西安交大 考研

数学135系列

2007版

数学考研

考点 方法

精讲 精练

主编 龚冬保

数学一

精讲 剖析考点 发掘核心 把握重点 提高效率

精练 一题多解 多题一解 提高技巧 训练思路

网上答疑 龚冬保教授免费答疑信箱 sx135_J07@126.com

西安交通大学出版社
XI' AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

(2007版)

数学考研

考点精讲方法精练

(数学一)

主编　龚冬保

编著　龚冬保　王寿生　褚维盘

(高等数学)

崔荣泉(线性代数)

周家良(概率论与数理统计)

西安交通大学出版社

·西安·

内容提要

本书是专门针对考研复习编写的教材，内容严格按教育部制订的“数学考试大纲”编写。为了适应考生“复习”的特点，本书建立了与普通教材不同的体系；针对考研的特点，突出基本功和综合运用、应试能力的训练，对于数学知识，着重于分析问题和解决问题的能力，全面而有重点地覆盖了数学一、数学二、数学三和数学四的所有考点和解题方法。本书既可作“考研辅导班”的教材，也可用于考生自学，同时也可供就读本科的各专业的大学生参考。

对本书如有建议和意见，请与我们联系，Email：jdkysx@126.com

图书在版编目(CIP)数据

数学考研考点精讲方法精练. 数学. 1 / 龚冬保主编；王寿生等编. —西安：西安交通大学出版社，2006.4

ISBN 7-5605-2169-X

Ⅰ. 数…　Ⅱ. ①龚…②王…　Ⅲ. 高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料　Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 021808 号

书　名	数学考研考点精讲方法精练(数学一)
主　编	龚冬保
出版发行	西安交通大学出版社
地　址	西安市兴庆南路 25 号(邮编：710049)
电　话	(029)82668357　82667874(发行部)
	(029)82668315　82669096(总编办)
印　刷	陕西江源印刷科技有限公司
字　数	818 千字
开　本	787mm×1 092mm　1/16
印　张	32
版　次	2006 年 4 月第 1 版　2006 年 4 月第 1 次印刷
书　号	ISBN 7-5605-2169-X/O・231
定　价	41.50 元

版权所有　侵权必究

2007 版前言

一本为考研所写的应试教材不知不觉已出到第五版了，年年都要重印几次，可见是受到广大考生欢迎的。由于数学考试分为数学一、二、三、四，所考内容有所不同，因此不少考生建议我们将本教材分开出版，以使针对性更强。因此，从 2007 版开始，我们将本教材分成三册："数学一"分册，"数学二"分册，"数学三和数学四"分册；同时，亦应考生的要求，将书名由《数学考研教程》改为《数学考研考点精讲方法精练》，以示与传统的数学教材有所区别。

需要提醒读者注意的是，本书是专门为考研编写的。在《考试大纲》规定的考点范围内，我们介绍了一些相当有效的特殊的解题方法，这些方法在一般书上少见，但却是考研热点。如"无穷小分析方法"，证明题的"作辅助函数方法"，"渐近线及求各种渐近线的方法"等等。因此，往往看第一遍时会感到生疏，但是一旦理解掌握后，就会发现其妙无穷。用一位读者的话说，读本书，第一遍感到神奇，但体会不深，两遍三遍后方能读透，才能领会到本书"考点精讲方法精练"奥妙之处。

因此，读者在使用本书时，要精益求精，反复读反复练，着重于掌握方法，着重于考点之间的联系。要把书中的例题当作习题做，做题不在多而在精，一题多解、一题多变。精典的例题要反复做、反复体会、掌握思路、熟练方法，直到运用自如。

我们对本书 2007 版所作的修改主要有：

1. 各分册的篇幅减少了。即使是考试内容最多的数学一分册，在增加了 2006 年的考试内容以后，篇幅也比原来少了；数学二由于不考"概率论与数理统计"，数学二分册的篇幅更是有了大幅度下降；数学三和数学四分册的篇幅也减少了许多。

2. 针对性更强了。对照最新《数学考试大纲》，各分册去掉了《大纲》没有规定的内容，去掉了相应的例题和练习题。各分册内容紧扣大纲要求，使复习范围更加集中，复习效率更高。

3. 增加、修改了部分例题和练习题。订正了个别例题、练习题中的印刷错误。

2005 年 11 月为配合《数学考研模拟考试试卷》的出版，我们曾开通了一个答疑信箱。短短两个月时间解答了近 500 人次的提问，考生勤奋好学的精神深深地感动了我们。为了更好的帮助读者复习，今年从本书出版之时，即开通网上辅导答疑信箱(email：sx135_J07@126.com)，由本书作者义务为读者解答问题，欢迎读者提问。同时希望读者指出书中的不足和对我们的要求。

(另：本书的编写宗旨请阅"第 1 版前言")

编　者

2006 早春于西安交大

第 1 版前言

目前考研的数学辅导书很多,却没有一本专门指导考研复习使用的教材,广大考生很希望有这样的教材。为此,我们尝试编写了本教材,以帮助考生能按教育部制订的研究生入学考试的《数学考试大纲》,全面系统地、有重点地、高效率地复习数学知识,取得好成绩。

复习是重复学习,不是重新学习。考研教材应与普通教材不同。首先,普通教材必须严格地按内容的逻辑顺序来编写,而考研教材不必受此拘束,可以从读者最熟悉的内容入手。比如高等数学部分,本书采取从微分法开始,以微分带积分,以积分促微分,使微积分紧密结合,深入浅出地讲完一元微积分的全部内容。其次,普通教材着重一个一个地讲解知识单元,而考研教材则侧重于内容间的联系。如本书线性代数部分将矩阵与行列式、向量代数与线性方程组、特征值特征向量与二次型紧密结合。第三,创立了一种新的体系,在逻辑顺序上更加符合考生的认识层次,更加适合于高效的复习。如概率论部分,先讲离散型随机变量的有关概率问题,再讲连续型随机变量的问题,再讲它们间的联系。第四,本书针对考研主要是考核解题能力的特点,安排了大量的例题,采用一题多解,一题多变的方式,侧重讲解题的思路、方法和技巧,培养读者灵活的分析能力和解决数学问题的能力。第五,根据编者多年辅导考研数学的经验,本书严格按《数学考试大纲》,从内容上既照顾了全面覆盖所有的考点,又突出了重点,从方法上既介绍了数学处理问题的基本方法,又突出了主要方法,特别考虑到考研试题中 70% 左右的是基本题,本教材在基本内容、基本方法上讲述的篇幅最大,对一些难题讲述,则侧重讲一道难题的思路,以及它与基本内容的联系,如何作到熟能生巧等等。第六,作为一本复习教材,本书还考虑要便于考生自学,因此,在许多题后附了不少注释,还介绍了不少自编练习题的方法。希望读者在阅读本书时,要一边看书一边自己动手推导,在读完一节后,最好将这一节书中的例题当作习题,自己独立做一遍,然后再作本章练习题,这样效果会更好。

本书既然是一本考研的复习教材,因此,书中对一些估计考生很熟悉的内容,一些定理的证明、公式的推导等略去不讲,如果想要知道相关的内容,可以在任何一本普通的教材中找到。

感谢西安交通大学出版社为本书的编辑和出版所作的努力。希望本书能受到读者的欢迎,更希望广大读者多提意见和建议,以使本书能改得更好,成为准备参加考研读者的良师益友。

编者

2006.3 修改于西安

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

目　　录

第 5 章　向量代数与空间解析几何
多元函数微分学在几何上的应用

第 6 章　重积分

第 7 章　曲线积分、曲面积分及场论初步

第 8 章　数列极限与无穷级数

第 9 章　微分方程

第 10 章　矩阵和行列式

第 11 章　向量组和线性方程组

第 12 章　矩阵的特征值和特征向量、二次型

第 13 章　离散型随机变量

第 14 章　连续型随机变量

第 1 章 一元函数微积分(一)

1.1 微积分的基本方法

本书为何从微、积分法开始，而不从函数、极限开始？这正是本书的特点. 我们认为，“复习”应当从你最熟悉、最容易提起回忆的内容入手，而不是从头再学一遍，这样效率会更高、效果会更好.

1.1.1 微积分的基本公式

定义 1.1 在某个区间 I 上，若 $F'(x)=f(x)$，便称函数 $f(x)$ 是 $F(x)$ 的导数，而称函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，$F(x)+C$ 是 $f(x)$ 的不定积分(C 是任意常数).

不定积分记为 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

从运算的角度讲，不定积分是微分的逆运算. 因此，微积分运算的基础在于微分法. 作一个函数的导数或微分，再反过来作积分，是复习微积分运算的好办法.

所谓微积分基本公式，是指一些简单初等函数的求导和积分的公式(见表 1.1).

1.1.2 微分、积分的基本运算法则与联系

1.1.2.1 微分的加法法则与积分的分项积分法

例 1.1 $\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int(x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})\mathrm{d}x=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C.$

例 1.2 $\int \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int(1-\frac{1}{1+x^2})\mathrm{d}x=x-\arctan x+C.$

例 1.3 $\int \tan^2 x\mathrm{d}x=\int(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x=\tan x-x+C.$

1.1.2.2 复合函数的微分法与换元积分法

1. 复合函数的求导法则

复合函数求导法则是最重要的法则，我们将它简述成定理：

定理 1.1a(复合函数微分法则) 若 $y=f(u)$ 可导，$u=g(x)$ 可导，则 $y=f(g(x))$ 可导. 且

$$\boxed{y'=f'_u\cdot g'(x) \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}$$

复习应当抓住重点以及重点内容与其它内容间的联系. 讲到复合求导，我们首先回忆一下多元复合求导的法则.

表 1.1　微积分基本公式对照表

① $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	①′ $\int x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C(\alpha \neq -1)$
② $(\ln \mid x \mid)' = \frac{1}{x}$	②′ $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln \mid x \mid + C$
③ $(a^x)' = a^x \ln a$	③′ $\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$
④ $(\sin x)' = \cos x$	④′ $\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C$
⑤ $(\cos x)' = -\sin x$	⑤′ $\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C$
⑥ $(\tan x)' = \sec^2 x$	⑥′ $\int \sec^2 x \mathrm{d}x = \tan x + C$
⑦ $(\cot x)' = -\csc^2 x$	⑦′ $\int \csc^2 x \mathrm{d}x = -\cot x + C$
⑧ $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	⑧′ $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
⑨ $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$	⑨′ $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$
⑩ $(\mathrm{sh}x)' = \mathrm{ch}x$	⑩′ $\int \mathrm{ch}x \mathrm{d}x = \mathrm{sh}x + C$
⑪ $(\mathrm{ch}x)' = \mathrm{sh}x$	⑪′ $\int \mathrm{sh}x \mathrm{d}x = \mathrm{ch}x + C$
⑫ $(\mathrm{th}x)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$	⑫′ $\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}x + C$
⑬ $(\ln \mid x + \sqrt{x^2 \pm 1} \mid)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}$	⑬′ $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln \mid x + \sqrt{x^2 \pm 1} \mid + C$
⑭ $(\ln \mid \frac{1+x}{1-x} \mid)' = \frac{2}{1-x^2}$	⑭′ $\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln \mid \frac{1+x}{1-x} \mid + C$

定理 1.1b（多元函数复合求导法则）　设 $z = f(u,v)$ 可微，而 $u = u(x,y)$，$v = v(x,y)$ 均可导，则 $z = f(u(x,y),v(x,y))$ 可导，且

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}}$$

例 1.4　设 $y = x^{\sin x}$，求 y'.

解 1（用一元复合求导）.

$$(x^{\sin x})' = (\mathrm{e}^{\sin x \ln x})' = \mathrm{e}^{\sin x \ln x}(\sin x \ln x)'$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$= \cos x(\ln x)x^{\sin x} + \frac{\sin x}{x}x^{\sin x}$$

解 2(用多元复合求导)　记 $u = x, v = \sin x$;则　$y = u^v$.

$$y' = vu^{v-1} \cdot u' + u^v \ln u \cdot v'$$

$$= \frac{\sin x}{x}x^{\sin x} + \cos x(\ln x)x^{\sin x}$$

复合求导的逆运算带来两类换元积分法.

2. 第一类换元积分法(凑微分的积分法)

例 1.5　计算$\int \sin 2x \mathrm{d}x$.

解 1　原式$= \frac{1}{2}\int \sin 2x \mathrm{d}(2x) = \frac{-1}{2}\cos 2x + C$.

注　这里,实际上是令 $2x = u$,但当对这样简单的复合求导逆运算熟悉时,不必写出新的积分元 u,大多数的第一类换元积分法都可以不写出 u,而是将被积表达式凑成微分形式,即如 $\sin 2x \mathrm{d}x = \mathrm{d}(-\frac{1}{2}\cos 2x)$,故也称凑微分法.

解 2　原式$= 2\int \sin x \cos x \mathrm{d}x = 2\int \sin x \mathrm{d}(\sin x) = \int \mathrm{d}\sin^2 x = \sin^2 x + C$.

解 3　原式$= 2\int \cos x \sin x \mathrm{d}x = -2\int \cos x \mathrm{d}(\cos x) = -\cos^2 x + C$.

用凑微分法,可以推广表 1.1 中的积分基本公式 ⑧′⑨′⑬′⑭′.

设 $a > 0$. 则

⑧′ 可推广为　$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}(\frac{x}{a})}{\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C}$

⑨′ 可推广为　$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\arctan \frac{x}{a} + C}$

⑬′ 可推广为　$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C}$

⑭′ 可推广为　$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln \left|\frac{a + x}{a - x}\right| + C}$

以上本质上都是作换元 $u = \frac{x}{a}$ 的第一类换元积分法.

复合求导是最重要的微分法则,因此,**凑微分法是积分的最重要的方法.**

例 1.6　求$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$.

解 1　$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int \frac{\sec x(\tan x + \sec x)}{\tan x + \sec x}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(\tan x + \sec x)}{\tan x + \sec x}$

$$= \boxed{\ln |\tan x + \sec x| + C}$$

解 2　$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}\sin x}{1 - \sin^2 x} = \boxed{\ln \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}} + C}$

解 3 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}=\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}=2\int \frac{\mathrm{d}\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}=\boxed{\ln\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right|+C}$

解 4 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}=\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(\frac{\pi}{2}+x)}=\int \frac{\mathrm{d}(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})}{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})}$

$$=\int \frac{\sec^2(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})}{\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})}\mathrm{d}(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})=\boxed{\ln\left|\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})\right|+C}$$

以上 4 个方框的结果都是计算$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$的公式,读者可用微分还原.

例 1.7 求$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}$.

解 1 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}=\int \frac{(1+\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}=x-\ln(1+\mathrm{e}^x)+C$

解 2 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}=\int \frac{\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)}=\int (\frac{1}{\mathrm{e}^x}-\frac{1}{1+\mathrm{e}^x})\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=x-\ln(1+\mathrm{e}^x)+C$

解 3 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}=\int \frac{\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{-x}}=-\ln(1+\mathrm{e}^{-x})+C$

3.(第二类)换元积分法

这一类是地道的换元法,第一类换元是凑微分,可以不作“换元”,第二类是假设被积函数 $f(x)$ 的原函数不易看出,而令 $x=x(t)$. 这样

$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f(x(t))\dot{x}(t)\mathrm{d}t$,使 $F(t)=f(x(t))\dot{x}(t)$ 比较简单. 通常,**这类换元一个最重要思路是有理化被积表达式**.

例 1.8 求$\int x\sqrt{1-2x}\mathrm{d}x$.

解 令 $1-2x=t^2$. 则 $x=\frac{1}{2}(1-t^2)$, $\mathrm{d}x=-t\mathrm{d}t$.

$$原式=\frac{1}{2}\int (t^2-1)t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{10}t^5-\frac{1}{6}t^3+C$$

$$=\frac{1}{30}[3(1-2x)^{5/2}-5(1-2x)^{3/2}]+C$$

例 1.9 求$\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$.

解 1 令 $x=a\sin t$,则 $\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$.

$$原式=a^2\int \cos^2 t\mathrm{d}t=a^2\int \frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}(t+\frac{1}{2}\sin 2t)+C$$

$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C(可以当成基本公式).$$

解 2 (分部积分法).

$$I=\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x = x\sqrt{a^2-x^2}+\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2}-I+a^2\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad \text{（移项，解出 } I\text{）}$$

$$I=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

解 3 （主要也是分部积分法）.

$$I=\int \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = a^2\arcsin\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}-I \quad \text{（移项）}$$

故

$$I=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

例 1.10 求$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}$.

解 1 （第一类换元）.

$$\text{原式}=2\int \frac{\mathrm{d}\sqrt{x}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}=2\arcsin\sqrt{x}+C.$$

解 2

$$\text{原式}=-2\int \frac{\mathrm{d}\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x})^2}}=-2\arcsin\sqrt{1-x}+C$$

$$=2\arccos\sqrt{1-x}+C.$$

注 遇到函数，首先要想到定义域. 本题被积函数的定义域是(0,1)，故我们只是在(0,1)内求它的原函数.

解 3 （直接用公式）.

$$\text{原式}=\int \frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}=\arcsin(2x-1)+C.$$

解 4（换元积分法） 令 $x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sin t$

$$\text{原式}=\int \mathrm{d}t=t+C=\arcsin(2x-1)+C.$$

解 5 由$0<x<1$知，可令 $x=\sin^2 t, 1-x=\cos^2 t, \mathrm{d}x=2\sin t\cos t\mathrm{d}t$.

$$\text{原式}=2\int \mathrm{d}t=2t+C=2\arcsin\sqrt{x}+C.$$

解 6（有理化变换）考虑被积函数.

由

$$\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}=\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x}{1-x}},$$

令$\frac{x}{1-x}=t^2$， 则 $x=\frac{t^2}{1+t^2}, \mathrm{d}x=\frac{2t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$

$$\text{原式}=2\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=2\arctan t+C=2\arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}}+C.$$

1.1.2.3 乘(除)法求导法则与分部积分法

这是由 $d(uv) = udv + vdu$,得

$$\int u dv = uv - \int v du$$

即,将被积函数是 $u(x)v'(x)$ 的积分,化为 $v(x)u'(x)$ 的积分. 要求表达式 $v(x)u'(x)$ 不比 $u(x)v'(x)$ 更复杂.

例 1.11 求 $\int \ln x dx$.

解 原式 $= x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$

例 1.12 求 $\int x^2 \arcsin x dx$.

解

$$\begin{aligned}原式 &= \frac{x^3}{3}\arcsin x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{x^3}{3}\arcsin x - \frac{1}{6}\int \frac{x^2 dx^2}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{x^3}{3}\arcsin x + \frac{1}{6}\int (1-x^2)^{\frac{1}{2}} d(1-x^2) - \frac{1}{6}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) \\ &= \frac{x^3}{3}\arcsin x - \frac{1}{9}(1-x^2)^{3/2} + \frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + C.\end{aligned}$$

例 1.13 求 $\int x^2 e^x dx$.

解 1 原式 $= x^2 e^x - 2\int x e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$

解 2 (待定系数法). 设 $(x^2 + bx + c)e^x$ 是要求的一个原函数.

则 $[(x^2 + bx + c)e^x]' = [x^2 + (b+2)x + (b+c)]e^x = x^2 e^x.$

故 $b = -2, c = -b = 2$. 即 $\int x^2 e^x dx = (x^2 - 2x + 2)e^x + C.$

以上分部积分法的作用(第一个作用)可以称作是**依次化简被积函数直至求出原函数**. 分部积分的第二个作用是产生**递推公式**.

例 1.14 求 $\int \sin^4 x dx$.

解 记 $\int \sin^n x dx = I_n$

$$\begin{aligned}I_4 &= -\sin^3 x\cos x + 3\int \sin^2 x\cos^2 x dx \\ &= -\sin^3 x\cos x + 3\int \sin^2 x dx - 3\int \sin^4 x dx \quad (将\ 3I_4\ 移到等号左边).\end{aligned}$$

$$I_4 = -\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x + \frac{3}{4}I_2.$$

$$I_2 = \int \sin^2 x dx = -\sin x\cos x + \int dx - I_2 \quad (将\ I_2\ 移到等号左边).$$

$$I_2 = -\frac{1}{2}\sin x\cos x + I_0 = -\frac{1}{2}\sin x\cos x + x + C$$

从而

$$I_4 = -\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x - \frac{3}{8}\sin x\cos x + \frac{3}{4}x + C.$$

读者可以推导一般的 $I_n = \int \sin^n x dx$ 和 $I_n = \int \cos^n x dx$ 的递推公式.

例 1.15 求 $I_2=\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$.

解 我们采用**倒推的方法**. 由

$$I_1=\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{x}{1+x^2}+2\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}=\frac{x}{1+x^2}+2I_1-2I_2.$$

故 $$I_2=\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}+\frac{1}{2}I_1=\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\arctan x+C.$$

分部积分的第三个主要作用是产生**循环公式**而得出积分结果.

例 1.16 求 $I=\int\mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x$.

解 $I=\mathrm{e}^x\cos x+\int\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\cos x+\mathrm{e}^x\sin x-I$（将 I 移到等号左边）

$$I=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin x+\cos x)+C.$$

例 1.17 求 $I=\int\sqrt{a^2+x^2}\mathrm{d}x\quad(a>0)$.

解 1 $I=x\sqrt{a^2+x^2}-\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x=x\sqrt{a^2+x^2}-I+a^2\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}}$（移项）

$$I=\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+C.$$

即 $$\boxed{\int\sqrt{a^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+C}$$

框中的结果可以当公式用.

解 2 $I=\int\frac{a^2+x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x=a^2\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+x\sqrt{a^2+x^2}-I$（移项）

$$I=\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+C.$$

读者还可用换元积分做本题.

与微分四则运算及复合求导对照的积分法主要就是四种：① **分项积分法**；② **凑微分法**；③ **换元法**；④ **分部积分法**.

有理函数的积分主要是用**分项积分**. 其关键是化一个分式为部分分式，而化一个分式为部分分式的关键是将分母分解因式. 三角有理函数从理论上讲用万能变换：即设 $\tan\frac{x}{2}=t$，可将三角有理函数化为有理函数的积分. 但一般做题用万能变换往往十分麻烦，要利用三角函数间的关系灵活去做题，也往往要综合运用以上四种基本的积分方法.

例 1.18 求 $\int\frac{x+5}{x^2-6x+13}\mathrm{d}x$.

解 本题中 $\frac{x+5}{x^2-6x+13}$ 已是部分分式了.

由 $(x^2-6x+13)'=2x-6$，化 $x+5=\frac{1}{2}(2x-6)+8$. 于是

$$原式=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2-6x+13)}{x^2-6x+13}+\int\frac{8}{(x-3)^2+4}\mathrm{d}(x-3)$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-6x+13| + 4\arctan\frac{x-3}{2} + C.$$

例 1.19(2000,二)[1]　设 $f(\ln x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$,求 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

解　令 $x = \mathrm{e}^t$,得 $f(t) = \frac{\ln(1+\mathrm{e}^t)}{\mathrm{e}^t}$,则 $f(x) = \frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x}$.

$$\text{原式} = -\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x) + \int \mathrm{e}^{-x}\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x) + x - \ln(1+\mathrm{e}^x) + C.$$

例 1.20(2000,四)　求 $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解 1　$$\text{原式} = 2\int \arcsin\sqrt{x}\,\mathrm{d}\sqrt{x} = 2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x} - \int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}$$

$$= 2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x} + 2\sqrt{1-x} + C.$$

解 2　令 $x = \sin^2 t$. 则

$$\text{原式} = \int t\cos t\mathrm{d}t = 2t\sin t - 2\int \sin t\mathrm{d}t = 2t\sin t + 2\cos t + C$$

$$= 2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x} + 2\sqrt{1-x} + C.$$

例 1.21(2001,一)　求 $\int \frac{\arctan \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x$.

解 1　$$\text{原式} = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\arctan \mathrm{e}^x + \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}(1+\mathrm{e}^{2x})}$$

$$= -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\arctan \mathrm{e}^x + \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}$$

$$= -\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-2x}\arctan \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} + \arctan \mathrm{e}^x) + C.$$

解 2　令 $\mathrm{e}^x = \tan t$. 则 $\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{d}\tan t$.

$$\text{原式} = \int\frac{t}{\tan^3 t}\mathrm{d}\tan t = -\frac{1}{2}\frac{t}{\tan^2 t} + \frac{1}{2}\int\cot^2 t\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\tan^2 t} - \int\csc^2 t\mathrm{d}t + \int\mathrm{d}t\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\tan^2 t} + \cot t + t + C\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\arctan \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}} + \mathrm{e}^{-x} + \arctan \mathrm{e}^x + C\right).$$

例 1.22(2001,二)　求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

解　令 $x = \tan t$. 则 $\mathrm{d}x = \sec^2 t\mathrm{d}t$.

$$\text{原式} = \int\frac{\cos t\mathrm{d}t}{1+\sin^2 t} = \arctan\sin t + C = \arctan\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

注　以上我们用到由 $x = \tan t$,得 $\sin t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 可用画小直角三

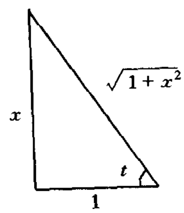

图 1.1

[1] (2000,二)表示 2000 年数学二的试题. 下同.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com