

结构动力学 及应用

JIEGOU
DONGLIXUE JI
YINGYONG

李耀庄 编著
管品武


安徽
科学技术
出版社

结构动力学及应用

编著 李耀庄 管品武
主审 陈 淮

安徽科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

结构动力学及应用/李耀庄,管品武编著. —合肥:安徽科学技术出版社,2005.9
ISBN 7-5337-3322-3

I. 结… II. ①李…②管… III. 结构动力学
IV. 0342

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 102690 号

内 容 提 要

本书包括结构动力学概述、单自由度体系的振动、多自由度体系的振动、多自由度体系自振频率和振型的计算、连续系统振动及其分析的实用方法、动力计算的有限元法、结构动力学在地震工程和工程振动中的应用,以及进行结构动力计算的部分计算程序等方面的内容。本书在深入阐明结构动力学基本原理的基础上,增加了大量具有代表性的例题,以有利于读者加深对动力学基本理论的理解和应用。附录中给出的计算程序便于读者直接进行结构的动力分析和计算。最后还介绍了结构动力学在地震工程和工程振动中的具体应用。

本书可作为土木工程、水利工程和力学等专业的研究生和二年级本科生的教学用书,也可作为相关专业科技人员的参考读物。

*

安徽科学技术出版社出版
(合肥市跃进路1号新闻出版大厦)
邮政编码:230063

电话号码:(0551)2833431
E-mail: yougoubu@sina.com
yougoubu@hotmail.com

网址: www.ahstp.com.cn
新华书店经销 合肥义兴印务有限责任公司印刷

*

开本: 787×1092 1/16 印张: 13.5 字数: 320 千
2005年9月第1版 2005年9月第1次印刷
定价: 35.00 元

(本书如有倒装、缺页等问题,请向本社发行科调换)

前 言

结构动力学是研究结构体系动力特性以及结构在动力作用下动力响应的一门技术学科。通过分析和研究,熟悉和掌握工程结构动力响应的一般规律,为改善工程结构的动力特性,提高结构的安全性和可靠性,提供了坚实的理论基础。本书主要包括结构动力学概述、单自由度体系的振动、多自由度体系的振动、多自由度体系自振频率和振型的计算、连续系统振动及其分析的实用方法、动力计算的有限元法、结构动力学在地震工程和工程振动中的应用以及结构动力计算的部分计算程序等方面的内容。

本书是在土木工程、力学等专业研究生及建筑与土木工程的工程硕士讲义的基础上编写而成的,对基本理论的介绍深入浅出,并给出了大量例题供读者学习和参考。对于同一问题采用不同的方法解答,利于读者进行分析和比较,同时还给出了大量的计算源程序,便于读者直接应用到工程实践当中。

本书的第一章、第二章、第三章、第四章和附录由中南大学李耀庄副教授编著,第五章、第六章和第七章由郑州大学管品武副教授编著。郑州大学土木工程学院院长陈淮教授对本书的编写提出了许多宝贵的意见和建议,并负责全书的主审。本书在编写过程中,参阅了同行专家和学者许多宝贵的资料和研究成果,在此谨向他们表示衷心的感谢。本书在出版过程中得了安徽科学技术出版社的大力支持,也得了作者所在单位领导的帮助和鼓励。在本书出版之际,作者对给予支持和帮助的所有单位和专家表示诚挚的敬意和衷心的感谢。此外,还要感谢硕士研究生陈强和龚啸,他们核算了书中的例题并调试了部分计算程序。

由于作者水平所限,本书的错误和不当之处在所难免,衷心欢迎读者提出宝贵的意见和建议,并请发送到邮箱 liyuz@mail.csu.edu.cn,读者也可以通过邮箱索取所有的计算源程序。

作 者

2005 年 8 月

目 录

1 概 述	1
1.1 结构动力学引言	1
1.2 动力体系的自由度	2
1.3 利用 D'Alembert 原理建立体系运动微分方程	3
1.4 利用虚位移原理建立体系运动微分方程	8
1.5 利用 Lagrange 方程建立体系运动微分方程	9
1.6 利用 Hamilton 原理建立体系运动微分方程	12
1.7 利用不同方法建立体系运动微分方程的比较	15
1.8 振动的分类	16
2 单自由度体系的振动	20
2.1 概述	20
2.2 单自由度体系无阻尼自由振动	20
2.3 单自由度体系有阻尼自由振动	22
2.4 单自由度体系无阻尼强迫振动	24
2.5 单自由度体系有阻尼强迫振动	26
2.6 共振	30
2.7 振动测试与地震传感器基本原理	32
2.8 隔振	34
2.9 振动问题的复数解答方法	38
2.10 简谐振动的合成	40
2.11 单自由度体系在任意周期荷载作用下强迫振动求解——Fourier 级数解法	41
2.12 单自由度体系在任意荷载作用下强迫振动求解——Duhamel 积分	44
2.13 Duhamel 积分的数值计算	48
2.14 单自由度体系振动的频域分析法	50
2.15 单自由度体系振动数值算法	52
3 多自由度体系的振动	59
3.1 多自由度体系运动方程的建立	59
3.2 多自由度无阻尼体系自由振动	62
3.3 多自由度无阻尼体系强迫振动的振型分解法	63

3.4	多自由度有阻尼体系强迫振动的振型分解法	65
3.5	求解运动方程组的逐步积分法之一——平均加速度法	67
3.6	求解运动方程组的逐步积分法之二——线性加速度法	69
3.7	求解运动方程组的逐步积分法之三——Wilson - θ 法	72
3.8	求解运动方程组的逐步积分法之四——Newmark - β 法	77
3.9	求解运动方程组的逐步积分法之五——Houbolt 法	80
3.10	求解运动方程组的逐步积分法之六——二级近似加速度法	81
3.11	有关逐步积分法的几个数学概念	83
4	多自由度体系自振频率和振型的计算	87
4.1	概述	87
4.2	乘幂法求振型和频率	87
4.3	多自由度体系的 Rayleigh - Ritz 法	92
4.4	子空间迭代法	95
4.5	Jacobi 法求频率和振型	100
4.6	广义 Jacobi 法求解广义特征值问题	105
4.7	Householder 变换法	106
4.8	QL 法求解对称三对角矩阵的特征值问题	108
4.9	Sturm 序列法求解对称三对角矩阵的特征值问题	110
5	连续系统振动及其分析的实用方法	113
5.1	概述	113
5.2	杆的纵向振动	113
5.3	圆杆的扭转振动	115
5.4	弦线的横向振动	116
5.5	直杆的剪切振动	116
5.6	梁的横向弯曲振动	118
5.7	考虑剪切变形和转动惯量时梁的横向弯曲振动	120
5.8	考虑轴力影响梁的横向弯曲振动	122
5.9	等截面直杆纵向振动的求解	123
5.10	应用 Hamilton 原理建立梁横向弯曲振动运动微分方程	126
5.11	梁横向弯曲自由振动的求解	128
5.12	考虑轴向力梁弯曲自由振动的求解	130
5.13	考虑转动惯量和剪切变形梁横向自由振动频率的影响	132
5.14	连续系统振型函数的正交性	134

5.15	振型叠加法求解连续系统动力响应	136
5.16	Rayleigh 法	138
5.17	Rayleigh – Ritz 法	141
5.18	Rayleigh – Ritz 法计算连续系统的动力响应	142
6	动力计算的有限元法	146
6.1	概述	146
6.2	结构离散体系运动方程的建立	146
6.3	平面桁架动力计算	149
6.4	平面刚架动力计算	152
7	结构动力学在地震工程和工程振动中的应用	157
7.1	单自由度线弹性体系的水平地震作用和反应谱	157
7.2	多自由度线弹性体系水平地震反应计算的振型分解反应谱法	161
7.3	多自由度线弹性体系水平地震作用计算的底部剪力法	163
7.4	结构基本周期的近似计算	164
7.5	振动的鞭梢效应及其利用和预防	168
7.6	地震时地面运动特性	170
7.7	结构地震反应分析的时程分析法	174
7.8	时程分析法的振动模型	179
附 录		187
附录 1	单自由度 Duhamel 数值积分程序	187
附录 2	单自由度线性加速度数值积分程序	189
附录 3	多自由度 Wilson – θ 法数值积分程序	190
附录 4	多自由度 Numark – β 法数值积分程序	194
附录 5	乘幂法计算频率振型程序	198
附录 6	Jacobi 法计算频率振型程序	203
参考文献		207

1 概 述

1.1 结构动力学引言

高速行驶的交通工具、乘风破浪的轮船、高空翱翔的飞机、风荷载和地震作用下的房屋建筑和高耸构筑物、人类心脏的跳动和脉搏、声音在介质中的传播……世间万物无不处在运动之中,只不过其运动的大小快慢不同而已。人类对于动力学的研究已有数千年历史,我国对于动力学的研究也取得过卓越的成就。例如,我国中医用切脉的方法来诊断病因就是利用波动理论。又如,汉朝张衡(公元78 ~ 139年)利用精铜铸成的地动仪来预测预报地震。但是,对动力问题作为一门学科来加以研究,则是从上世纪初才开始的。随着数学和力学等基础学科的发展,以及电子计算机技术的广泛应用,动力学的研究进入了一个崭新的阶段。结构动力学在航空航天、机械工程、交通和土木工程等诸多领域中都有极其广泛的应用。

动力学意味着时间的变化。结构上的动力荷载就是大小、方向和作用点等随时间的变化。动力荷载作用下结构的反应,包括结构的位移、速度、加速度、应力、应变和内力等随着时间发生变化。结构在动力荷载作用下的反应与静力荷载作用下的反应有本质的区别。首先,外荷载不仅可能是位置坐标的函数,而且是时间的函数。在这样的动荷载作用下,结构将会产生加速度,加速度就会引起惯性力。如果惯性力对于结构的反应具有显著影响,则必须研究其动力问题,反之,如果惯性力的影响小到可以忽略不计,则即使荷载和结构动力反应随时间发生变化,也可以当作静力问题来处理。因此,结构在动力荷载作用下的反应不仅与外荷载作用的大小有关,而且与结构本身的特性有关,其分析方法也与静荷载有根本的区别。

结构在动荷载作用下反应的分析在数学上有两种处理方法:第一种是数定分析方法。如果动荷载是时间的已知函数,将其称为非随机动荷载。一个确定的结构体系在上述非随机动荷载作用下反应的分析方法称为数定分析方法。第二种是非数定分析方法。如果动荷载随时间的变化历程未知,但是这种动荷载一般可以从统计的意义上进行定义,称其为随机动荷载,一个确定的结构体系在上述随机动荷载作用下反应的分析方法称为非数定分析方法,也称为随机振动分析。本书仅讨论非随机动荷载作用下结构的动力反应。

结构动力研究的步骤可以分为三个主要的阶段:

第一阶段为设计阶段。在该阶段一般是根据以往的设计经验和振动的一般规律,对结构的受力体系和构件截面尺寸等进行初步设计。

第二阶段是分析阶段。这一阶段是动力研究的核心,这一阶段的关键是建立一个理想化的数学模型,即得到结构动力计算简图。在选取计算简图时,必须遵循以下两条基本原则:第一,就是结构动力计算简图必须能够反映实际结构的主要受力特性,特别是结构的动力特性,确保计算结果的可靠性;第二,在满足计算精度的前提下,要求结构的动力计算简图尽可能简单,使得计算方便可行,确保计算结果的准确性。选取结构计算简图要同时满足上述两个条件是不容易的,不但需要比较丰富的专业知识,而且还必须具有一定的结构设计经验。目前主要的数学模型有连续模型和离散模型。我们将体系在运动的过程中任意时刻全部质

量的位置所需要的独立几何参数的数目称为结构的动力自由度数目。连续模型就是在描述结构的惯性力等特性时假定结构是连续的,这样连续模型就是一个无限多自由度系统。运用动力学和变形体力学就可以建立连续模型运动的偏微分方程或偏微分方程组。然后,根据给定的边界条件和初始条件,就可以建立微分方程(组),求解该微分方程(组)就可以得到结构的动力反应。这种模型的优点是能够得到结构动力反应的解析解,便于对结构的设计参数进行讨论和修改,便于找到影响结构动力反应的关键因素。但是,这种模型建立的微分方程一般比较复杂,要得到其解析解答一般是困难的,只有在结构极其简单的情况下才是可能的。离散模型就是将结构体系的质量离散化,用有限的几个质量或质点来描述结构的连续质量。对离散模型进行力学分析常常得到运动微分方程(组)。离散模型一般只能得到数值解。这种模型的优点是能够处理复杂的结构体系,并且对于外部激励没有特别的要求,边界条件和初始条件也可以比较复杂。但是,一般要进行大量的参数分析后,才能从中找到一些规律性的东西来指导其他类似结构体系的设计。如图 1-1 所示的简支梁,如果将质量连续化,描述连续质量在某一时刻的位置应该采用一个函数 $w(x,t)$,然后运用牛顿定律、应力-应变关系可以建立体系的运动方程,这样得到的方程将是偏微分方程。也可以将简支梁的质量集中到跨中、三等分跨度、四等分跨度等位置,这样得到的方程将是常微分方程(组)。当然一般而言,在离散模型中,质点数越多,得到的解答也越精确,但是计算也越复杂。

第三个阶段是动力实验阶段。动力试验的目的是用试验结果来验证数学模型,并得到有关动力设计的参数。动力试验可以是原型试验,也可以是模型试验。一般来说,由于动力试验的加载设备和装置比较复杂,试验数据的测量和采集也比较烦琐,试验耗资巨大,有些结构如水坝、海洋石油平台、航天飞机、高层建筑等也不可能做原型试验,因此,目前模型试验应用是最为广泛的。例如飞机模型的风洞试验,高层建筑模型的振动台试验,等等。

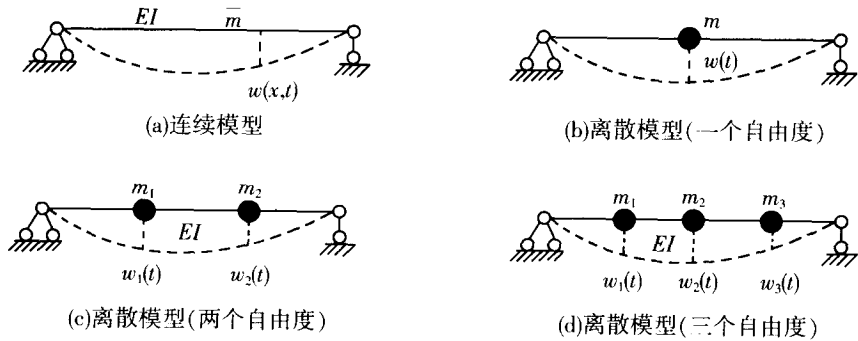


图 1-1 简支梁的连续和离散模型

1.2 动力体系的自由度

描述体系在运动的过程中任意时刻全部质量的位置所需要的独立几何参数的数目称为结构的动力自由度数目。结构自由度数目对于某一结构来说并不是固定的,随着结构计算假设而变化。一般情况下,结构的动力自由度数目与结构的集中质量数目相等。如图 1-1 所示的简支梁,当质量分别集中在简支梁的中部、三分之一跨度、四分之一跨度处将得到单自由度体系、两自由度体系和三自由度体系。但是有些情况下,结构的自由度数目与结构的集中质量数目并不相等。如图 1-2 所示的结构,假设梁的刚度无穷大,尽管结构有两个集中质

量,但却是单自由度体系,因为两个质点的位移具有相关性,并不相互独立。事实上,只需要用一个参数即杆件的转角 α 就可以完全描述体系在运动的过程中任意时刻全部两个质量所处的位置。

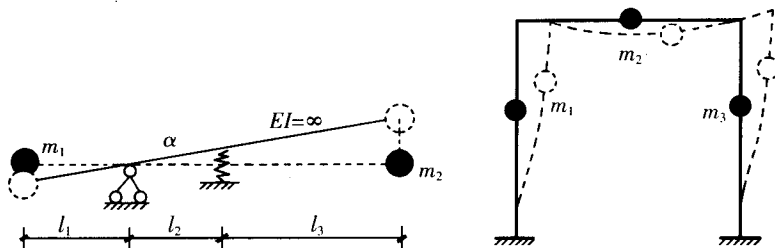


图 1-2 具有两个集中质量的单质点体系

图 1-2 具有三个集中质量的刚架

又如,如图 1-3 所示的刚架,分别将质量集中在梁和柱的跨中,得到三个集中质量。如果不考虑集中质点的转动,则三个质点将分别发生水平和竖向的位移,并且相互独立,因此将具有六个动力自由度。而一般情况下,柱的拉压刚度与抗弯刚度相比大得多,因此假设柱的拉压刚度 $EA = \infty$ 是合理的。这样柱中集中质量的竖向位移可以忽略不计,这样结构将只有四个动力自由度。对于强梁弱柱结构,可以进一步假设横梁的抗弯刚度 EI 为无穷大,横梁的集中质量将只有水平位移而没有竖向位移,这样结构将只有三个动力自由度。再进一步,如果柱的集中质量与横梁相比很小(一般也如此),则可以忽略柱的集中质量或者将柱的集中质量通过动力等效的方法集中到横梁上,这样结构将只有横梁上集中质量的一个水平位移,从而成为单自由度体系。从上述的两个例子的分析可以看出,结构动力自由度数目与集中质量数目无关。此外,结构动力自由度数目与结构超静定次数无关。

1.3 利用 D'Alembert 原理建立体系运动微分方程

牛顿第二定律是大家所熟悉的,即任何质量的动量变化率等于作用在该质量上的力,在数学上可以表述为

$$P(t) = \frac{d}{dt} \left(m \frac{ds}{dt} \right) \quad (1.1)$$

其中: $P(t)$ 为作用在质点 m 上的外荷载的合力; s 为质点的位移。由于对于一般的动力问题可以假设质量不随时间发生变化,得到

$$P(t) = m \frac{d^2 s}{dt^2} = m\ddot{s} = m\dot{v} = ma \quad (1.2)$$

其中: v 为质点的速度; a 为质点的加速度。式(1.2)也可以写成

$$P(t) - m\ddot{s} = 0 \quad (1.3)$$

令 $I(t) = -m\ddot{s}(t)$, 称为惯性力,于是得到动平衡方程

$$P(t) + I(t) = 0 \quad (1.4)$$

惯性力大小为 $m\ddot{s}(t)$, 但方向与质点的加速度方向相反。上述概念就是 D'Alembert 原理。D'Alembert 原理可以表述为:在质点运动的每一瞬时,主动力、约束力和惯性力三者相互平衡。下面举一个简单的例子说明如何应用 D'Alembert 原理来建立体系的运动微分方程。如图 1-4 所示为一个单质点弹簧阻尼系统。假设弹簧为线性的,其弹性常数为 k , 不计弹簧的

质量和弹簧的内阻尼。 $P(t)$ 为作用在质点上的外荷载。以弹簧未伸长的位置作为坐标原点, 垂直向下的方向作为 x 的正方向。在某一时刻, 质点相对于弹簧未伸长位置的位移为 $u(t)$, 静平衡位置相对于弹簧未伸长位置的位移为 u_{st} , 质点在任意时刻的位置相对于质点的静平衡位置的位移为 $u_r(t)$, 于是有

$$u(t) = u_r(t) + u_{st} \quad (1.5)$$

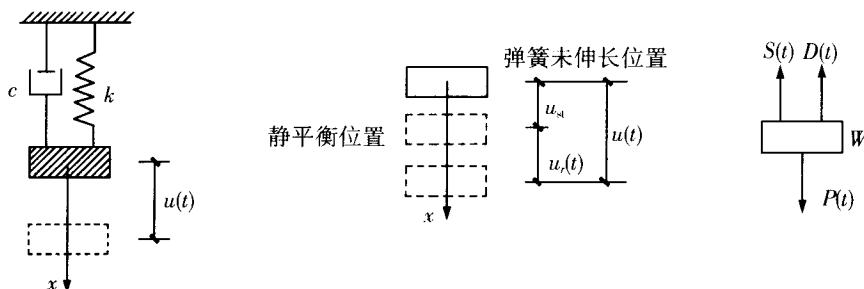


图 1-4 单质点弹簧阻尼系统

质点上作用的力有弹性抗力 $S(t) = -ku(t)$ 、阻尼力 $D(t) = -c\dot{u}(t)$ 、外力 $P(t)$ 和惯性力 $I(t) = -m\ddot{u}(t)$ 、质点自身的重力 W 。根据 D'Alembert 原理得到运动微分方程为

$$-m\ddot{u}(t) - c\dot{u}(t) - ku(t) + P(t) + W = 0 \quad (1.6)$$

$$\text{即} \quad m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) - ku(t) = P(t) + W \quad (1.7)$$

注意到静位移

$$u_{st} = W/k \quad (1.8)$$

于是式(1.7)可以写成

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = P(t) + W + u_{st} \quad (1.9)$$

将式(1.5)代入上式,并注意到式(1.8),可以得到

$$m\ddot{u}_r(t) + c\dot{u}_r(t) + ku_r(t) = P(t) \quad (1.10)$$

从上式可以看出,如果系统的动位移是相对于静平衡位置时,可以不考虑重力的影响。也就是说,在结构的动力计算中可以不考虑重力的影响直接建立系统的运动方程,这样得到的位移将是不包括重力影响在内的动位移。若要计算系统的总位移,只需要将重力作为静荷载产生的位移与不包括重力影响在内的动位移相叠加就可以了,这一结论适用于任何线弹性系统的动力计算。

建立运动方程的另一种方法是柔度法,其基本思路为:体系在振动的过程中,质点在任意瞬时的位移是由惯性力、阻尼力和干扰力共同产生的。这样只需要将惯性力作为虚设的外载作用于质点上,则在它与干扰力和阻尼力共同作用下,可求得质点的瞬时位移。当结构的柔度系数容易得到时,这种方法比直接应用 D'Alembert 原理要简单。例如,对于上述单质点弹簧阻尼系统质点在任意瞬时的位移 $u_r(t)$ 是由惯性力 $-m\ddot{u}_r(t)$ 、阻尼力 $-c\dot{u}_r(t)$ 和干扰力 $P(t)$ 共同产生的,即

$$u_r(t) = [-m\ddot{u}_r(t) - c\dot{u}_r(t) + P(t)] \delta \quad (1.11)$$

由于 $\delta = 1/k$, 上式可以化为(1.10),二者得到的运动方程完全相同。

【例题 1.1】 运用柔度法建立图 1-5 所示系统的运动方程,不考虑阻尼的影响,杆件的质量忽略不计。

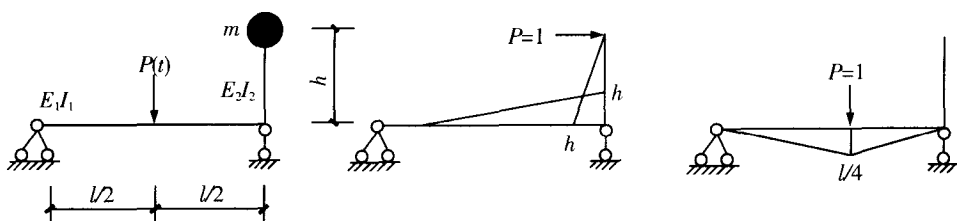


图 1-5 柔度法建立运动方程

解 由柔度法得到系统的运动方程为

$$u(t) = [-m\ddot{u}(t)]\delta_{11} + P(t)\delta_{12} \quad (a)$$

其中的柔度系数可以根据结构力学的知识得到,为

$$\delta_{11} = \frac{1}{E_2 I_2} \left[\left(\frac{1}{2} \times h \times h \right) \times \frac{2}{3} \times h \right] + \frac{1}{E_1 I_1} \left[\left(\frac{1}{2} \times l \times h \right) \times \frac{2}{3} \times h \right] = \frac{h^3}{3E_2 I_2} + \frac{h^2 l}{3E_1 I_1} \quad (b)$$

$$\delta_{12} = -\frac{1}{E_1 I_1} \left[\left(\frac{1}{2} \times \frac{l}{2} \times \frac{l}{4} \right) \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{h}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{h}{2} + \frac{1}{3} \times h \right) \right] = -\frac{l^2 h}{16E_1 I_1} \quad (c)$$

代入(a)并化简得到

$$m\ddot{u}(t) + \frac{3E_1 I_1}{l^3(\beta^2 + \alpha\beta^3)}u(t) + \frac{3}{16(\beta + \alpha\beta^2)}P(t) = 0 \quad (d)$$

$$\alpha = \frac{E_1 I_1}{E_2 I_2}, \quad \beta = \frac{h}{l} \quad (e)$$

如果 $E_2 I_2 = \infty$, 则 $\alpha = 0$, 式(d)变为

$$m\ddot{u}(t) + \frac{3E_1 I_1}{lh^2}u(t) + \frac{3l}{16h}P(t) = 0 \quad (f)$$

【例题 1.2】 运用柔度法建立图 1-6 所示系统的运动方程, 不考虑阻尼的影响。各杆抗弯刚度为 EI , 杆件的拉压刚度无穷大, 质量忽略不计。

解 由柔度法得到系统的运动方程为

$$u(t) = [-m\ddot{u}(t)]\delta \quad (a)$$

其中柔度系数 δ 为体系在质点处加竖向单位力所产生的位移, 可以根据结构力学的知识得到。由于本体系为超静定结构, 柔度系数 δ 的计算比较复杂。由力法得到

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \times l \times l \times \frac{2l}{3} \right) \times 2 = \frac{2l^3}{3EI} \quad (b)$$

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \times \frac{l}{4} \times \frac{l}{2} \right) \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{l}{2} + \frac{1}{3} \times l + \frac{2}{3} \times \frac{l}{2} \right) = \frac{l^3}{16EI} \quad (c)$$

$$\delta_{11}X + \Delta_{1P} = 0, \quad X = -\frac{3}{32} \quad (d)$$

于是可以得到结构在质点处施加单位力的总弯矩图如图 1-6(f) 所示。根据结构力学中超静定结构的位移计算方法, 利用结构的任何一个基本体系, 例如弯矩图 1-6(e) 和总弯矩图 1-6(f) 进行图乘, 就可以得到

$$\delta = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \times \frac{l}{4} \times \frac{l}{2} \right) \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{13l}{64} - \frac{1}{3} \times \frac{3l}{32} + \frac{2}{3} \times \frac{13l}{64} \right) = \frac{23l^3}{1536EI} \quad (e)$$

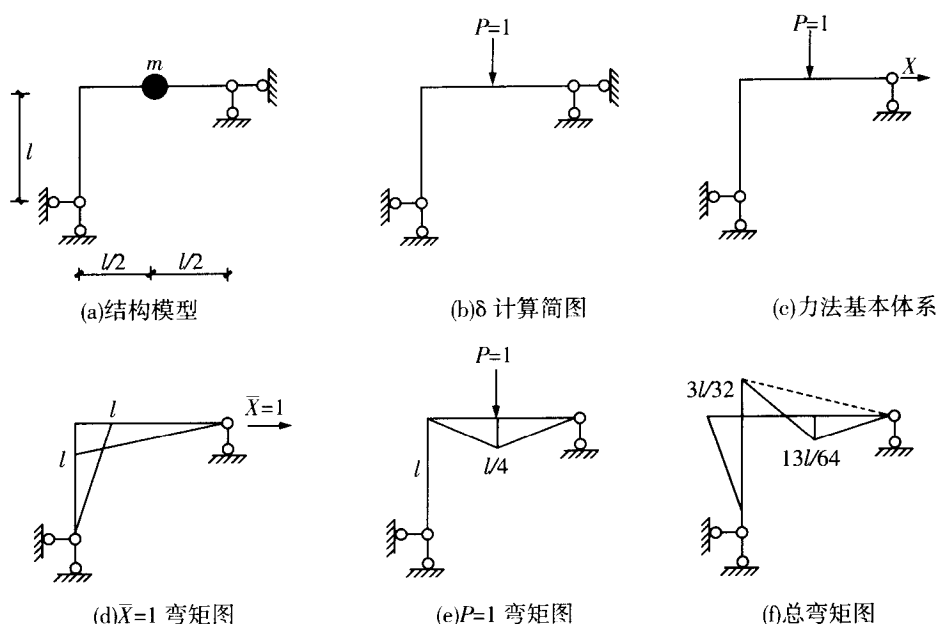


图 1-6 柔度法建立超静定结构运动方程

代入(a)得到系统的运动方程为

$$m\ddot{u}(t) + \frac{1536EI}{23l^3}u(t) = 0 \quad (f)$$

运用柔度法建立体系的运动微分方程的关键就是得到体系的柔度系数。对于单自由度体系而言,柔度系数的倒数就是刚度系数。有时利用弹簧串联和并联的概念,可以十分方便得到体系的刚度系数。两个弹簧并联,在其一端产生相对位移所需要的总力等于它们弹簧系数之和,这个总力可以定义为等效弹簧系数 k ,表示为

$$k = k_1 + k_2 \quad (1.12)$$

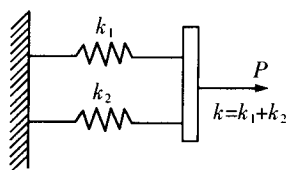
对于 n 个弹簧的并联可以表示为

$$k = \sum_{i=1}^n k_i \quad (1.13)$$

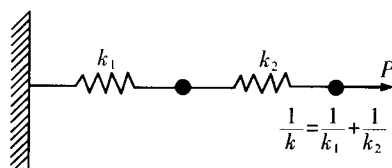
对于串联弹簧,外力 P 弹簧中产生的相对位移分别是

$$\Delta y_1 = \frac{P}{k_1}, \quad \Delta y_2 = \frac{P}{k_2} \quad (1.14)$$

这样串联弹簧自由端的总体相对位移



(a) 弹簧并联



(b) 弹簧串联

图 1-7 弹簧组合

$$\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2 = \frac{P}{k_1} + \frac{P}{k_2} \quad (1.15)$$

在串联弹簧自由端产生单位相对位移所需要的力为

$$k = \frac{P}{\Delta y} \quad (1.16)$$

于是串联弹簧的等效弹簧系数的倒数为

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad (1.17)$$

对于 n 个弹簧的串联可以表示为

$$\frac{1}{k} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} \quad (1.18)$$

巧妙利用弹簧串联和并联的概念,可以比较容易得到单自由度体系的柔度系数或刚度系数,下面以例题的形式说明。

【例题 1.3】 求图 1-8 所示框架的无阻尼运动微分方程。假设横梁的刚度无穷大,忽略立柱的质量。

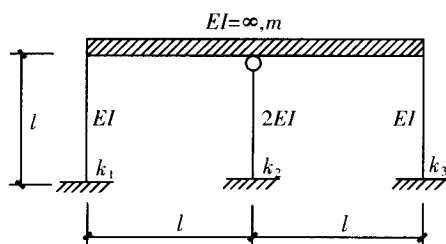


图 1-8

解 由结构力学可以得到各个立柱的抗侧移刚度系数分别为

$$k_1 = k_3 = \frac{12EI}{l^3}, \quad k_2 = \frac{3 \times 2EI}{l^3} = \frac{6EI}{l^3} \quad (a)$$

对于横梁的振动,体系提供的总抗侧移刚度系数相当于将上述三个立柱的抗侧移刚度系数并联,于是得到体系的总抗侧移刚度系数为

$$k = k_1 + k_2 + k_3 = \frac{30EI}{l^3} \quad (b)$$

于是得到体系的运动微分方程为

$$m\ddot{x} + \frac{30EI}{l^3}x = 0 \quad (c)$$

【例题 1.4】 求如图 1-9 所示结构无阻尼自由振动的微分方程。简支梁的质量忽略不计,其抗弯刚度为 EI 。

解 简支梁提供的刚度为 $k_3 = \frac{48EI}{l^3}$ 。该体系可以看成组合弹簧体系,其中 k_1 和 k_3 并联后再与 k_2 串联,因此得到体系的总刚度系数的倒数为

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_1 + 48EI/l^3} \quad (a)$$

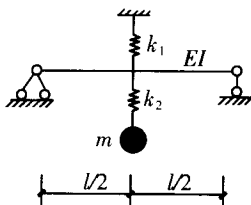


图 1-9

$$\text{得到} \quad k = \frac{k_2(k_1 l^3 + 48EI)}{(k_1 + k_2)l^3 + 48EI} \quad (\text{b})$$

于是得到体系的运动微分方程为

$$m\ddot{x} + \frac{k_2(k_1 l^3 + 48EI)}{(k_1 + k_2)l^3 + 48EI}x = 0 \quad (\text{c})$$

1.4 利用虚位移原理建立体系运动微分方程

如果结构体系相当复杂,而且包含许多彼此联系的质量点或有限尺寸的质量块,则直接写出作用于体系上的所有力的平衡方程可能是很困难的。但是在某些情况下,结构体系上的力可以方便地用位移自由度来表示,而它们的平衡规律则可能是不清楚的。此时,虚位移原理就可以来代替平衡规律建立方程。

虚位移原理可表述如下:如果一个平衡体系在一组力的作用下发生虚位移,即体系约束所允许的任何微小位移,则这些力所作的总功将等于零。按这个原理,在虚位移上所作的总功为零,是和作用于系统上力的平衡是等价的。因此,在建立振动系统的运动微分方程时,首先对于质量施加包括惯性力在内的所有的力,然后引入相应于每个自由度的虚位移,并使所做的虚功等于零,这样就可以得到体系的运动微分方程。此种方法的优点是:虚功为标量,可以按照代数规则计算,从而可以避免复杂的矢量运算。

【例题 1.5】 图示系统由两根刚性杆组成,两根杆用铰 C 连接在一起,在 B 点和 C 点分别受到阻尼和弹簧的约束,阻尼系数为 c ,弹簧的刚度系数为 k ,匀质杆件 AC 单位长度的质量为 $\bar{m}$,在无重刚杆 DC 中点处有一集中质量为 m 的质点,其上作用有一集中力 $P(t)$,用虚位移原理建立体系的运动微分方程。

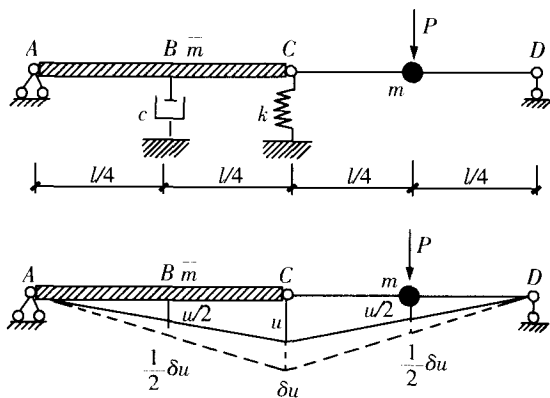


图 1-10

解 因为两根杆都是刚性的,故整个系统可以仅取一个自由度,选铰处的竖向位移 $u(t)$ 为基本自由度,则阻尼器 B 点和质点处的位移均为 $u(t)/2$,作用与结构上的全部力可以求得:

$$\text{① 弹性力} \quad S(t) = ku(t) \quad (\text{a})$$

$$\text{② 阻尼力} \quad D(t) = c \frac{1}{2} \dot{u}(t) \quad (\text{b})$$

③ 惯性力 包括质点 m 的惯性力

$$I_1(t) = m \cdot \frac{1}{2} \ddot{u}(t) \quad (c)$$

刚性杆 AC 平动惯性力

$$I_2(t) = \bar{m} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{2} \ddot{u}(t) \quad (d)$$

刚性杆转动惯性矩

$$M_2(t) = I_{20} \cdot \frac{1}{l/2} \ddot{u}(t) = \frac{\bar{m}l^2}{48} \ddot{u}(t) \quad (e)$$

其中

$$I_{20} = \bar{m} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{(l/2)^2}{12} = \frac{\bar{m}l^3}{96} \quad (f)$$

④ 干扰力 $P(t)$

根据作用于系统上的所有力在发生虚位移 δu 时所作的总功等于零来建立体系的运动微分方程。根据虚位移和 $u(t)$ 成比例这一特性,可以写出总的虚功:

$$\begin{aligned} \delta W = & -ku(t)\delta u - c \frac{1}{2} \dot{u}(t) \frac{1}{2} \delta u - m \frac{1}{2} \ddot{u}(t) \frac{1}{2} \delta u - \frac{\bar{m}l}{4} \ddot{u}(t) \frac{1}{2} \delta u \\ & - \frac{\bar{m}l^2}{48} \ddot{u}(t) \frac{1}{(1/2)} \delta u + P(t) \frac{1}{2} \delta u \end{aligned} \quad (g)$$

根据虚位移原理 $\delta W = 0$, 简化上式得到

$$\left(\frac{m}{4} + \frac{\bar{m}l}{6} \right) \ddot{u}(t) + \frac{c}{4} \dot{u}(t) + ku(t) = \frac{P(t)}{2} \quad (h)$$

利用虚位移原理建立体系运动微分方程的关键之一就是找到体系各个质点之间虚位移之间的几何关系,其次就是正确写出各个力在虚位移上所做的虚功,包括惯性力所作的虚功。

1.5 利用 Lagrange 方程建立体系运动微分方程

如果体系比较复杂,且包含许多彼此相互联系的质点或质量块,则直接运用 D'Alembert 原理来建立运动微分方程是困难的。此时运用 Lagrange 方程来建立体系的运动微分方程则比较简便。下面先推导动力体系的 Lagrange 方程:设有 n 个质点的体系,共有 $3n$ 个坐标,如果在质点之间存在 s 个稳定约束,则体系有 $k = 3n - s$ 个自由度,可以选用任意独立的 k 个参数 $q_i (i = 1, 2, \dots, k)$ 来表示,称之为广义坐标。

根据 D'Alembert 原理,作用在体系上的主动力、约束力和惯性力构成一个平衡力系。根据虚位移原理,包括惯性力在内的作用在体系上的所有力在任何位置对于所给定的任意虚位移的总虚功等于零。设 W 表示体系外力做的功, U 表示体系的弹性位能,根据虚位移原理有

$$\delta U = \delta W \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} \delta q_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} \delta q_i \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (1.20)$$

外力功包括:干扰力 $P(t)$ 所做的功 W_r ; 阻尼力 $D(t)$ 所做的功 W_d ; 惯性力 $I_j = -m_j \ddot{y}_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 所做的功 W_i 。于是式(1.20)可以改写为

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} \delta q_i = \frac{\partial W_r}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial W_d}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial W_i}{\partial q_i} \delta q_i \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (1.21)$$

上式中惯性力做的功可以用动能 T 表示

$$T = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} m_j \dot{y}_j^2, \quad \frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^n m_j \dot{y}_j \frac{\partial \dot{y}_j}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^n m_j \dot{y}_j \frac{\partial \dot{y}_j}{\partial \dot{q}_i} \quad (1.22)$$

$$\dot{y}_j = \frac{dy_j}{dt} = \frac{\partial y_j}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial t} = \frac{\partial y_j}{\partial q_i} \dot{q}_i, \quad \frac{\partial \dot{y}_j}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial y_j}{\partial q_i} \quad (1.23)$$

故

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^n m_j \dot{y}_j \frac{\partial y_j}{\partial q_i} \quad (1.24)$$

此外

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{j=1}^n m_j \dot{y}_j \frac{\partial y_j}{\partial q_i} \right] = \sum_{j=1}^n m_j \ddot{y}_j \frac{\partial y_j}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^n m_j \dot{y}_j \frac{\partial \dot{y}_j}{\partial q_i} \delta q_i \quad (1.25)$$

惯性力在虚位移上做的虚功

$$\delta W_i = \frac{\partial W_i}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{j=1}^n (-m_j \ddot{y}_j) \delta y_j = \sum_{j=1}^n (-m_j \ddot{y}_j) \left(\frac{\partial y_j}{\partial q_i} \delta q_i \right) \quad (1.26)$$

将(1.25)代入上式得到

$$\begin{aligned} \delta W_i &= - \frac{d}{dt} \left[\sum_{j=1}^n (m_j \dot{y}_j) \left(\frac{\partial y_j}{\partial q_i} \delta q_i \right) \right] + \sum_{j=1}^n (m_j \dot{y}_j) \left(\frac{\partial \dot{y}_j}{\partial q_i} \delta q_i \right) \\ &= - \frac{d}{dt} \left[\sum_{j=1}^n m_j \dot{y}_j \frac{\partial y_j}{\partial q_i} \right] \delta q_i + \left[\sum_{j=1}^n m_j \dot{y}_j \frac{\partial \dot{y}_j}{\partial q_i} \right] \delta q_i \end{aligned} \quad (1.27)$$

将(1.22)的第二式和(1.24)代入上式

$$\delta W_i = - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right] \delta q_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i \quad (1.28)$$

将上式代入(1.21)得到

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} \delta q_i = \frac{\partial W_e}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial W_d}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right] \delta q_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

由于虚位移 δq_i 是任意的, 于是整理得到

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} - \frac{\partial W_d}{\partial q_i} = \frac{\partial W_e}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (1.29)$$

上式即为 Lagrange 方程。

如果取 Lagrange 函数 L 为 $L = T - U$, 广义力 $P_i = \frac{\partial W_d}{\partial q_i} + \frac{\partial W_e}{\partial q_i}$, 由于变形能仅与位移 y 或广义坐标 q 有关, 而与速度无关, 因此上式还可以表述为

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial q_i} \right) + \left(- \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial W_d}{\partial q_i} + \frac{\partial W_e}{\partial q_i} \quad (1.30)$$

即

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = P_i \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (1.31)$$

【例题 1.6】 利用 Lagrange 方程推导图 1-4 所示单质点弹簧阻尼系统的运动方程。

解 该体系的动能和弹性势能分别为