初中数学题型分析

陈练明　岩　雨编

广西师范大学出版社

初中数学题型分析

陈练明　岩　雨　编

广西师范大学出版社

初中数学题型分析

陈练明　岩　雨　编

☆

广西师范大学出版社出版
（广西桂林市育才路3号）
广西新华书店发行
广西财经学校印刷厂印刷

开本787×1092　1/32　印张6　字数130千字
1989年6月第1版　　1989年6月第1次印刷
印数：00001—9000
ISBN7—5633—0469—X/G·414

定价：　2.00元

前　　言

为了适应初中数学教学改革的需要，为了开发学生的智力，我们给广大的初中学生编写了这本参考书。全书围绕现行初中数学课本的内容，按照新编数学教学大纲的要求进行编写，重在培养学生独立思考、分析问题、解决问题的能力。

本书具有如下显著的特色：知识结构与内容编排新颖，体现了新编教学大纲精神；系统性强，知识覆盖面广，精选例题与练习题难易程度适中，既重视"双基"训练又突出能力培养，有助于读者在掌握基本概念、定理、公式和法则的基础上总结归纳常用的解题方法与技巧，对于开拓读者的思路具有一定的帮助。

此书是初中学生学习数学的一本有益的读物；是中学数学教师进行教学和指导学生复习，解决疑难问题的参考书，也是自学中学数学的青年干部职工的辅导材料。

由于水平有限，编写时间仓促，本书不足之处在所难免，请广大读者批评指正。

编　者

1989年4月

目　　录

第一编　代数、三角

第二编　平面几何

第一编　代数、三角

类型 1　非负数的应用

非负数指的是零和正数，因此一个实数的绝对值是非负数；一个正数或零的算术根是非负数；一个数的偶次幂是非负数。

常用的非负数基本形式有：

若$A^2+B^2=0$，则$A=0$，$B=0$；

若$|A|+|B|=0$，则$A=0$，$B=0$；

若$\sqrt{A}+\sqrt{B}=0$，则$A=0$，$B=0$；

若$A^2+|B|+\sqrt{C}=0$，则$A=0$，$B=0$，$C=0$.

问题1　当x、y是什么值时，等式
$\sqrt{2x-y-4}+\sqrt{x-2y-5}=0$成立？

分析　本题可利用"一个数的算术根是非负数"来解。根据这一性质，联立二元一次方程组，解这方程组即可求出x、y之值。

解　$\because\sqrt{2x-y-4}$与$\sqrt{x-2y-5}$均为非负数，

$$\therefore\begin{cases}2x-y-4=0\\x-2y-5=0\end{cases}\qquad 解得\begin{cases}x=1\\y=-2\end{cases}$$

问题2　若$x^2+2x+y^2-6y+10=0$，x，y为实数，

求x、y。

分析 分别对x、y配方，把原方程化为$A^2+B^2=0$的形式，即可求出实数x、y。

解 原方程可化为

$(x+1)^2+(y-3)^2=0$，

$$\begin{cases}x+1=0\\y-3=0\end{cases}\quad 解得\begin{cases}x=-1\\y=3\end{cases}$$

问题3 若a、b、c为实数，且$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$，求证$a=b=c$.

证明 原式可化为$2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)=0$，即$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

$\therefore\ a-b=0$；$b-c=0$；$c-a=0$.

故 $a=b$，$b=c$，$c=a$，

就是$a=b=c$.

问题4 若x、y、z均为实数，且x、y、z满足关系

$$\frac{1}{2}|3x-y+7|+\sqrt{y+4z-3}+\frac{1}{3}(2x-2z+5)^2=0,$$

求$(y-x)^{xz}$的值.

分析 根据"有限个非负数之和等于零，则每一个非负数必为零"这一性质，联立方程组并求出x、y、z的值，然后将它们代入$(y-x)^{xz}$即可。

解$\because$ $|3x-y+7|$、$\sqrt{y+4z-3}$、$(2x-2z+5)^2$都是非负数。

$$\therefore \begin{cases} 3x-y+7=0 \\ y+4z-3=0 \\ 2x-2z+5=0 \end{cases} \quad 解得 \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \\ z=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\therefore (y-x)^{xz}=(1+2)^{-2\times\frac{1}{2}}=3^{-1}=\frac{1}{3}$$

问题5 若x、y均为实数，且$y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2-1}}{x+1}$，求$\log_2(x+y)$。

分析 因为 $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2-1}}{x+1}$ 是一个含有x、y的方程，如果直接解这方程，难以入手，若从x的允许值范围来考察问题的特殊性，便可迅速解之。

解 $\because \sqrt{1-x^2}$ 与$\sqrt{x^2-1}$ 均为非负数，

$$\therefore \begin{cases} 1-x^2\geqslant 0 \\ x^2-1\geqslant 0 \\ x+1\neq 0 \end{cases} \quad 解得x=1.$$

由$x=1$，得$y=0$.

$\therefore \log_2(x+y)=\log_2 1=0$.

问题6 当a、b、c为实数时，求证：方程$x^2-(a+b)x+(ab-c^2)=0$有两个实数根，并求出两根相等的条件。

解 $\because \Delta=(a+b)^2-4(ab-c^2)$

$=(a-b)^2+4c^2\geqslant 0$

$\therefore$方程有两个实数根，若方程有相等的实数根，那么$\Delta=0$，于是，当$a=b$，$c=0$时，方程有两个相等的实数根。

说明 讨论一元二次方程实数根的存在性的问题，常常采用将判别式配成完全平方式的代数和，利用完全平方式是非负数的性质来决定判别式大于零，小于零或等于零，从而断定方程的根的情况。

问题7 试求$\log_a(x^2+1)+\log_a(y^2+4)=\log_a 8+\log_a x+\log_a y(a>0,\ a\neq1)$的$x$、$y$的实数解.

解 由原方程可得

$\log_a[(x^2+1)(y^2+4)]=\log_a(8xy)$

$\therefore (x^2+1)(y^2+4)=8xy$

展开、移项得

$x^2y^2+y^2+4x^2-8xy+4=0$

即 $(4x^2-4xy+y^2)+(x^2y^2-4xy+4)=0$.

于是$(2x-y)^2+(xy-2)^2=0$

$\because$ x、y为实数

$$\therefore \begin{cases} 2x-y=0 \\ xy-2=0 \end{cases}$$

解之，按题意，只取正值得$x=1$，$y=2$.

问题8 若三角形的三边a、b、c满足等式$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$，试确定三角形的形状.

分析 若将等式的两边都乘以2，把右边的各项移到左边，配方后可得三项平方和等于零的形式，根据“有限非负数之和等于零，则每一个非负数必为零”这一性质即可证得.

证明 由等式移项，得

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$$

$$2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$$

配方，得$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

要使等式成立，则有

$$a-b=0,\ b-c=0,\ c-a=0.$$

于是，$a=b=c$，所以这个三角形为等边三角形。

练 习 题

1．已知$|a+0.5|+\sqrt{b-2}=0$，求$\log_3(10-a^{1988}\cdot b^{1988})$的值．

2．如果x、y都是实数，且$(2x-1)^2+(y-8)^2=0$，求$\log_8 xy$．

3．解方程$\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2-3x+2}=0$．

4．已知实数x、y、z满足$4x^2-4x+1+\sqrt{x+2y}+\left|y+\frac{1}{2}z\right|=0$，求$(x+y)^z$的值．

5．若$|x-8y|+(4y-1)^2=0$，求$\log_2 y^x$．

6．设$x^2y^2-20xy+x^2+y^2+81=0$，且x，y为实数，求$\log_{\sqrt{3}} x$

7．解方程组：

$$\begin{cases}(y+2z+2)^2+|3x+y-z|=0\\ 2x-y+2z=8.\end{cases}$$

8．若三角形的三边为a、b、c适合等式$a^4+b^4+c^4=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$，试确定三角形的形状．

9．设四边形四条边a、b、c、d满足等式$a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$，求证这四边形为菱形．

答 案 与 提 示

1．2； 2．$\frac{2}{3}$； 3．$x=1$； 4．$\frac{1}{2}$； 5．-4

6．提示：原方程可化为$(x-y)^2+(xy-9)^2=0$，故

$$\begin{cases} x-y=0 \\ xy=9 \end{cases} \quad \text{解得} x=y=\pm 3\text{(取正值)}$$

$$\therefore \quad \log_{\sqrt{3}} x=\log_{\sqrt{3}} 3=2\log_{\sqrt{3}}\sqrt{3}=2.$$

7．提示：原方程组可化为

$$\begin{cases} y+2z+2=0 \\ 3x+y-z=0 \\ 2x-y+2z=8 \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} x=\frac{13}{9} \\ y=-\frac{32}{9} \\ z=\frac{7}{9} \end{cases}$$

8．提示：原等式变形为

$$2(a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-a^2c^2)=0$$

$$(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2=0$$

$\therefore a^2=b^2$、$b^2=c^2$、$c^2=a^2$，即$a=b=c$．

∴这三角形是等边三角形。

9．提示：把等式变形，通过配方即可。

类型2　比和比例的应用

熟悉和掌握比例式的常用定理，是计算或证明比例式的题型的重要前提，常用的比例式的重要性质有：

（1）比例的性质定理：

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Longleftrightarrow ad=bc;$$

推论：$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}\Longleftrightarrow b^2=ac$

（2）反比性质：

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Longleftrightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$

（3）更比性质：

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Longleftrightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\text{或}\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Longleftrightarrow\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$$

（4）合比性质：

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Longleftrightarrow\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$$

（5）合分比性质：

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Longleftrightarrow\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$

（6）等比性质：

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\cdots=\frac{m}{n}\ (b+d+\cdots+n\neq 0)$$

$$\Rightarrow\frac{a+c+\cdots+m}{b+d+\cdots+n}=\frac{a}{b}$$

问题1　已知：$\frac{a-b}{b}=\frac{3}{8}$，求证：$\frac{a}{b}=\frac{11}{8}$

分析　从已知条件可知，等式左边的分子是$a-b$，如果应用合比性质，设法消去$-b$，那么等式的左边就得到$\frac{a}{b}$，这样结论即可得证．

证明 $\because \quad \dfrac{a-b}{b}=\dfrac{3}{8}$

$\therefore \quad \dfrac{a-b+b}{b}=\dfrac{3+8}{8}$

$\therefore \quad \dfrac{a}{b}=\dfrac{11}{8}$

问题2 已知$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{2}{3}$，求$\dfrac{a-c}{b-d}$的值.

解 因为$\dfrac{c}{d}=\dfrac{-c}{-d}$，所以由已知，得

$$\frac{a}{b}=\frac{-c}{-d}$$

根据等比性质，得

$$\frac{a+(-c)}{b+(-d)}=\frac{a}{b} \qquad \text{即} \qquad \frac{a-c}{b-d}=\frac{2}{3}$$

注意 求解有关比例问题时，要善于正确地运用比例的一些重要性质，避免兜圈子。

问题3 如果$\dfrac{y+z}{x}=\dfrac{z+x}{y}=\dfrac{x+y}{z}=k$，求$k$的值.

分析 本题由已知等式可得$\dfrac{y+z}{x}=k$；$\dfrac{z+x}{y}=k$；$\dfrac{x+y}{z}=k$. 如果把三个等式联立方程组，从而求出结果.

解 由已知条件，得

$$\begin{cases} y+z=kx & (1)\\ z+x=ky & (2)\\ x+y=kz & (3)\end{cases}$$

(1)+(2)+(3)得 $\qquad 2(x+y+z)=k(x+y+z)$

$\therefore$ 当$x+y+z\neq0$时，$k=2$；当$x+y+z=0$时，则 $x=-(y+z)$

$$\therefore\quad k=\frac{y+z}{x}=\frac{y+z}{-(y+z)}=-1.$$

问题4　解方程$\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=\dfrac{4x-1}{2}$.

分析　方程的左边形如$\dfrac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{\sqrt{A}-\sqrt{B}}$,因此可考虑应用合分比性质,从而减少了方程中根式的个数,这样较为简便。

解　应用合分比性质对原方程进行化简得

$$\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}=\frac{4x+1}{4x-3}$$

两边平方得　$\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{16x^2+8x+1}{16x^2-24x+9}$

再应用合分比性质，得

$$\frac{2x}{2}=\frac{32x^2-16x+16}{32x-8}$$

化简后解得　$x=\dfrac{5}{4}$。

问题5　设$xyz\neq0$，且$x\neq y$，$\dfrac{x^2-yz}{x(1-yz)}=\dfrac{y^2-xz}{y(1-xz)}$，试证：$x+y+z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$.

分析　本题首先应用更比性质把已知等式变换，然后再利用合分比性质进行变换，化简后便可得证。

证明　由已知，根据更比性质，得

$$\frac{x^2-yz}{y^2-xz}=\frac{x-xyz}{y-xyz}$$

又根据合分比性质，得

$$\frac{x^2+y^2-yz-xz}{x^2-y^2+xz-yz}=\frac{x+y-2xyz}{x-y}$$

$$\therefore \frac{x^2+y^2-yz-xz}{x+y+z}=x+y-2xyz$$

则 $$2xyz=x+y-\frac{x^2+y^2-yz-xz}{x+y+z}$$

$$=\frac{x^2+xy+xz+xy+y^2+yz-x^2-y^2+yz+xz}{x+y+z}$$

$$=\frac{2(xy+yz+xz)}{x+y+z}$$

$$\therefore x+y+z=\frac{xy+yz+xz}{xyz}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}.$$

说明 本题利用比例式的性质进行恒等变换，恒等变换是数学中按照需要进行定向演绎的基础，其变换形式常表现为化繁为简；由异到同或由此及彼的定向特点。

问题 6 设 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$，$ab+bc+cd\neq0$，求证.

$(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$.

证明 设 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=k$，则

$$\frac{a^2}{ab}=\frac{b^2}{bc}=\frac{c^2}{cd}=\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+cd}=k$$

$$\frac{ab}{b^2}=\frac{bc}{c^2}=\frac{cd}{d^2}=\frac{ab+bc+cd}{b^2+c^2+d^2}=k$$

$$\therefore \quad \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+cd}=\frac{ab+bc+cd}{b^2+c^2+d^2}$$

从而证得

$$(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$$

练 习 题

1．已知$\frac{x}{2}=\frac{y}{7}=\frac{z}{5}$，求$\frac{x+y+z}{z}$，$\frac{x+y-z}{x}$

2．解方程：$(2x+5):(2x-5)=13:3$.

3．已知$\frac{x}{y+z}=\frac{y}{z+x}=\frac{z}{x+y}=k$，求$k$的值．

4．已知$6x-3y=0$，求$\frac{x^2+xy}{x^2+y^2}\cdot\left(\frac{x}{x-y}-\frac{y}{x+y}\right)$的值。

5．设$\frac{b}{a+b}=\frac{a+c-b}{b+c-a}=\frac{a+b+c}{2a+b+2c}$，求$a:b:c$。

6．若$\frac{a}{x^2-yz}=\frac{b}{y^2-zx}=\frac{c}{z^2-xy}=t$，求证$ax+by+cz=(a+b+c)(x+y+z)$.

7．设△ABC的三边为a、b、c，且$(b+c):(c+a):(a+b)=4:5:6$．求

(1) $\sin A:\sin B:\sin C$；

(2) 这三角形中最大角的度数。

答 案 与 提 示

1．$\frac{14}{5}$；　2．　2．$x=4$；　3．$k=-1$或$k=\frac{1}{2}$；4．-1；　5．提示：应用等比性质，$a:b:c=2:3:4$；