高等学校教学用书

计算结构动力学

JISUAN JIEGOU DONGLIXUE

林家浩 曲乃泗 孙焕纯 编著

高等教育出版社

高等学校教学用书

计算结构动力学

林家浩　曲乃泗　孙焕纯　编著

高等教育出版社

内 容 提 要

本书介绍了结构动力分析中最有用的手算及电算方法，尤其偏重后者。不少素材是作者在长期的教学、科研及工程实践中提炼出来的。对每种方法的叙述都力求简明清晰，易学易用，并有大量解释性例子。书末附有一定数量的习题(附答案)供复习巩固之用。

本书可供力学、土建、机械、航空、船舶等专业的大学生、研究生及工程技术人员使用。

高等学校教学用书

计算结构动力学

林家浩　曲乃泗　孙焕纯　编著

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷三厂印刷

*

开本 850×1168 1/32　印张 10.125　字数 240 000

1989 年 2 月第 1 版　1989 年 2 月第 1 次印刷

印数 00 001—01 340

ISBN7-04-000066-0/TU·2

定价 2.95 元

前　言

结构的动力计算是工程中十分重要的问题。五十年代以前，由于数学工具的限制，工程人员往往满足于将复杂的结构简化为少数几个自由度的体系，按最简单的方法或经验公式进行计算。虽不免粗糙，亦别无良策。近二十多年来，航空、航天、机械、动力、运输工具、建筑等部门，都出现了技术上的飞跃，也提出了许多新的动力问题。例如，高转速、高精度旋转设备要求精确的动力设计，高层建筑要认真考虑抗震能力，等等。而电子计算机的出现和迅速发展则为这些要求提供了有效的解决手段。可以说，结构动力学的发展方向已由原来偏重于解析、变分等手段，而改变为主要偏重于矩阵方法，出现了许多新的计算手段。但这一重要的进展在当前国内有关动力计算的著作中还体现得不够，难以满足工程技术人员在这方面的迫切要求。

本书的主要目的在于使学习工程结构的学生及从事实际工作的技术人员能尽快地掌握结构动力计算的矩阵方法，并付诸应用。考虑到多数学生及工程技术人员对结构振动的知识比较缺乏，所以对工程振动的基本概念及方法亦作了简要的介绍。这也便于在电算手段不具备时，也可以有办法应付工程结构振动问题的简化计算。因此，本书不过分追求数学推导之严格完整，而着重将处理工程振动的一些有效方法力求深入浅出，直观明了地介绍给读者。

本书由河海大学杨仲侯、同济大学石洞同志审阅，钱令希教授、钟万勰教授对本书的编写给予了许多鼓励和帮助，对此，编者表示衷心感谢。限于作者的水平，疏误之处在所难免，恳求各专家、读者多加指正。

目　录

第一章　单自由度体系的振动……1
第一节　体系的自由度……1
第二节　无阻尼自由振动……3
第三节　考虑阻尼作用的自由振动……9
第四节　无阻尼强迫振动……15
第五节　考虑阻尼作用的强迫振动……20
第六节　由基础运动引起的强迫振动……28
第二章　多自由度体系的振动……32
第一节　两个自由度体系的振动……32
第二节　多自由度体系自由振动的矩阵表达……40
第三节　多自由度体系自振特性的进一步讨论……56
第四节　多自由度体系的强迫振动……68
第三章　弹性体的振动……76
第一节　杆的纵振、轴的扭振、梁的剪切振动……76
第二节　梁的弯曲振动……95
第三节　薄板的弯曲振动……105
第四节　弹性体的强迫振动……109
第四章　能量法与近似计算……113
第一节　弹性体的动能与应变能……113
第二节　建立运动方程的几种方法……130
第三节　代替质量法·动能等效原理……140
第四节　集中质量法与分散质量法……146
第五节　无限自由度体系的瑞雷-李兹法……151
第六节　有限自由度体系的瑞雷-李兹法……159
第七节　深梁、厚板动力特性的计算……175
第五章　离散化结构动力特性基本算法……183
第一节　有限单元法的基本概念……183
第二节　雅可比法……189

第三节　广义雅可比法……194
第四节　豪斯厚德三对角化方法……198
第五节　QL 算法……204
第六节　逆迭代方法……213
第七节　三对角矩阵特征值的计算(司特姆序列)……222
第八　迁移矩阵方法……226
第九节　逐阶滤频法……232

第六章　复杂结构动力特性分析……237

第一节　子空间迭代法……237
第二节　对奇异的刚度阵之处理及质量约化……245
第三节　模态综合法……251
第四节　界面位移凝聚法……268
第五节　振型分解法(比例阻尼)……283
第六节　考虑阻尼的结构自由振动……293
第七节　振型分解法(非比例阻尼)……301
第八节　大型程序系统研制技术……303

习题及答案……308

参考文献……317

第一章　单自由度体系的振动

第一节　体系的自由度

体系在运动过程中任一瞬间，要确定其全部质量位置所必需的独立参数的数目，称为这个体系的**自由度**，或**动力自由度**。

例如图 1-1 所示的单摆和图 1-2 所示的系统(无重弹簧下悬挂质量 m, m 只能沿 y 轴方向作上下运动)，都是单自由度体系。图

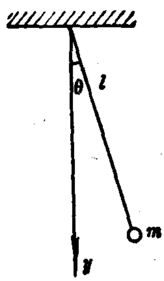

图 1-1

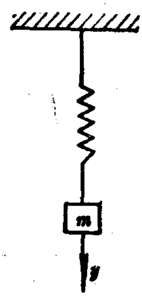

图 1-2

1-3 所示系统，k_1, k_2 是无重弹簧，m_1、m_2 只能上下运动，则是二自由度体系。图 1-4 所示弦的横向振动是无限自由度体系的例子。图 1-5 所示无限刚劲梁，一端铰支，亦属单自由度体系。因为只要 φ 值一确定，则梁上每点的位置就都确定了。

在静力学中，一个物体的自由度，通常定义为确定这物体在空间中的位置，以及全部变形状态所需要的独立参数数目。一般说来，一个物体被简化成力学模型后，其上述二种自由度常常是相等

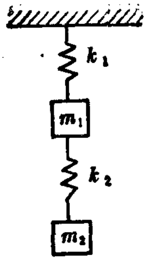

图 1-3

图 1-4

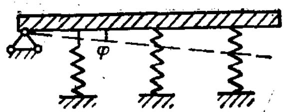

图 1-5

的。事实上，我们在建立动力计算模型时，总可以按每一静力自由度布置一个相应的质量，从而使该二种自由度相等。但是在大量工程问题中，常对质量分布作出较为简化的假定，而导致二种自由度的不同。例如，若图 1-5 中的梁符合材料力学的假定，其刚度 EI 是一有限值。而梁的质量被化成四个质点(不计转动惯量)集中到右端及与三个弹簧连接的点上，全梁分成四段以建立有限元模型。这样，为确定全部质量位置只须四个参数(节点横向位移)，故动力自由度为 4。但为确定梁的位置及变形状态，须五个节点的转角及四个横向线位移，即静力自由度为 9。但我们应该认识到，对于客观的物体来说，其空间位置及内部变形实际上都与质量相关联。亦即，二种自由度本应该是相等的。之所以发生上述自由度不相等的情况，只是由于建立简化力学模型而产生的，是为了数学处理的方便而人为地造成的。因此，在动力问题中，当涉及到自由度时，我们应先搞清楚是指哪种意义的自由度。

在本书的最后几章中可以看到，当用有限元法求解动力问题时，其静力自由度通常相当于总刚度阵的阶数，而动力自由度相当于总质量阵的秩数。例如第六章图 6-8 所示平面框架有 40 个可动节点，每个节点有 3 个静力自由度(2 个线位移及 1 个转角)，故

该框架有 120 个静力自由度。在进行动力计算时，通常将集中于每个节点的转动惯量忽略掉，这时，每个可动节点，只有 2 个动力自由度，该框架有 80 个动力自由度。

第二节　无阻尼自由振动

体系振动时，总要受到材料内部的摩擦阻力，以及体系与介质间、各构件间的摩擦，因而使振动逐渐趋于衰减。这些阻力的作用，称为**阻尼**作用。在本节的讨论中暂不考虑阻尼的作用。

不管体系发生振动的原因如何，如果发生振动以后，就不再受外部的干扰(阻尼除外)，这样的振动称为**自由振动**。例如拨一下琴弦，弦就作自由振动而发生音响。反之，体系因持续地受到外部干扰作用而发生的振动，就称为**强迫振动**。例如电动机引起楼板的振动。

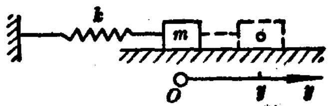

图　1-6

以图 1-6 所示弹簧质量系统来说明无阻尼自由振动。这是一端固定，另一端为集中质量 m，中间以弹簧相联，弹簧本身的质量比起 m 来甚小，可以忽略不计。m 只能沿 y 方向往复运动，且假定 m 与支承面间为光滑接触，摩擦力可忽略不计。在弹簧不变形时，m 的位置(指 m 质心的位置)取为 y 轴的原点，我们称这点为该振动体系的平衡位置。

为研究质量振动规律，就要利用我们已掌握的知识来分析振动过程中质量、弹簧变形量、速度、加速度的关系。假如图 1-6 的体系发生了振动，设弹簧的刚度系数为 k，在某一瞬时，m 处于位置 y 处，则此时物体的速度为 $\dot{y}$，加速度为 $\ddot{y}$，(习惯上常用 $\dot{y}$ 代表 $\frac{dy}{dt}$，$\ddot{y}$ 代表 $\frac{d^2y}{dt^2}$)，而弹簧的变形量则为 y。当物体在原点右方(即 y

>0)时，弹簧对物体的拉力指向 y 轴的负向。而当物体在原点左方($y<0$)时，弹簧给予物体的力则指向 y 轴的正向。所以弹簧给予物体的力应为：$F=-ky$，负号表示 F 与 y 总是异号的。

当物体 m 处于任一位置 y 时，它所具有的加速度 $\ddot{y}$ 仅仅是由弹簧力所造成的，根据牛顿第二运动定律，对该系统来说，可知：

$$F=m\ddot{y}$$

即
$$-ky=m\ddot{y}$$

或
$$m\ddot{y}+ky=0 \tag{1.2.1}$$

若令
$$\omega^2=\frac{k}{m} \tag{1.2.2}$$

则(1.2.1)式可记作

$$\ddot{y}+\omega^2y=0 \tag{1.2.1a}$$

这是一个二阶线性常微分方程，其通解可表为：

$$y=A_1\sin\omega t+A_2\cos\omega t \tag{1.2.3}$$

A_1、A_2 是待定常数，取决于振动初始条件。

由(1.2.3)式可以看出，当不考虑阻尼作用时，y 的值总是随着时间的增加周而复始，永远循环不已地改变的。这种振动称为**简谐振动**(或称**谐和振动**)。当时间 t 增加 $\frac{2\pi}{\omega}$ 的整数倍，达到 $t+\frac{2\pi}{\omega}\cdot n$ 时，(1.2.3)式的值将完全不变。例如对(1.2.3)式第一项：

$$\sin\omega t=\sin(\omega t+2n\pi)=\sin\omega\left(t+\frac{2n\pi}{\omega}\right)$$

可见 t 变到 $t+\frac{2n\pi}{\omega}$ 时，(1.2.3)式第一项的值不变。同理可知其第二项的值也不变。

这种振动属于周期性的振动。$\frac{2\pi}{\omega}$ 称作体系的**振动周期**或**自**

振周期，通常以 T 表示：

$$T=\frac{2\pi}{\omega}(\text{秒}) \tag{1.2.4}$$

它表示体系振动一次所需时间的长短。

每秒钟内体系振动的次数，叫做该体系的**自振频率**，通常以 f 表示，显然：

$$f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}(\text{周/秒或 Hz}) \tag{1.2.5}$$

它以赫兹（简记为赫或 Hz）为计算单位。

由(1.2.5)式可见 $\omega=2\pi f$。ω 称为体系的**自振圆频率或自振角频率**，但在使用中，习惯上也常把 ω 叫做自振频率，所以在接触到自振频率这一名词时，必须仔细弄清是指 f 还是指 ω，日常用电每秒 50 周，是指 $f=50$(Hz)，相当于 $\omega=100\pi$ (秒$^{-1}$)。如果某质点每秒旋转 50 个圆周，则相当于每秒旋转的角度是 $50\times2\pi=100\pi$，这就是角频率的含意。由于角度是无量纲的，所以 ω 的单位是 1/秒或秒$^{-1}$ 或弧度/秒。从(1.2.2)式可见，当振动体系的质量 m 增加时，将引起自振频率（不论是 ω 还是 f）下降，而当刚度 k 增加时，将引起 ω 或 f 增加。一切弹性振动体系都是这样。我们在处理工程实际问题时，如果要想提高某结构的自振频率，就可以从这两方面设法：或者提高结构的刚度（例如增加约束，采用刚度大的构件等）；或者减小结构的重量（例如改用轻质材料）。在不大可能用计算来处理实际问题时，用这样的概念来处理问题是很重要的。即使进行了实际计算，用上述概念来判断计算是否合理，也是经常会碰到的。

在学习结构动力学这门课时，应该经常熟记并运用这一规律。

例 1.1 在图 1-6 中，假若物块的质量是 $m=1$ 千克。今用 $F=49$ 牛的力沿 y 轴正向作用于物体上，使弹簧获得静伸长 $\Delta=1$

厘米。当 $t=0$ 时，将拉力卸掉。试计算 $t>0$ 时物块的运动规律。

解:

由 $F=k\cdot\Delta$ 知 $$k=\frac{F}{\Delta}$$

将上式代入(1.2.2)，得

$$\omega^2=\frac{k}{m}=\frac{F/\Delta}{m}=\frac{49/0.01}{1}=4900(1/秒^2)$$

$\therefore$ $$\omega=70(1/秒)$$

或 $$f=\frac{70}{2\pi}=11.1(赫)$$

由(1.2.3)，方程的通解为:

$$y=A_1\sin\omega t+A_2\cos\omega t$$

代入初始条件:

当 $t=0$ 时，$\dot{y}=0$，$y=\Delta=1$(厘米)

即: $$\dot{y}=[A_1\omega\cos\omega t-A_2\omega\sin\omega t]_{t=0}=0$$

$$y=[A_1\sin\omega t+A_2\cos\omega t]_{t=0}=\Delta$$

或 $$A_1\omega\cdot1-A_2\cdot0=0$$

$$A_1\cdot0+A_2\cdot1=\Delta$$

$\therefore$ $$A_1=0$$

$$A_2=\Delta$$

即 $$y=\Delta\cdot\cos\omega t=1\cdot\cos\omega t$$

上述例题是初始速度为 0 的情况。在更一般的情况下，初始位移、初始速度都不为零，即:

当 $t=0$ 时，$y=y_0$， $\dot{y}=v_0$

其中 y_0，v_0 都是已知量。我们仿照例 1.1，可以求得(请自行证明):

$$A_1=\frac{v_0}{\omega},\quad A_2=y_0$$

或

$$y=y_0\cos\omega t+\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t \tag{1.2.6}$$

若令 $v_0=0, y_0=\Delta=1$，立即得到例 1.1 最后的结果。

如果在单位拉力作用下，刚度系数为 k 的弹簧的静伸长是 δ，由刚度系数的定义，知

$$1=k\cdot\delta \quad 或 \quad k=\frac{1}{\delta} \tag{1.2.7}$$

以(1.2.7)式代入(1.2.2)式，可得

$$\omega^2=\frac{k}{m}=\frac{1}{m\delta}=\frac{g}{mg\delta}=\frac{g}{y_{st}} \tag{1.2.8}$$

上式中 $y_{st}=mg\cdot\delta$ 表示弹簧两端作用拉力 mg（等于图 1-2 中物体的重量 W）时的静伸长。这是一个很有用的结论。还可把 y_{st} 写成下列形式：

$$y_{st}=mg\cdot\delta=\frac{mg}{k}=\frac{W}{k} \tag{1.2.8a}$$

例 1.2 在图 1-2 中，假如原先并未悬挂重物，后由于悬挂重物 m 而使弹簧产生了静伸长 $y_{st}=0.8$ 厘米。求悬挂重物后系统的自振频率。

解：虽然并不知道重物的质量 m 是多少，也不知道弹簧的 k 值，但很容易由(1.2.8)式求出 ω 值：

$$\omega^2=\frac{g}{y_{st}}=\frac{9.8\ 米/秒^2}{0.008\ 米}=1225(1/秒^2)$$

$$\therefore \qquad \omega=35(1/秒)$$

$$或 \qquad f=\frac{35}{2\pi}=5.57(赫)$$

振动方程的通解：

$$y=A_1\sin\omega t+A_2\cos\omega t \tag{1.2.3}$$

还可用另一个常用的写法来表示：

令
$$\begin{aligned} A_1 &= A\cos\varphi \\ A_2 &= A\sin\varphi \end{aligned} \tag{1.2.9}$$

代入(1.2.3)式，可得

$$y = A\sin(\omega t+\varphi) \tag{1.2.10}$$

为了弄清 A 与 φ 的力学意义，现以 t 为横坐标，y 为纵坐标，根据(1.2.10)式绘得时间-位移曲线如图 1-7 所示。

在(1.2.10)式中，$A=y_{max}$，它表示质量 m(参阅图 1-6)偏离平衡位置的最大距离。

在图 1-7 中，曲线上任意一点的纵坐标，表示在相应时刻 t 时，质量 m 偏离平衡位置的距离。在各波峰与波谷处，偏离平衡位置的距离最远，按绝对值计，距离都为 A。A 叫做振动的**振幅**。在波峰与波谷处，$y=\pm A$。由(1.2.10)式知 $\sin(\omega t+\varphi)=\pm 1$，亦即在波峰处，$y=+A$ 时：

$$\omega t+\varphi = 2n\pi+\frac{\pi}{2} \tag{1.2.11}$$

在波谷处，$y=-A$ 时：

$$\omega t+\varphi = 2n\pi+\frac{3\pi}{2} \tag{1.2.12}$$

也容易理解，当质量 m 经过平衡位置时，

$$y = A\sin(\omega t+\varphi)=0$$

即
$$\omega t+\varphi = n\pi \tag{1.2.13}$$

$(\omega t+\varphi)$ 叫做**相角**，φ 叫**初相角**(即 $t=0$ 时的相角)。

由(1.2.9)式容易证明：

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2} \tag{1.2.14}$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{A_2}{A_1}$$

所以知道了 A_1 与 A_2，就容易求出 A 与 φ；反之亦然。

关于振动方程的通解(1.2.10)式及图 1-7，还可用一个回转半径的图象来理解，见图 1-8。

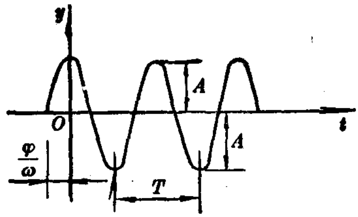

图 1-7

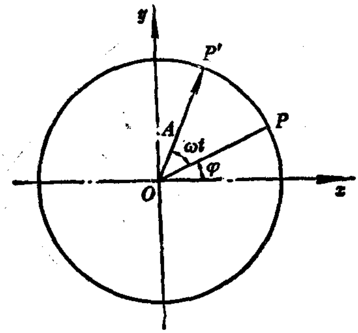

图 1-8

设长度为 A 的半径，在 $t=0$ 时从初始位置 OP 开始，以等角速度 ω 逆钟向旋转。在时刻 t 时，达到位置 OP'，这时该半径在 y 轴上的投影则为：

$$y=A\sin(\omega t+\varphi)$$

恰好是(1.2.10)式的形式。可见该回转半径在回转过程中，在 y 轴上投影的变化，正好描述了质量 m 相对平衡位置振动的情况。

从上面的讨论，可知振幅 A、初相角 φ 是由起始条件确定的；但自振频率 f(或 ω)及自振周期 T 则与起始条件无关，而仅由体系本身的刚度和质量来决定。

第三节　考虑阻尼作用的自由振动

前面已提到过，体系在振动过程中，总要受到各种阻尼的作用，所以自由振动将要逐渐衰减。上节中所述的稳定的谐和振动只是一种理想化的情况。

体系在振动时所受的阻尼作用，本来是极为复杂的。通常采

用**粘滞阻尼**假定(或称**胶质阻尼**假定),即:质量振动时所受的阻尼作用,与其运动速度成正比。若以 c 表示阻尼系数,R 表示阻尼力,则

$$R=-c\dot{y}=-c\frac{dy}{dt}$$

负号表示阻尼力恒与振动速度方向相反。c 越大,则质量振动时所受阻力也越大;当 $c=0$ 时,就成为无阻尼振动。c 的单位是(牛·秒/米)。

加入了阻尼作用之后,单自由度体系作自由振动时的微分方程(1.2.1)式将变成为:

$$m\ddot{y}+c\dot{y}+ky=0 \tag{1.3.1}$$

或

$$\ddot{y}+2\varepsilon\dot{y}+\omega^2y=0 \tag{1.3.2}$$

其中

$$\varepsilon=\frac{c}{2m} \qquad \omega^2=\frac{k}{m}$$

ε 称为**阻尼特性系数**,它可由实验测定。ε 的单位是(1/秒)。

现在来求解微分方程(1.3.2)。它的特征方程为:

$$S^2+2\varepsilon S+\omega^2=0 \tag{1.3.3}$$

(1.3.3)式的根是:

$$S_{1,2}=-\varepsilon\pm\sqrt{\varepsilon^2-\omega^2} \tag{1.3.4}$$

我们来考虑下列阻尼值的各种情形:

(1) 阻尼很大,即 $\varepsilon>\omega$。

由(1.3.4)式知 $S_2<S_1<0$,即特征根是两个不同的负数,方程(1.3.2)的解为:

$$y=c_1e^{S_1t}+c_2e^{S_2t} \tag{1.3.5}$$

(2) 阻尼很大,但 $\varepsilon=\omega$。

由(1.3.4)式知:$S_1=S_2=-\varepsilon$,即特征方程有二重负实根,这时方程(1.3.2)的解为:

$$y=e^{-\varepsilon t}(c_1+c_2t) \tag{1.3.6}$$

方程(1.3.5)与(1.3.6)表示的运动，都没有振动的特征。不难验证，当 t 增大时，y 值单调地趋于零，如图 1-9 所示。

(3) 阻尼不大，$\varepsilon<\omega$。

这时，特征方程的根为复数：

$$S_{1,2}=-\varepsilon\pm i\omega_\varepsilon$$

其中

$$\omega_\varepsilon=\sqrt{\omega^2-\varepsilon^2} \tag{1.3.7}$$

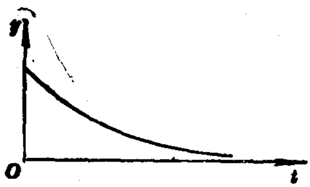

图 1-9

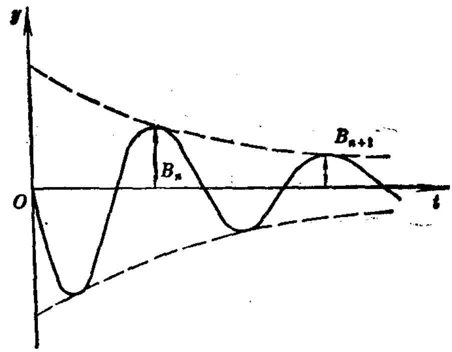

图 1-10

而微分方程(1.3.2)的通解为：

$$y=e^{-\varepsilon t}(B_1\sin\omega_\varepsilon t+B_2\cos\omega_\varepsilon t) \tag{1.3.8}$$

(1.3.8)式所表示的位移曲线如图 1-10 所示。由于阻尼的影响，振动将逐渐衰减直至静止。所以有阻尼的自由振动不是谐和振动或周期振动，可称为**等时振动**。但习惯上仍称 ω_ε 为**有阻尼频率**，称

$$T_\varepsilon=\frac{2\pi}{\omega_\varepsilon} \tag{1.3.9}$$

为**有阻尼周期**。

微分方程通解(1.3.8)式中的 B_1 及 B_2 是根据起始条件来确定的两个积分常数。假设当 $t=0$ 时：$y=y_0$，$\dot{y}=v_0$，不难验证：