广西人民出版社

中学生复习丛书

数学

下册

中学生复习丛书

数　　学

（下册）

广西中小学教材编写组

广西人民出版社

数　学（下）
广西中小学教材编写组
☆
广西人民出版社出版
（南宁市河堤路14号）
广西新华书店发行　广西民族印刷厂印刷
787×1092　1/32　8.25印张　185千字
1979年3月第1版　1979年3月第1次印刷
印　数：1—300,000册
书号 7113·297　定价 0.58 元

目　录

平 面 几 何

平面几何的研究对象是最基本、最常用的平面图形，它的主要内容是应用逻辑推理的方法研究图形的性质及其判定，同时也应用代数方法来讨论图形的问题。

这部分主要复习有关直线形与圆的重要概念及性质，直线形包括线段、射线、角、三角形、多边形等内容，它是学习几何其它部分的基础；圆包括圆的基本概念、性质以及圆的图形，它除了在日常生活中有广泛应用外，也是学习圆锥曲线和球的基础；此外还编入“轨迹与作图”、“几何论证基本知识”两章，集中介绍常见的几种轨迹、作图问题和逻辑推理的基础知识，这些知识对深入理解平面几何的内容以及进一步学习都是很必要的。

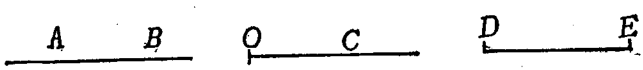
第一章 直线形

直线形是最基本的几何图形，它包括直线、射线、线段、角、三角形和四边形等。本章从复习直线形的重要概念和基本性质着手，举例说明如何运用逻辑推理的方法，解决有关直线形的证明和计算等问题。

一　基本概念

（一）直线、射线、线段

1.直线是平面几何的基本元素，通常不予定义．如图1—1，直线AB向两方无限伸长，没有端点；射线OC向一方无限伸长，有一个端点；线段DE有两个端点，射线和线段都是直线的一部分．



直线　　射线　　线段

图　1—1

2.直线和线段的基本性质

（1）过两点可作一条直线，并且只可作一条直线．

（2）在连结两点的线中，线段最短．

3.线段的比和比例线段

（1）用同一长度单位去量两条线段所得量数的比，叫做这两条线段的比．注意：两条线段的比与所选用的长度单位无关．

对于a、b、c、d四条线段，若$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，则a、b、c、d叫做成比例的线段．b、c叫做比例内项；a、d叫做比例外项；d叫做a、b、c的第四比例项．

（3）比例的性质

a）若$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，则$ad=bc$　（等积定理）。

b）若$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，则$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$　（反比定理）。

c）若$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，则$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$或$\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$　（更比定理）。

d）若$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，则$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$　（合比定理）。

e）若$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，则$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$　（分比定理）。

f）若$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，则$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$　（合分比定理）。

g）若$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots\cdots$，

则$\frac{a+c+e+\cdots\cdots}{b+d+f+\cdots\cdots}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots\cdots$（等比定理）。

（4）比例中项

若有线段a、b、c，且$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$，则$b^2=ac$。b叫做a和c的比例中项。

（二）角

1.角的两种定义方式

（1）由一点引出两条射线所组成的图形叫做角。

（2）由一条射线绕着它的端点从原来的位置旋转到另一位置所得到的图形叫做角。

2.角的度量

（1）角度制　一个圆周的$\frac{1}{360}$是1度的弧，它所对的

圆心角是1度的角（图 1—2 甲），度量角的单位是度、分、秒，并且规定 $1^\circ=60'$，$1'=60''$。“60进位”是这个制度的特点。

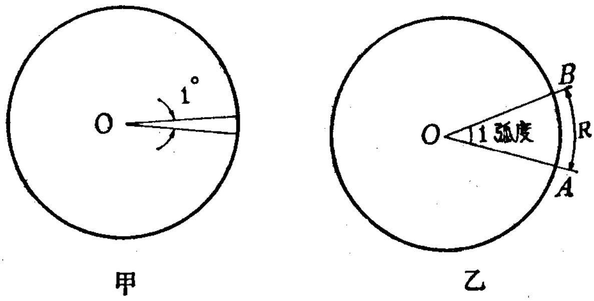


图 1—2

（2）弧度制　另一种量角的单位．规定：如果圆心角 AOB 所对的 $\overset{\frown}{AB}$（注意：这里是 $\overset{\frown}{AB}$，不是弦 AB！）长恰好等于半径 R，那么圆心角 AOB 是一个单位角，并且把它叫做1弧度的角（图 1—2 乙）．用弧度作单位来量角的制度叫做弧度制．

度，分，秒是量角的单位，弧度也是量角的单位，这两种单位之间关系是：2π弧度 $=360^\circ$．

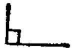
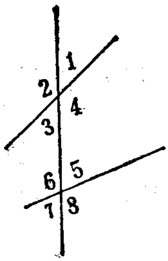
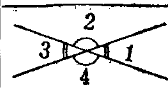
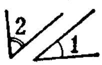
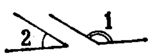
$$\text{因此，}\quad 1\text{弧度}=\frac{180^\circ}{\pi}$$

$$\approx 57.29587^\circ.$$

$$\text{或}\quad 1^\circ=\frac{\pi}{180}\text{弧度}$$

$$\approx 0.017453\text{弧度}.$$

3.角的大小和相关的角

分类	名称	图示	含义	备注
大小定量的角（单个）	锐角		$0° <$ 锐角 $< 90°$	
	直角		直角 $= 90°$	
	钝角		$90° <$ 钝角 $< 180°$	
	平角		平角 $= 180°$	
	周角		周角 $= 360°$	
位置相关的角（两个）	邻角		$\angle\alpha$ 和 $\angle\beta$ 互为邻角	顶点和一边公用，不相含.
	同位角		$\angle 1$ 和 $\angle 5$，$\angle 4$ 和 $\angle 8$，$\angle 2$ 和 $\angle 6$，$\angle 3$ 和 $\angle 7$	
	内错角		$\angle 3$ 和 $\angle 5$，$\angle 4$ 和 $\angle 6$	
	外错角		$\angle 1$ 和 $\angle 7$，$\angle 2$ 和 $\angle 8$	
	同旁内角		$\angle 3$ 和 $\angle 6$，$\angle 4$ 和 $\angle 5$	
	同旁外角		$\angle 1$ 和 $\angle 8$，$\angle 2$ 和 $\angle 7$	
	对顶角		$\angle 1$ 和 $\angle 3$ $\angle 2$ 和 $\angle 4$	
大小相关的角（两个）	余角		$\angle 1$ 和 $\angle 2$ 互为余角	$\angle 1 + \angle 2 = 90°$
	补角		$\angle 1$ 和 $\angle 2$ 互为补角	$\angle 1 + \angle 2 = 180°$
	邻补角		$\angle 1$ 和 $\angle 2$ 互为邻补角	具有邻角和补角的性质

4.角的平分线

（1）定义　把一个角分成相等的两部分的射线，叫做这个角的平分线.

（2）性质　角的平分线上任一点到这个角的两边距离相等；反之，到一个角的两边距离相等的点，在这个角的平分线上.

5.一些相关的角的重要性质：

（1）对顶角相等；

（2）同角（或等角）的余角相等；

（3）同角（或等角）的补角相等；

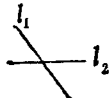
（4）两边分别垂直（或平行）的两锐角相等；

（5）两边分别垂直(或平行）的一锐角和一钝角互补.

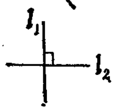
（三）同一平面内两直线的位置关系

1.重合——两直线有两个公共点就重合.

2.相交——两直线只有一个公共点——



交角$\neq 90°$叫斜交；



交角$=90°$叫垂直.

（1）垂线

定义　相交成直角的两条直线中的一条叫做另一条的垂线；它们的交点叫做垂足.

性质　①过直线外或直线上一点可作已知直线的垂线，并且只可作一条垂线.

②在连结直线外一点到直线上各点的线段中，以垂直于直线的线段为最短.

（2）线段的垂直平分线

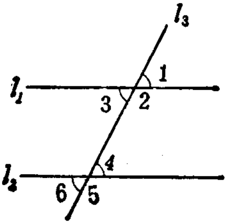
①定义　过线段中点且垂直于线段的直线，叫做这条线段的垂直平分线（也叫这线段的中垂线）.

②性质　线段的垂直平分线上任一点到这线段两端的距离相等；反之，到一条线段的两端距离相等的点，在这线段的垂直平分线上.

3.平行——同一平面内不相交的两条直线叫互相平行；互相平行的两条直线叫做平行线.

（1）平行线的判定

①如图1—3所示，设直线l_1，l_2被l_3所截：



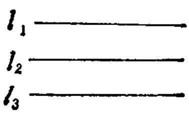
若$\angle 1=\angle 4$，则$l_1 /\!/ l_2$；

若$\angle 3=\angle 4$（或$\angle 1=\angle 6$），则$l_1 /\!/ l_2$；

若$\angle 2+\angle 4=180^\circ$（或$\angle 1+\angle 5=180^\circ$），则$l_1 /\!/ l_2$.

图　1—3

②如图1—4所示：

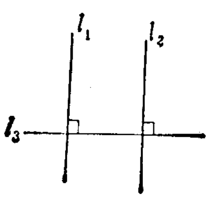


若　$l_1 /\!/ l_3$，$l_2 /\!/ l_3$，

则　$l_1 /\!/ l_2$.

图　1—4

③如图1—5所示：



若　$l_1 \perp l_3$，$l_2 \perp l_3$，

则　$l_1 /\!/ l_2$.

图1—5

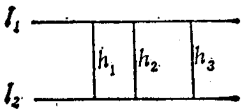
（2）平行线的性质

①过直线外一点，只能作一条直线和已知直线平行；

②若两平行直线与第三条直线相交，则同位角相等，内错角相等，外错角相等，同旁内角互补，同旁外角互补；

③垂直于两平行线之一的直线，必垂直于另一直线；

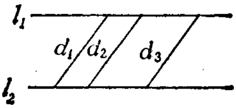
④两平行线间距离处处相等（图1—6）；



$h_1 = h_2 = h_3 = \cdots\cdots$

图1—6

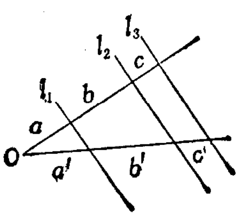
⑤夹在平行线间的平行线段相等（图1—7）。



$d_1 = d_2 = d_3 = \cdots\cdots$

图1—7

⑥一组平行线截角的两边所得的线段对应成比例（图1—8）；特殊地，当某组平行线截角的一边得相等线段时，在另一边也截得相等的线段（图1—9）。



若$l_1 /\!/ l_2 /\!/ l_3$，

则$\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} = \cdots\cdots$

图1—8

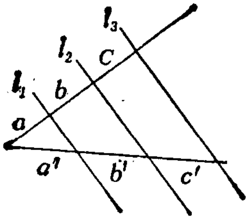


图 1—9

若 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$，
且$a = b = c = \cdots\cdots$
则 $a' = b' = c' = \cdots\cdots$

（四）几个距离的概念

1. 两点间的距离——连结两点的线段的长。

2. 点到直线的距离——从直线外的点向直线作垂线，这点和垂足间线段的长。

3. 平行线间的距离——夹在两平行线间的垂直线段的长。

（五）射影的概念

1. 从一点向直线作垂线，垂足叫这一点在直线上的射影。

2. 从一条线段的两个端点向直线作垂线，垂足间线段的长叫做这条线段在直线上的射影(图 1—10)。

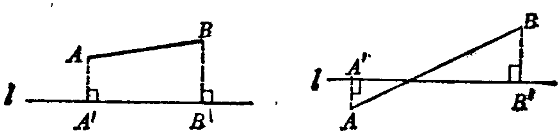


图 1—10

特殊地，当线段和直线成直角时，它在直线上的射影是一个点（垂足）。(图 1—11)

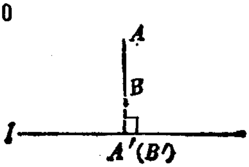


图 1—11

二　三角形

（一）三角形的概念

1.三角形——三条线段首尾相连接组成的平面封闭图形（图1—12）.

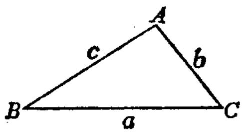
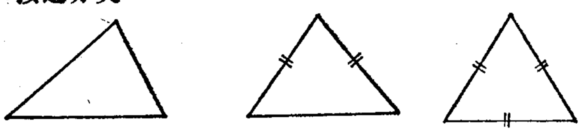


图　1—12

2.三角形的基本元素——三边（a、b、c）和三个角（$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$）.

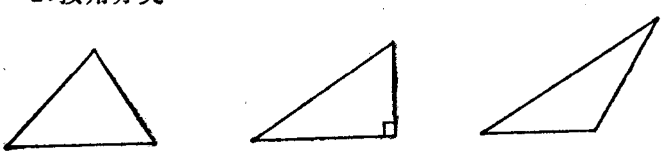
（二）三角形的分类

1.按边分类



不等边三角形　　等腰三角形　　等边三角形

2.按角分类



锐角三角形　　直角三角形　　钝角三角形

图　1—13

（三）三角形的边角关系

1.角与角的关系

（1）$\triangle ABC$中，$\angle A+\angle B+\angle C=180°$.（内角和定理）

（2）$\triangle ABC$中，任一外角等于不相邻的两个内角的和，而大于任一个不相邻的内角.（三角形外角的性质）

2.边与边的关系

在一个三角形中，任意两边的和（差）大于（小于）第三边.

3.边与角的关系

在一个三角形中，$\begin{cases}(1)\text{等角对等边，}\\(2)\text{等边对等角，}\\(3)\text{大角对大边，}\\(4)\text{大边对大角.}\end{cases}$

（四）三角形的主要线段

1.三角形的中位线——连结三角形两边中点的线段.

性质：三角形中位线平行于这三角形的第三边，并且等于第三边的一半.

2.三角形的内角平分线——平分三角形任一内角并以这个角的对边为界的线段.

性质：（1）三角形三个内角平分线相交于一点，这一点到三角形三边的距离相等.

（2）三角形任一内角平分线分对边得两线段与两邻边成比例.

性质（2）证明如下：

已知：在$\triangle ABC$中，AD平分$\angle BAC$（图1—14）。

求证：$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}$.

证明：作$CE /\!/ AD$交BA延长线于E.则$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AE}$.

$\because$ AD平分$\angle BAC$，$\therefore \angle 1=\angle 2$.

而 $\angle E=\angle 1$，

$\angle ACE=\angle 2$（平行线性质），

$\therefore$ $\angle E=\angle ACE$，

$\therefore$ $AC=AE$.

故 $\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}$（等量代换）.

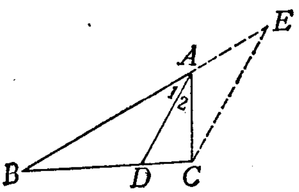


图 1—14

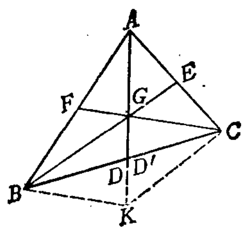


图 1—15

3.三角形的中线——连结三角形任一顶点和对边中点的线段.

性质：三角形三边的中线相交于一点，这一点到各边中点的距离，等于这边上中线的三分之一.

中线性质的证明如下：

已知：在$\triangle ABC$中，AD、BE、CF分别是BC、AC、AB边上的中线（图1—15）。

求证：（1）AD、BE、CF相交于一点G。

（2）$GD=\frac{1}{3}AD, GE=\frac{1}{3}BE, GF=\frac{1}{3}CF$。

证明：设中线BE、CF相交于G点，连结AG并延长交BC于D'；又作$BK/\!/CF$交AD'延长线于K，连结CK，

$\because AF=FB$，

$\therefore AG=GK$（平行线的性质）。

又$\because AE=EC$，

$\therefore CK/\!/BE$（三角形中位线性质）。

$\therefore$四边形$GBKC$是平行四边形.

$\therefore BD'=D'C,\quad GD'=D'K$。

就是说，延长AG交BC于D'的线段AD'即是BC边的中线AD，即BE、CF、AD相交于一点G。

又$\because AG=GK=2GD$，

$\therefore AD=AG+GD=3GD$，

故 $GD=\frac{1}{3}AD$。

同理可证：$GE=\frac{1}{3}BE,\quad GF=\frac{1}{3}CF$。

说明：要证中线AD、BE、CF相交于一点，证法不止一种，上述证明采用"同一法"，它是间接证法的一种。先作中线BE、CF相交于一点G，连结AG并延长交BC于D'，然后证明AD'就是原来已知的BC的中线（"同一"）就可以了。

4.三角形的高——从三角形任一顶点向对边（或对边延长线）作垂线，顶点到垂足间的线段。