家庭辅导丛书

第四册

初中代数家庭辅导

黄霭霖　陈敏成　谭　干　李统塘　编著

家庭辅导丛书

初中代数家庭辅导

（第四册）

黄霭霖　陈敏成
谭　干　李统塘
编著

科学普及出版社广州分社

初中代数家庭辅导

（第四册）

黄霭霖　陈敏成
谭　干　李统塘　编著

科学普及出版社广州分社出版发行
（广州市应元路大华街兴平里 8 号）
广东省新华书店经销
肇庆新华印刷厂印刷
开本：787×1092毫米 1/32　印张：3.875　字数：75千字
1989年 2 月第 1 版　　1989年 2 月第 1 次印刷
印数：1－8000册
ISBN 7－110－00880－0/G・220
定价：1.50元

前　言

为了帮助学生家长关注和辅导子女学好数学，我们编写了一套初中数学《家庭辅导丛书》（共六册）。本书是丛书代数第四册，它与初中数学课本代数第四册配合使用，内容包括：常用对数、函数及其图象、解三角形和统计初步。

本书紧扣教材的基本内容，并依其顺序分章进行编写，每章由以下四个部分组成：

一、辅导要求。这部分首先概述全章的主要内容，然后提出家庭辅导时的注意事项，作为辅导的主抓方向。

二、检查与辅导。这部分取材于课本的陈述、例题和习题，通过检查学生作业的方式，设计了具有典型性和广泛性的若干〔问题〕，以正反两面的分析手法，帮助家长去指导学生分清是非，加速他们对数学知识的领会、巩固和应用过程。

三、习题的答案和提示。这部分首先将习题中全部题目进行分类说明，然后给出答案。对较难或易混淆的习题作了提示。

四、辅导效果检查。这部分给家长提供一份检查性的试题（附有答案）。检查时可视贵子女的实际情况作取舍。

本书给出分辨是非的问题共39个，说理也不忌反复，目的在于指导家长如何辅导子女去掌握数学概念，形成合理的思考方法，提高解题能力。本书是学生家长进行家庭辅导的

有力助手，也适合于青年教师和学生阅读。

限于水平，本书不足或错误之处一定不少，我们诚恳地欢迎读者批评指正。

编　者

目　　录

第十三章　对数

一、辅导要求

本章的主要内容是对数、常用对数的概念和运算性质，以及利用对数性质进行计算。指数和对数是中学代数的一个重要组成部分。学习本章内容对于将来学好指数函数和对数函数、解决某些实际问题，都将起着重要作用。

本章的重点知识是对数计算。能够正确和熟练地进行对数计算的关键，在于掌握好对数的运算性质和含负首数的对数的计算。而要掌握对数的运算性质又在于透彻理解对数的定义。也就是说，正确理解对数的概念是学好本章知识的关键。

本章知识的难点有三个：（1）引进对数概念；（2）对数恒等式和含有负首数的对数运算；（3）真数为纯小数的常用对数查表法。为解决以上难点，在辅导时应注意以下几点：

（一）对数概念依赖于指数概念引出，应该尽多地借助具体例子来说明。例如：

“$2^3=?$”易知结果为8，即$2^3=8$，读作2的3次幂等于8。

“$2^?=8$”，也易知所求的数是3，记为$\log_2 8=3$，读作以2为底8的对数等于3。

同样，若$5^x=7$，则$x=\log_5 7$；若$10^y=100$则 $y=$

$\log_{10}100$，……一般地，若$a^b=N$，则$b=\log_a N$，读作以a为底N的对数。

求出象$\log_5 7$或$\log_{10}100$这样的值的运算，称为对数运算。

（2）要确切地理解对数概念，必须理解如下几点：

1.弄清对数式与指数式的关系（见课本第2页的关系图），可看下表：

	a	b	N
指数式$a^b=N$	底数	指数	幂
对数式$b=\log_a N$	底数	对数	真数

2."log"是运算符号，它不能独立写出，而须写成$\log_a N$的形式，正如运算符号"÷"、"$\sqrt{\ }$"等不能独立存在一样；当底数$a=10$时，"log"可缩写为"lg"，例如$\log_{10}3$记为lg3。

3. 牢记对数$\log_a N$中a、N的取值范围：

$a>0$且$a\neq 1$；$N>0$。

为什么要作这些规定呢？理由是：

（1）若$a<0$，则N为某些值时，b可能不存在。例如$b=\log_{(-2)}8$相当于$(-2)^b=8$，显然数b不存在。

（2）若$a=0$，则b也不存在或不确定。例如$b=\log_0 8$相当于$0^b=8$，显然数b也不存在；$b=\log_0 0$相当于$0^b=0$；则b无法确定。

（3）若$a=1$，则当N不为1时b不存在，例如$b=\log_1 8$相当于$1^b=8$；当$N=1$时b的值无法确定，例如$b=\log_1 1$相当于$1^b=1$。

由上面三点原因，故规定$a>0$且$a\neq 1$

（4）∵ $a>0$ 且 $a\neq1$，∴a^b不可是负数和零，即 $b=\log_aN$中的N必须大于零。

（三）由于引进对数概念，指数式和对数式就可以互化；

$$a^b=N \underset{N>0}{\overset{a>0\text{ 且 }a\neq1}{\rightleftarrows}} b=\log_aN$$

用右边的对数去换左边的b，便得到恒等式：

$$a^{\log_aN}=N$$

我们要灵活运用这个对数恒等式。例如

$10\log_{10}3=3$；$5\log_5 4=4$；$-5\log_5 4=5\log_5 4^{-1}=4^{-1}=\frac{1}{4}$；$4\log_2 5=(2^2)\log_2 5=2^2\log_2 5=2\log_2 5^2=25$；$(\frac{1}{3})\log_3 5=(3^{-1})\log_3 5=3-\log_3 5=5^{-1}=\frac{1}{5}$。

（四）为了方便查反对数表进行对数计算，我们约定任何一个常用对数要表示成（首数＋尾数）的形式，且尾数必须是正的纯小数或零。当首数是负数时尤其多加注意。例如

∵0.4771＝0＋0.4771，∴对数0.4771的首数是0，尾数是0.4771。

∵－1.6254＝－1－0.6254＝－2＋0.3746，

∴对数－1.6254的首数是－2，尾数是0.3746，简记为$\overline{2}.3746$。

可见，当对数是负数时，要区分它是否已经写成（首数＋尾数）的形式。$\overline{2}.3746$与－2.3746的意义不同，表示的实际值也不同。

（五）要弄清查对数表与查反对数表的联系和区别（下一部分有详细说明）。

二、检查与辅导

为了使学生理解和掌握本章的主要内容，我们把学生常常出现差错的问题、课本的重点知识及解题的规律性等，编成系列问题，供家长在家庭辅导时选用。

【问题1】 检查作业（课本第9页）习题一第2～3题是指数式与对数式的互化问题。学生若找不出它们之间的联系和区别，分不清各数的名称和式子的读法，就会出现这样或那样的错误。例如第2题第（1）小题、第3题第（1）小题：

2.（1）把指数式$4^x=16$化成对数式；3.（1）把对数式$\log_2 32=x$化为指数式。

可能有这样的解答：

2.（1）$x=\log_{16}4$；　3.（1）$32^x=2$。

这样的解答是不对的。他把各数的名称及它们之间的关系搞错了。我们知道，对数运算是指数运算的逆运算，即$a^b=N \Longleftrightarrow \log_a N=b$，对数里的对数b（真数N），也就是指数式里的指数b（幂N），它们的底数都不变。

正确的解答应该是：

2.（1）$x=\log_4 16=2$

3.（1）$2^x=32$，　$2^x=2^5$，　$x=5$。

由此可知：1. $\log_a N=b$只不过是$a^b=N$的改写，两者所表示的a、b、N三个数间的关系是一样的。也就是说，指数式和对数式的互相转化问题，在底数不变的条件下实质上就是指数与对数、幂（的值）与真数的互相转化。

2.在等式$\log_a N=b$中，已知a、N、b其中某两个数，可以求得第三个数，方法是把$\log_a N=b$化成$a^b=N$。

（1）已知a、b求N，是乘方运算。$N=a^b$，读作N是（等于）以a为底的b次幂；（2）已知N、b求a是开方运算。$a=\sqrt[b]{N}$，读作a是N的b次算术方根；（3）已知a、N求b对数运算，$b=\log_a N$，读作b是以a为底N的对数。

试解答下列各题：

1.把下列指数式写成对数式：

（1）$3^2=9$；　　（2）$10^{-1}=0.1$；

（3）$12^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{3}$；　　（4）$(\frac{1}{2})^{-1}=2$；

（5）$(\sqrt{2})^0=1$。

2.把下列对数式写成指数式：

（1）$\log_{16}4=\frac{1}{2}$；　　（2）$\log_2 32=5$；

（3）$\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}=1$；　　（4）$\log_9\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}$

【问题2】检查作业（课本第10页）习题一第4题是利用对数的运算性质取式子的对数问题，学生常因未牢固掌握对数的运算性质，往往在取式子的对数时，把分母的“式子的对数”搞错。例如第①、④小题。

用$\log_a x$，$\log_a y$，$\log_a z$，$\log_a(x+y)$，$\log_a(x-y)$表示下列各式：①$\log_a\frac{\sqrt{x}}{y^2z}$；④$\log_a\frac{xy}{x^2-y^2}$。

可能有这样的解答：

①原式$=\frac{1}{2}\log_a x-2\log_a y+\log_a z$；

④原式$=\log_a x+\log_a y-2\log_a x-2\log_a y$。

这样的解答是不对的。在①中搞错分母的第二个因式的对数的符号；在④中错在把分母"两数差的对数"化成"两个数的对数差"，因为"两数差的对数"是不能化简的。如果把x^2-y^2的对数化成$(x+y)(x-y)$的对数，还可以用积的对数性质进行化简。

正确的解答应该是：

①原式$=\log_a\sqrt{x}-\log_a y^2 z$

$$=\frac{1}{2}\log_a x-(2\log_a y+\log_a z)$$

$$=\frac{1}{2}\log_a x-2\log_a y-\log_a z;$$

④原式$=\log_a\dfrac{xy}{(x+y)(x-y)}$

$$=\log_a x+\log_a y-\log_a(x+y)(x-y)$$

$$=\log_a x+\log_a y-\log_a(x+y)-\log_a(x-y).$$

由此可知：（1）在利用"对数的运算性质"进行演算时，要注意一步步地进行；（2）当真数是分式时在写出分母各个因式的对数，必须注意这些式子的对数前面的符号是"负"的。

下面的运算对不对？为什么？

（1）$\log_a(M\pm N)=\log_a M\pm\log_a N$；

（2）$\log_a MN=\log_a M\cdot\log_a N$；

（3）$\log_a\dfrac{M}{N}=\dfrac{\log_a M}{\log_a N}$；

（4）$\log_a M^n = (\log_a M)^n$；

（5）$\log_2(-4)(-8) = \log_2(-4) + \log_2(-8)$。

提示：题（5）的$\log_2(-4)(-8)$是有意义的（∵真数$(-4)(-8)=32>0$，若它变为$\log_2(-4)+\log_2(-8)$则是错误的（∵$\log_2(-4)$与$\log_2(-8)$都没有意义）。正确的解法是：

方法一：$\log_2(-4)(-8)=\log_2 32=\log_2(4\times 8)$
$=\log_2 4+\log_2 8=2+3=5$

方法二：$\log_2(-4)(-8)=\log_2 32=\log_2 2^5=5\log_2 2$
$=5$

【问题3】检查作业（课本第10页）习题一第6题是利用对数性质进行计算的问题。学生在如何正确地把一个已知数的对数，化成符合已知条件的对数时出差错，例如第（2）小题：

用$a=\log_{10}2$与$b=\log_{10}3$表示$\log_{10}15$。

可能有这样的解答：$\log_{10}15=\log_{10}[3(2+3)]$
$=\log_{10}3+\log_{10}2+\log_{10}3=b+a+b=a+2b$。

这样的解答是不对的。因为两数和（$2+3$）的对数不等于这两个数的对数的和（$\log_{10}2+\log_{10}3$）。

正确的解答应该是：

$$\log_{10}15=\log_{10}\frac{3\times 10}{2}=\log_{10}3+\log_{10}10-\log_{10}2$$

$=b+1-a$。

由此可知：（1）要利用对数的运算性质，正确区分积、商、幂的对数与对数的积、商、幂，不能把对数符号当作表示数的字母进行运算；（2）在利用对数的运算性质

时，$\log_a a = 1$（如$\log_{10}10 = 1$）及$\log_a 1 = 0$是常用的已知结论。

【问题 4】检查作业（课本第23页）习题二第1题是区分对数的首数和尾数的问题。学生关于对数是负整数与一个数的对数是负数常常混淆不清，因而出现差错。例如第（4）小题：

写出对数$\lg 0.08 = -1.0969$的首数和尾数。

可能有这样的解答：首数是-1，尾数是0.0969。

这样的解答是不对的。$\lg 0.08$的对数-1.0969是一个负数，即$-1+(-0.0969)$，必须把它化成首数（整数）+尾数（正的纯小数）的形式。

正确的解答应该是：

$$\begin{aligned}\lg 0.08 &= -1.0969 = -1-0.0969 = -1-1+1-0.0969\\ &= -2+0.9031 = \bar{2}.9031,\end{aligned}$$

$\therefore \lg 0.08$的首数是-2，尾数是0.9031。

由此可知：（1）如果一个数的对数是纯负数，必须先把它化成$\lg x =$首数（整数）+尾数（正的纯小数或零）的形式。怎样化法？$-1.0969 = -1-0.0969 = -1+(-1+1)-0.0969 = (-1-1)+(1-0.0969) = -2+0.931 = \bar{2}.931$。即“首数＝整数部分减去1，尾数＝1减去小数部分”。（2）$-1.0969 \neq \bar{1}.0969$，因为前者读作负一点零九六九，可写成$-1+(-0.0969)$，可读作负一加负的零点零九六九，它是一个纯负数，后者读作负一点（停顿）零九六九，可写成$-1+0.0969$，可读作负一加零点零九六九。

试写出下列对数的首数和尾数：

（1）$\lg x=-3.4152$；　　（2）$\lg b=-2.168$；

（3）$\lg a=\bar{3}.4152$；　　（4）$\lg c=\bar{2}.168$。

【问题 5】检查作业（课本第23页）习题二第2题是已知一个数的对数的首数，先判断这个数是大于或等于1或小于1？并用科学记数法 $a\times10^{n}$ 表示。学生对这个问题不理解，因而常常弄错。例如第2题第（1）、（2）小题：

已知一个数的对数的首数是下列各数，问这个数是大于1，等于1还是小于1？把它用科学记数法 $a\times10^{n}$ 表示时，n是多少？

（1）4；　　（2）－5。

可能有这样的解答：（1）$a\times10^{3}>1$，$n=3$；（2）$a\times10^{-6}<1$，$n=-6$。

这样的解答是不对的。错在n的值。因为科学记数中有"n等于原数整数位数减去1"，他误认为n等于首数减去1。

正确的解答应该是：（1）$a\times10^{4}>1$，$n=4$；（2）$a\times10^{-5}<1$，$n=-5$。

由此可知：用科学记数法把一个数表示为 $a\times10^{n}$（$1\leqslant a<10$）的形式，（1）当这个数的绝对值>1时，$n\geqslant0$，n等于原数整数部分的位数减去1；（2）当这个数的绝对值<1时，$n<0$，n的绝对值等于原数中第一个非零数字前面所有零的个数（包括小数点前面的那个零）；总之n是这个正数（指对数的真数）的对数首数。

【问题 6】检查作业（课本第24页）习题二第5题，是根据首数确定真数的小数点的位置。学生不明确首数与真数

小数点位置的关系。因而常出差错。例如第（1）、（2）小题：

已知lg x的尾数与lg7409的尾数相同，它的首数是下列各数，求x。（1）5；（2）－2。

可能有这样的解答：（1）x＝7409；（2）x＝0.007409。

这样的解答是不对的。（1）整数位数少了两位，因为首数加1等于整数部分的位数（5＋1＝6）。（2）第一个非零数字前面多了一个零，因为首数是"－2"，则x的有效数字前面有2个零。

正确的解答应该是：（1）x＝740900；（2）x＝0.07409。

由此可知：1.数字排列顺序相同而只有小数点位置不同的正数，它们的对数尾数都相同，但是首数不同，2.直接确定首数的方法：①大于或等于1的数(指真数)，它的对数首数等于这个数的整数部分的位数减去1；反过来，真数的整数部分的位数等于首数加1。②小于1的正数，它的对数的首数是一个负数，其绝对值等于这小数的第一个非零数字前面连续所有零的个数（包括整数部分的那一个零）；反过来，首数是"负n"，则真数的有效数字前面有n个零（包括整数部分的那一个零）。

【问题7】检查作业（课本第24页）习题二第6题，已知真数查表求对数。学生常常定错首数或弄错尾数。例如第（4）、（7）小题：

查表求下列各数的对数：（4）342.3；（7）0.001038。

可能有这样的解答：（4）3.5344；（7）$\bar{3}.161$。

这样的解答是不对的。（4）定错首数，他把位数4－1＝3。“位数”是指整数部分的位数，不是包括小数部分的位数；应该是3－1＝2；（7）查得的尾数是0161，他错把十分位的零当成整数位的零。

正确的解答应该是：

（4）2.5344；（7）$\bar{3}.0161$。

由此可知：已知真数N，求它的对数lgN，等于n＋lga的步骤是：

①把真数N用科学记数法写成$a\times10^n$，则n就是lgN的首数，（如$342.3=3.423\times10^2$，$n=2$）；

②从对数表查a的对数，得到对数lgN的尾数，它是正的纯小数，是小数点后的头四个数字。查表时不计小数点，只计有效数字。第一、二个有效数字查N的直列，第三个有效数字查N的横行，第四个有效数字查修正值，直行与横行的交叉处就是所求的尾数。如果多于四个有效数字，从第五个有效数字起把它四舍五入到第四个有效数字。例如0.10383，把小数点后的第五个有效数字3去掉，得0.1038，查表与上同。又如0.10386，把小数点后第五个有效数字6进1到上一位，得0.1039，查表与上同。

③把首数和尾数并在一起，就得到所求的对数，即$\lg N=n+\lg a$。如$\lg0.001038=\bar{3}.0161$。

【问题8】检查作业（课本第24页）习题二第7题是已知对数求真数，学生常常出现如下差错：（1）把对数的首数和尾数都当作尾数的有效数字，（2）把负数形式的对数的小数部分直接当作尾数去查表。例如第（1）、（9）小题。