解题方法与技巧丛书

初中数学解题方法与技巧

乔家瑞 彭林 高尔柳 编著

首都师范大学出版社

CHUZHONG SHUXUE JIETI FANGFA YU JIQIAO

初中数学解题方法与技巧

乔家瑞　彭　林　高尔柳

首都师范大学出版社

（京）新 208 号

图书在版编目（CIP）数据

初中数学解题方法与技巧/乔家瑞等编著．—北京：首都师范大学出版社，1997.2（1999 重印）
（解题方法与技巧丛书）
ISBN 7-81039-797-4

Ⅰ．初… Ⅱ．乔… Ⅲ．数学课-初中-解题 Ⅳ．G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字（96）第 22534 号

首都师范大学出版社
（北京西三环北路 105 号　邮政编码 100037）
北京昌平兴华印刷厂印刷　全国新华书店经销
1997 年 2 月第 1 版　1999 年 3 月第 3 次印刷
开本 787×1092　1/32　印张 13
字数 287 千　印数 21,001～29,000 册
定价 12.00 元

出 版 前 言

我们组织编写《初中解题方法与技巧》丛书的目的是为初中学生及青年教师的“教与学”服务。希望本丛书能帮助学生尽快掌握一套行之有效的解题方法与技巧，冲出题海，提高学习效率，提高素质能力。本丛书各册不同程度地涉及到了命题问题，核心则是系统的、可操作的解题方法和解题技巧。

命题是解题的前题，是组织训练、实施考试的首要条件和必要条件。初中学生已经具有了了解命题的意义、作用、原则和方法的初步能力。了解命题将使初中学生站在一个新的高度主动地学习，将有利于学生走出题海的困扰，有利于学生素质能力的提高。

解题是教与学过程中的重要环节，是学生从掌握基础知识向提高能力素质迁移的一种重要手段，是教师了解学生学习情况及教学效果的一个重要手段，对于国家则是发现人才、选拔人才的较为客观的手段。

解题是学习的难点。解题时涉及知不知的问题、会不会的问题，更重要的是能不能的问题。解题是知识多寡的较量，更重要的是能力强弱的较量和素质高低的较量。解题不在多寡，在“多思”，在举一反三，在能力素质水平的充分发挥。解题首先要掌握“基本方法”，要明题意、会解题、能解对；进一步要掌握“巧”、“活”、“快”、“准”的解题技巧。

解题部分是教学经验丰富的老教师的宝贵经验的总结。

他们为解题。解决问题，理出一个基本脉络，可以缩短青年学生及青年教师摸索解题方法与技巧的过程。解题的基本方法是有的，但窍门各不相同。“巧”、“活”、“快”、“准”是知识融会贯通、能力充分发挥的智慧之光。因此，我们希望读者能从“多思”到“善思”，总结出更好的经验。让这些经验在更多人的脑海里开花结果，为提高国人的智能做出贡献。

编　　者

目　　录

第一章　解答数学题的数学思想

§1　函数及方程思想

努力挖掘题目深层中隐含的函数及方程的实质，就可以主动地运用函数及方程的思想去解决问题，并能使知识转化为能力．

一、利用函数及方程思想解答代数式的化简、求值题

1．　把等式看作是其中某些字母的方程，从而把代数式的化简、求值问题，转化成为方程或方程组问题求解．

例1　设 $x^2-2xy-3y^2=0$，求 $\dfrac{x^2+3xy-4y^2}{x^2-3xy-10y^2}$ 的值 $(x\neq0,\ y\neq0)$．

解：把已知等式 $x^2-2xy-3y^2=0$ 看作是关于 x 的二次方程，相对地，y 是已知数．解这个方程，得 $x=-y$ 或 $x=3y$.

当 $x=-y$ 时，

$$\frac{x^2+3xy-4y^2}{x^2-3xy-10y^2}=\frac{y^2+(-3y^2)-4y^2}{y^2-(3y^2)-10y^2}$$

$$=\frac{-6y^2}{-6y^2}=1;$$

当 $x=3y$ 时，

$$\frac{x^2+3xy-4y^2}{x^2-3xy-10y^2}=\frac{9y^2+9y^2-4y^2}{9y^2-9y^2-10y^2}$$
$$=\frac{14y^2}{-10y^2}=-\frac{7}{5}.$$

例 2 设 $a+2b-5c=0$，$2a-3b+4c=0$. 求分式 $\frac{3a^2+2b^2+3c^2}{6a^2-5b^2+4c^2}$ 的值．

解：把已知等式看作是关于 a，b 的方程组．

解方程组 $\begin{cases} a+2b-5c=0, \\ 2a-3b+4c=0, \end{cases}$ 得 $a=c$，$b=2c$.

当 $c=0$ 时，$\frac{3a^2+2b^2+3c^2}{6a^2-5b^2+4c^2}$ 的值不存在；

当 $c\neq 0$ 时，$\frac{3a^2+2b^2+3c^2}{6a^2-5b^2+4c^2}=\frac{3c^2+8c^2+3c^2}{6c^2-20c^2+4c^2}$
$$=\frac{14c^2}{-10c^2}=-\frac{7}{5}.$$

例 3 当 $\frac{1}{m}-\frac{1}{n}-\frac{1}{m+n}=0$ 时，求 $\frac{n}{m}+\frac{m}{n}$ 的值．

解：由 $\frac{1}{m}-\frac{1}{n}-\frac{1}{m+n}=0$. 得 $mn+n^2-m^2-mn-mn=0$.

即 $n^2-mn-m^2=0$，$(m\neq 0$，$n\neq 0)$．

两边同除 m^2

$\therefore$ $\left(\frac{n}{m}\right)^2-\frac{n}{m}-1=0$，即把已知条件看作是关于 $\frac{n}{m}$ 的二次方程．

解之，得 $\frac{n}{m}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

当 $\frac{n}{m}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 时，$\frac{n}{m}+\frac{m}{n}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{2}{\sqrt{5}+1}=\sqrt{5}$；

当 $\frac{n}{m}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 时，$\frac{n}{m}+\frac{m}{n}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}+\frac{2}{1-\sqrt{5}}$

$$=-\sqrt{5}.$$

例 4 设 a，b，c，d 都是不为零的实数，且满足 $(a^2+b^2)d^2+b^2+c^2=2(a+c)bd$. 求 b^2-ac 的值.

解：将已知等式整理成关于 d 的二次方程

$$(a^2+b^2)d^2-2b(a+c)d+(b^2+c^2)=0$$

由于 d 是实数，这就说明方程必有实根.

$\therefore\quad \Delta=4b^2(a+c)^2-4(b^2+c^2)(a^2+b^2)\geqslant 0.$

即 $-(b^2-ac)^2\geqslant 0$，$(b^2-ac)^2\leqslant 0$.

但 $(b^2-ac)^2\geqslant 0$，所以 $b^2-ac=0$.

2. 通过将已知的代数式或求值的代数式设为辅助元，从而把代数式的化简、求值问题，转化成为方程或方程组问题求解.

例 1 化简 $\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$.

解：设 $\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=x$，从而将代数式化简转化成解方程求未知数 x $(x>0)$.

两边平方，得 $x^2=16+2\sqrt{64-4(10+2\sqrt{5})}$.

即 $x^2=16+2\sqrt{24-8\sqrt{5}}=16+2\sqrt{(2-2\sqrt{5})^2}$

$\therefore\quad x^2=12+2\sqrt{20}$.

$\therefore\quad x=\sqrt{10}+\sqrt{2}$，$x=-(\sqrt{10}+\sqrt{2})$（舍去）.

因此 $\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$

$=\sqrt{10}+\sqrt{2}$.

也可以设 $\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=x$，

$\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=y$，从而将问题转化成解方程组

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 & (1) \\ xy = 2(\sqrt{5} - 1) & (2) \end{cases}$$

但根据原题的特殊性，上述方程组也具有特殊性，所以解这个方程组也具有特殊性，即只需解出$x+y$，而不必求出x，y.

(1)+2×(2)，得

$$\begin{aligned} x^2+2xy+y^2 &= 16+4(\sqrt{5}-1) \\ &= 12+4\sqrt{5} = 12+2\sqrt{20} \\ &= (\sqrt{10}+\sqrt{2})^2. \end{aligned}$$

$\therefore\quad x+y=\sqrt{10}+\sqrt{2}$ 或 $x+y=-\sqrt{10}-\sqrt{2}$.

即 $\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$
$=\sqrt{10}+\sqrt{2}$.

例 2 求$\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}+\sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}$的值.

解：本题不宜直接求值，应设$\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}+\sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}=x$，使之转化成解方程求解未知数 x.

两边立方，得

$$10+3\cdot\sqrt[3]{25-52}(\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}+\sqrt[3]{5-2\sqrt{13}})=x^3.$$

即 $\qquad 10-9x=x^3.$

$\therefore\qquad x^3+9x-10=0.$

即 $(x-1)(x^2+x+10)=0.$

$\because\quad x^2+x+10=0$ 无实数解，

$\therefore\quad x=1$，即$\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}+\sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}=1.$

例 3 设$\dfrac{x}{1+x+xy}+\dfrac{y}{1+y+yz}+\dfrac{z}{1+z+zx}=1$ $(xyz\neq 0)$，求 xyz 的值.

解：直接从已知等式化简较难得到 xyz 的值，故设 $xyz=$

t，以 $z=\frac{t}{xy}$ 代入已知等式，使之转化成关于 t 的方程．

把 $z=\frac{t}{xy}$ 代入已知等式，得

$$\frac{x}{1+x+xy}+\frac{y}{1+y+\frac{t}{x}}+\frac{\frac{t}{xy}}{1+\frac{t}{xy}+\frac{tx}{xy}}=1.$$

即
$$\frac{x}{1+x+xy}+\frac{xy}{x+t+xy}+\frac{t}{xy+t+tx}=1.$$

∴
$$x(t-1)^2=0.$$

但 $x\neq 0$，所以 $t=1$，即 $xyz=1$．

例 4 证明不论 x 为何实数，代数式 $\frac{x^2-4x+4}{x^2+1}$ 的值中，最多有三个偶数．

证明：首先应确定代数式 $\frac{x^2-4x+4}{x^2+1}$ 的取值范围．但需设 $\frac{x^2-4x+4}{x^2+1}=k$，转化成关于 x 的方程．

∵ $x^2-4x+4=kx^2+k$ （$x^2+1\neq 0$）．

即
$$(k-1)x^2+4x+(k-4)=0.$$

但 $k=1$ 时，$x=\frac{3}{4}$，即 $\frac{x^2-4x+4}{x^2+1}$ 的值不是整数，所以把上述方程可看成关于 x 的二次方程，由 x 是实数，则有

$$\Delta=16-4(k-4)(k-1)\geqslant 0.$$

即
$$k^2-5k\leqslant 0.$$

∴ $0\leqslant k\leqslant 5$，也就是 $0\leqslant\frac{x^2-4x+4}{x^2+1}\leqslant 5$. 显然只有 0，2，4 三个偶数是它的值．

3. 构造辅助方程，然后利用求根公式、判别式、根与系数的关系，求解代数式的有关问题．

例 1 已知 $a^{-1}+a^{-2}-1=0$，$b^2+b^4-1=0$，且 $1-ab^2$

$\neq 0$，求$\dfrac{ab^2+1}{a}$的值．

解：将已知等式整理，成 $(a^{-1})^2+a^{-1}-1=0$ 及 $(b^2)^2+b^2-1=0$，又 $1-ab^2\neq 0$，得 $b^2\neq a^{-1}$.

因此把 a^{-1}，b^2 可看成方程 $x^2+x-1=0$ 的两个根．

由根与系数的关系，有 $b^2+a^{-1}=-1$.

$\therefore\quad \dfrac{ab^2+1}{a}=b^2+a^{-1}=-1$.

例 2 设 $(z-x)^2-4(x-y)(y-z)=0$，求证 $x-2y+z=0$.

证明：已知等式可看作是二次方程的判别式，由此构造出关于 t 的二次方程

$$(x-y)t^2+(z-x)t+(y-z)=0\ (x\neq y).$$

$\because\quad x-y+z-x+y-z=0$，

$\therefore\quad t_1=1$.

又 $\Delta=(z-x)^2-4(x-y)(y-z)=0$，方程有等根，所以 $t_2=1$.

由根与系数关系，有$\dfrac{y-z}{x-y}=1\times 1=1$，所以 $x-2y+z=0$.

当 $x=y$ 时，$x-2y+z=0$ 也成立．

例 3 已知实数 a，b，c 满足 $a=6-b$，$c^2=ab-9$，求证 $a=b$.

证明：由已知条件，得 $a+b=6$，$ab=c^2+9$. 由根与系数关系知把 a，b 可看作是方程 $x^2-6x+c^2+9=0$ 的两个根．

$\because\quad \Delta=36-4(c^2+9)=-4c^2\leqslant 0$，但 a，b，c 为实数，

$\therefore\quad -4c^2=0$，即 $c=0$，方程有等根．

因此 $a=b$.

二、利用函数及方程思想解答平面几何题

用函数及方程思想解答平面几何题，实质上是把几何中的“形”的问题，借助于代数中的“数”去揭示几何量之间的内在联系，从而达到解几何题的目的．

1. 通过列方程（组）解几何计算题

在几何题中，有相当数量的题目是计算题．在计算题中所涉及的几何量之间都存在一定的数量关系，这些数量关系往往是由几何中的某些定理、公式和法则联系着．我们将所求的几何量或与它相关的几何量做为未知数，借助相关的定理、公式和法则列出方程或方程组，通过解方程或方程组就可以求得所求几何量的数量．

例 1 等腰三角形一腰上的中线把这个三角形的周长分成 20cm 和 36cm 两部分．求这个三角形各边的长．

分析：如图 1-1，为了求 AB，AC，BC 的长，可以把它们看作是未知数，然后根据已知条件，分析图形性质，从中找出相等关系，这样就可以列出方程求解．

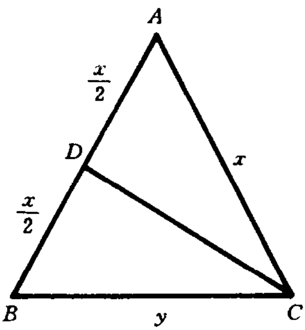

图 1-1

解：在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，设 $AB=x$，$BC=y$，则 $AD=BD=\frac{x}{2}$.

于是有$\begin{cases} x+\frac{x}{2}=36 \\ \frac{x}{2}+y=20 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x+\frac{x}{2}=20 \\ \frac{x}{2}+y=36 \end{cases}$

解之，得$\begin{cases}x=24\\y=8\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=\dfrac{40}{3}\\y=\dfrac{88}{3}\end{cases}$

因此 $AB=AC=24$cm，$BC=8$cm 或 $AB=AC=13\dfrac{1}{3}$cm，$BC=29\dfrac{1}{3}$cm.

例 2 如图 1-2，在$\triangle ABC$ 中，$BC=70$cm，$AC=45$cm，$AB=65$cm，它的内切圆分别和 BC，CA，AB 相切于 D，E，F. 求 AF，BD，CE 的长.

分析:如果不用方程思想求解，则需用切线长定理逐次进行等量代换，才能求出 AF，BD，CE 的长.

如 $AF=AB-BF=AB-BD$

$=AB-(BC-CD)$

$=AB-(BC-CE)$

$=AB-BC+CE$

$=AB-BC+(AC-AE)$

$=AB-BC+(AC-AF)$.

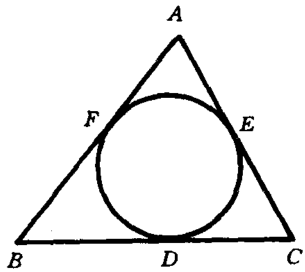

图 1-2

所以 $AF=\dfrac{1}{2}(AB+AC-BC)$

$=\dfrac{1}{2}(45+65-70)=20(\text{cm})$.

解: 设 $AF=x$，$BD=y$，$CE=z$，根据切线长定理，有

$$\begin{cases}y+z=70,\\z+x=45,\\x+y=65.\end{cases}$$

解之，得 $x=20$，$y=45$，$z=25$.

$\therefore$ $AF=20$cm，$BD=45$cm，$CE=25$cm.

在列方程或方程组解几何计算题时，要注意选择适当的

量做为未知数，除了使用直接设法外，还应注意把握使用间接设法的时机，以降低列方程的难度．一般地，涉及到线段长度和角度的比时，往往使用间接设法；涉及到三角形的周长和面积时，往往使用间接设法；涉及到图形位置的特殊性时，也往往使用间接设法．

例 3 在等腰$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$BD\perp AC$于D，且$AD:DC=3:2$，$BC=4\sqrt{5}$，求$\triangle ABC$的周长．

分析：由于要求三角形周长，一般应采取间接设法．又在已知条件中有$AD:DC=3:2$，所以可采取间接设法：设$AD=3x$，$DC=2x$.

解：如图 1-3，设$AD=3x$，$DC=2x$，则$AB=AC=5x$.

$\because$ $BD\perp AC$，

$\therefore$ 在$\mathrm{Rt}\triangle ABD$中，

$BD^2=AB^2-AD^2=25x^2-9x^2$

$=16x^2$.

在$\mathrm{Rt}\triangle BCD$中，

$BD^2+CD^2=BC^2$.

$\therefore$ $16x^2+4x^2=(4\sqrt{5})^2$.

即 $20x^2=80$，$x=2$.

$\therefore$ $\triangle ABC$的周长为

$$AB+AC+BC=10x+4\sqrt{5}=20+4\sqrt{5}.$$

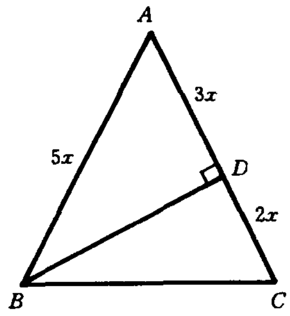

图 1-3

例 4 如图 1-4，已知正方形$ABCD$的边长是 10，E是CD边的中点，AE的垂直平分线交AB的延长线于F，EF交BC于N. 求BN和CN的长．

分析：由于正方形$ABCD$的边长是 10，所以可设$BN=x$，则$CN=10-x$，此时需要通过$\mathrm{Rt}\triangle BNF\backsim\mathrm{Rt}\triangle CNE$，

用 x 的代数式表示出 BF 的长.但过程较为麻烦.根据 $\text{Rt}\triangle BNF \backsim \text{Rt}\triangle CNE$,可设 $BF=x$,由 $CE=5$,容易表示 EF 等线段长,所以本题根据特殊的线段位置关系,使用间接设法较为方便.

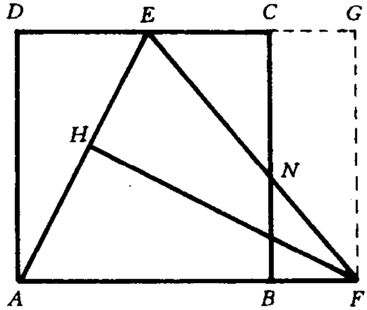

图 1-4

解:过 F 作 $FG\perp AF$ 与 DC 的延长线交于 G.

设 $BF=x$,则 $AF=10+x$,$EG=5+x$.

在 $\text{Rt}\triangle EFG$ 中,有

$$EF^2=EG^2+FG^2.$$

$$\because \quad EF=AF,$$

$$\therefore \quad (10+x)^2=(5+x)^2+10^2.$$

解之,得 $x=\dfrac{5}{2}$,即 $BF=\dfrac{5}{2}$.

$$\because \quad \text{Rt}\triangle BNF \backsim \text{Rt}\triangle CNE,$$

$$\therefore \quad \frac{BN}{CN}=\frac{\frac{5}{2}}{5}=\frac{1}{2}.$$

$$\therefore \quad BN=\frac{10}{3},\ CN=\frac{20}{3}.$$

用方程的思想解几何计算题的关键是找出几何量间的相等关系.有些题目的相等关系容易由已知条件或根据定理、公式得到.但有些题目的相等关系并不能直接得到,需要从已知条件结合相应图形,努力挖掘隐含条件.

例 5 在$\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90°$,D,E 都在 AB 上,且 $AD=AC$,$BE=BC$.求$\angle DCE$ 的度数.

分析：如图 1-5，已知 Rt$\triangle ABC$，要求$\angle DCE$ 的度数，则需要挖掘和使用“锐角互余”关系，即 $\angle A+\angle B=90°$.

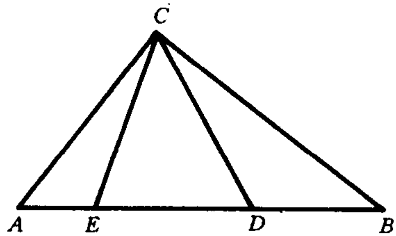

图 1-5

解：设$\angle DCE$ 的度数为 x，在$\triangle ACD$ 中，

$\angle ADC=90°-\frac{1}{2}\angle A$，

在$\triangle BCE$ 中，$\angle BEC=90°-\frac{1}{2}\angle B$.

在$\triangle CDE$ 中，有

$$x+90°-\frac{1}{2}\angle A+90°-\frac{1}{2}\angle B=180°.$$

$$\therefore \quad x=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)=45°.$$

例 6 如图 1-6，在$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，它的内切圆与两条直角边 AC，BC 及斜边分别于切于 D、E、F. 且 $AF=3$，$BF=4$，求$\triangle ABC$ 的面积．

分析：要求$\triangle ABC$ 的面积，只要求出直角边AC和BC的长．由于已知条件涉及到直角三角形的内切圆，所以应利用切线长定理及勾股定理求出内切圆半径 r. 也就是 $(3+r)^2+(4+r)^2=49$.

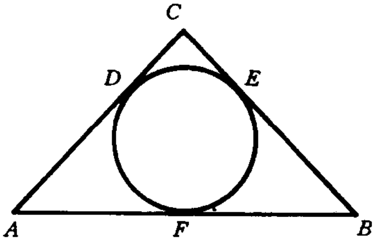

图 1-6

但运算较复杂，若继续深挖隐含条件，就可以获得简捷解法．

解：设 $BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，则