\bar{M}$ 也就是单元杆端的轴力、剪力和弯矩。在学习矩阵位移法时应特别注意有关物理量的正负号规定,尤其是它们与在位移法中相应物理量正负号规定的差异。

在进行单元分析时,首先是建立局部坐标系中单元的杆端位移与杆端力之间的关系,即局部坐标系中的单元刚度矩阵。然后,再通过坐标转换得到结构坐标系中单元的杆端位移与杆端力之间的关系,即结构坐标系中的单元刚度矩阵。

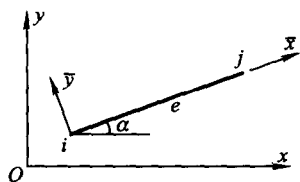


图 8-6

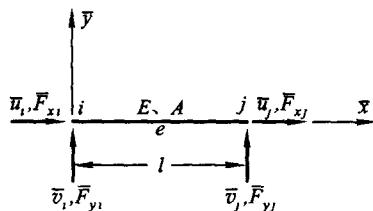


图 8-7

8-3-1 桁架单元的刚度矩阵

设有一任意的桁架单元如图 8-7 所示。 i, j 为单元的两端结点, $\bar{x}, \bar{y}$ 为该单元的局部坐标, 其原点设在单元的 i 端。桁架单元的每一个结点可以有 $\bar{x}, \bar{y}$ 方向两个独立的线位移, 它们的正方向按前规定, 如图 8-7 所示。图中也示出了与之相应的杆端力的正方向。

局部坐标系中单元的杆端位移和杆端力可用向量的形式分别表示为

$$\bar{\Delta}^e = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_i \\ \bar{\Delta}_j \end{Bmatrix}^e = \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \end{Bmatrix}^e \quad \bar{\mathbf{F}}^e = \begin{Bmatrix} \bar{F}_i \\ \bar{F}_j \end{Bmatrix}^e = \begin{Bmatrix} \bar{F}_{xi} \\ \bar{F}_{yi} \\ \bar{F}_{xj} \\ \bar{F}_{yj} \end{Bmatrix}^e \quad (8-1)$$

$$(8-2)$$

分别称为局部坐标系中桁架单元的杆端位移向量和杆端力向量。其中, 有关 i 结点和 j 结点的量可用虚线分割以醒目。

按照材料力学的有关公式, $\bar{\mathbf{F}}^e$ 与 $\bar{\Delta}^e$ 之间的关系为

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_{xi}^e &= \frac{EA}{l} (\bar{u}_i^e - \bar{u}_j^e) \\ \bar{F}_{yi}^e &= 0 \\ \bar{F}_{xj}^e &= \frac{EA}{l} (\bar{u}_j^e - \bar{u}_i^e) \\ \bar{F}_{yj}^e &= 0 \end{aligned} \right\}$$

式中 E 为材料的弹性模量, A, l 分别为杆件的横截面面积和长度。以上第二、四两式的右端为零, 这是因为在小位移线性分析的前提下, 结点沿 $\bar{x}, \bar{y}$ 方向的位移均不会使杆端产生 $\bar{y}$ 方向的反力。若将上式写成矩阵的形式, 则有

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_{xi} \\ \bar{F}_{yi} \\ \bar{F}_{xj} \\ \bar{F}_{yj} \end{Bmatrix}^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \end{Bmatrix}^e \quad (8-3a)$$

或写成

$$\begin{Bmatrix} \overline{F}_{xi} \\ \overline{F}_{yj} \end{Bmatrix}^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix}^e \begin{Bmatrix} \overline{u}_i \\ \overline{u}_j \end{Bmatrix}^e \quad (8-3b)$$

式(8-3)称为桁架单元在局部坐标系下的单元刚度方程。这一方程可以简洁地表达为

$$\overline{\mathbf{F}}^e = \overline{\mathbf{k}}^e \overline{\mathbf{\Delta}}^e \quad (8-4)$$

其中

$$\overline{\mathbf{k}}^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^e \quad (8-5)$$

即为局部坐标系中桁架单元的刚度矩阵。

对于整个结构来说,各个单元的局部坐标系的方向一般不会都相同。为了建立结点的平衡方程,杆端力和杆端位移必须有一个统一的正方向,即结构坐标系的正方向。这样就需要将局部坐标系中的杆端力、杆端位移和单元刚度矩阵,转换为结构坐标系中的杆端力、杆端位移和单元刚度矩阵。

首先讨论两种坐标系中杆端力之间的变换关系。结构坐标系中单元的杆端力和杆端位移可分别表示为

$$\mathbf{\Delta}^e = \begin{Bmatrix} \Delta_i \\ \Delta_j \end{Bmatrix}^e = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix}^e, \quad \mathbf{F}^e = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix}^e = \begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \end{Bmatrix}^e \quad (8-6),$$

$$(8-7)$$

图8-8分别示出了局部坐标系和结构坐标系中桁架单元的杆端力。根据力的投影关系,有

$$\left. \begin{aligned} \overline{F}_{xi}^e &= F_{xi}^e \cos \alpha + F_{yi}^e \sin \alpha \\ \overline{F}_{yj}^e &= -F_{xi}^e \sin \alpha + F_{yj}^e \cos \alpha \\ \overline{F}_{xj}^e &= F_{xj}^e \cos \alpha + F_{yj}^e \sin \alpha \\ \overline{F}_{yi}^e &= -F_{xj}^e \sin \alpha + F_{yi}^e \cos \alpha \end{aligned} \right\}$$

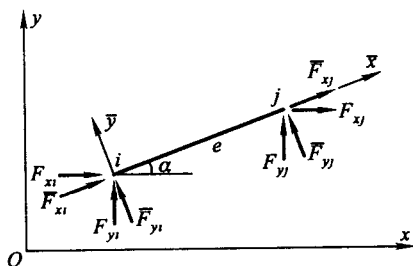


图 8-8

将上式写成矩阵形式,则有

$$\begin{pmatrix} \bar{F}_x \\ \bar{F}_y \\ \bar{F}_{xy} \end{pmatrix}^e = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_{xy} \end{pmatrix}^e \quad (8-8)$$

或简写成

$$\bar{\mathbf{F}}^e = \mathbf{T} \mathbf{F}^e \quad (8-9)$$

式中

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (8-10)$$

称为桁架单元的坐标转换矩阵。由式(8-10)可知,坐标转换矩阵 $\mathbf{T}$ 是一个正交矩阵,其矩阵元素取决于单元的方位角 α 。

显然,局部坐标系和结构坐标系中杆端力之间的这种变换关系,应同样适用于杆端位移之间的变换,即有

$$\bar{\Delta}^e = \mathbf{T} \Delta^e \quad (8-11)$$

将式(8-9)和(8-11)代入式(8-4),有

$$\mathbf{T} \mathbf{F}^e = \bar{\mathbf{k}}^e \mathbf{T} \Delta^e$$

将等式的两边同时左乘 $\mathbf{T}^{-1}$ 后得

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{T}^{-1} \bar{\mathbf{k}}^e \mathbf{T} \Delta^e$$

由于坐标转换矩阵 $\mathbf{T}$ 是一个正交矩阵,由线性代数可知,它的逆矩阵就等于它的转置矩阵,即 $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T$,故上式可以写成如下形式:

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{k}}^e \mathbf{T} \Delta^e \quad (8-12)$$

记

$$\mathbf{k}^e = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{k}}^e \mathbf{T} \quad (8-13)$$

则得

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{k}^e \Delta^e \quad (8-14)$$

式(8-14)称为结构坐标系下的单元刚度方程。式中 $\mathbf{k}^e$ 即为结构坐标系的单元刚度矩阵,它确定了结构坐标系中单元杆端力与杆端位移之间的关系。将式(8-5)和(8-10)代入式(8-13),并记 $c = \cos \alpha$, $s = \sin \alpha$, 则得

$$\mathbf{k}^e = \frac{EA}{l} \begin{pmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{pmatrix}^e \quad (8-15)$$

式(8-15)即为结构坐标系中桁架单元刚度矩阵的一般表达形式。

8-3-2 刚架单元的刚度矩阵

对于一个平面刚架单元来说,每一个杆端结点具有三个独立的位移,即沿坐标轴方向的两个线位移和一个角位移。相应地有三个杆端力与之对应。在局部坐标系中,单元杆端位移和杆端力可用向量形式分别表示为

$$\bar{\Delta}^e = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_i \\ \bar{\Delta}_j \end{Bmatrix}^e = \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \bar{\theta}_j \end{Bmatrix}^e, \quad \bar{\mathbf{F}}^e = \begin{Bmatrix} \bar{F}_i \\ \bar{F}_j \end{Bmatrix}^e = \begin{Bmatrix} \bar{F}_{xi} \\ \bar{F}_{yi} \\ \bar{M}_i \\ \bar{F}_{xj} \\ \bar{F}_{yj} \\ \bar{M}_j \end{Bmatrix}^e \quad (8-16),$$

$$(8-17)$$

在结构力学的位移法中,已经推导了梁式杆件的转角位移方程。当不存在结间荷载时,转角位移方程实际上就成了反映杆端力与杆端位移之间关系的一组方程。此时,对于任一两端固定梁 AB 有

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= 4i\theta_A + 2i\theta_B - 6i\frac{\Delta}{l} \\ M_{BA} &= 2i\theta_A + 4i\theta_B - 6i\frac{\Delta}{l} \\ F_{QAB} &= -\frac{6i}{l}\theta_A - \frac{6i}{l}\theta_B + \frac{12i}{l^2}\Delta \\ F_{QBA} &= -\frac{6i}{l}\theta_A - \frac{6i}{l}\theta_B + \frac{12i}{l^2}\Delta \end{aligned} \right\}$$

式中 $i = \frac{EI}{l}$ 称为杆件的弯曲线刚度, I 为杆件横截面的惯性矩; Δ 为杆件两端的横向相对线位移。从实质上讲,上式就是梁式单元的刚度方程。按照原位移法中的正向规定,上式中杆端弯矩 M_{AB} 、 M_{BA} 和转角 θ_A 、 θ_B 是以顺时针方向为正,相对线位移 Δ 和杆端剪力 F_{QAB} 和 F_{QBA} 的方向取为使杆件发生顺时针转动为正。

在将上述杆端力与杆端位移之间的关系写成矩阵形式时,需要将有关的量用前面提及的矩阵位移法中的统一符号表示,它们的正方向也应按照矩阵位移法中的规定来取。若将梁的 A 端记作 i , 为局部坐标系的原点, B 端记作 j , 则有

$$\left. \begin{aligned} F_{QAB} &= \bar{F}_{yi}, \quad F_{QBA} = -\bar{F}_{yj}, \quad M_{AB} = -\bar{M}_i, \quad M_{BA} = -\bar{M}_j \\ \Delta &= \bar{v}_i - \bar{v}_j, \quad \theta_A = -\bar{\theta}_i, \quad \theta_B = -\bar{\theta}_j \end{aligned} \right\}$$

将上述关系引入转角位移方程,并以矩阵形式表达,即可得到梁式单元的刚度方程如下:

$$\begin{pmatrix} \overline{F}_y \\ \overline{M}_i \\ \vdots \\ \overline{F}_y \\ \overline{M}_j \end{pmatrix}^e = \begin{pmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix}^e \begin{pmatrix} \overline{v}_i \\ \overline{\theta}_i \\ \vdots \\ \overline{v}_j \\ \overline{\theta}_j \end{pmatrix}^e \quad (8-18)$$

其中

$$\overline{k}^e = \begin{pmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix}^e \quad (8-19)$$

上式即为梁式单元在局部坐标下的单元刚度矩阵。

对于一般的刚架单元,还受到轴向力的作用,并且有轴向变形存在,在刚度方程中应当将杆端的轴向位移 $\overline{u}_i$ 、 $\overline{u}_j$ 和杆端的轴向力 $\overline{F}_x$ 、 $\overline{F}_y$ 包括进去。在线性小位移范围内,杆端的轴向力只与杆端的轴向位移有关,如式(8-3)所示,而与杆端的横向位移及转角无关;同样,杆端的剪力及弯矩只与杆端的横向位移和转角有关,如式(8-18)所示,而与杆端的轴向位移无关。这两者是非耦合的,或者说两者是独立地起作用而互不影响的。因此,只需要将桁架单元的刚度方程(8-3)与梁式单元的刚度方程(8-18)加以联合,就可得到刚架单元的刚度方程如下:

$$\begin{pmatrix} \overline{F}_x \\ \overline{F}_y \\ \overline{M}_i \\ \vdots \\ \overline{F}_x \\ \overline{F}_y \\ \overline{M}_j \end{pmatrix}^e = \begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix}^e \begin{pmatrix} \overline{u}_i \\ \overline{v}_i \\ \overline{\theta}_i \\ \vdots \\ \overline{u}_j \\ \overline{v}_j \\ \overline{\theta}_j \end{pmatrix}^e \quad (8-20)$$

记

$$\bar{k}^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}^e \quad (8-21)$$

上式即为局部坐标系中刚架单元的刚度矩阵。式(8-20)也可以简写成式(8-4)的形式。此时杆端位移向量 $\bar{\Delta}^e$ 和杆端力向量 $\bar{F}^e$ 分别如式(8-16)和(8-17)所示。

与前面的桁架单元一样,可以通过坐标转换将刚架单元的杆端力、杆端位移和单元刚度矩阵由局部坐标系转换到结构坐标系中。刚架单元的坐标转换矩阵 T 只需将桁架单元的坐标转换矩阵适当扩大便可得到。刚架单元与桁架单元的不同之处只是结点可以发生角位移,与之相应刚架单元的杆端力中包括了杆端弯矩项。由于转角和弯矩在坐标转换时不会发生变化,即始终有 $\theta = \bar{\theta}$ 、 $M = \bar{M}$,于是,由式(8-10)可容易地得到刚架单元的坐标转换矩阵为

$$T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8-22)$$

不难证明,刚架单元的坐标转换矩阵也是一个正交矩阵。有了坐标转换矩阵 T ,便同样可根据式(8-13)求得结构坐标系中刚架单元的刚度矩阵为

$$k^e = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_4 & -a_1 & -a_2 & a_4 \\ a_2 & a_3 & a_5 & -a_2 & -a_3 & a_5 \\ a_4 & a_5 & a_6 & -a_4 & -a_5 & a_6/2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_1 & -a_2 & -a_4 & a_1 & a_2 & -a_4 \\ -a_2 & -a_3 & -a_5 & a_2 & a_3 & -a_5 \\ a_4 & a_5 & a_6/2 & -a_4 & -a_5 & a_6 \end{bmatrix} \quad (8-23a)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{12EI}{l^3} \sin^2 \alpha, & a_4 &= \frac{6EI}{l^2} \sin \alpha \\ a_2 &= \left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3} \right) \cos \alpha \sin \alpha, & a_5 &= \frac{6EI}{l^2} \cos \alpha \\ a_3 &= \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha + \frac{12EI}{l^3} \cos^2 \alpha, & a_6 &= \frac{4EI}{l} \end{aligned} \right\} \quad (8-23b)$$