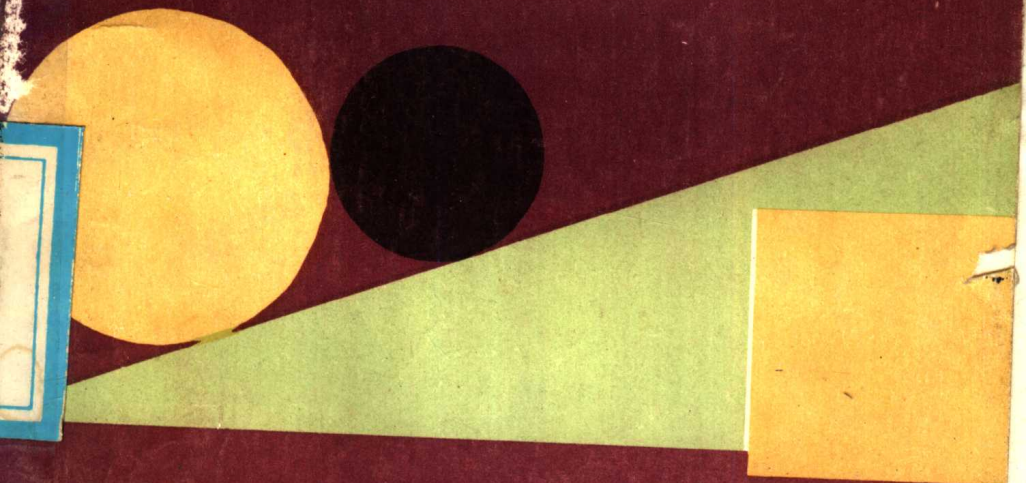


怎样用
数学方法解
中学物理问题

ZENYANGYONGSHUXUEFANGFA
JIEZHONGXUEWULIWENTI



山西人民出版社

怎样用数学方法解中学物理问题

唐焕章 覃道松 编写

山西人民出版社

怎样用数学方法解中学物理问题

唐焕章 覃道松 编写

责任编辑 徐亚东

*

山西人民出版社出版 (太原并州北路十一号)

山西省新华书店发行 山西省七二五厂印刷

*

开本: 787×1092 1/32 印张: 9.25 字数: 193 千字

1986年6月第1版 1986年6月山西第1次印刷

印数: 1—8,500 册

*

书号: 7088·1394 定价: 1.30 元

前 言

唐焕章、覃道松两位同志合写的《怎样用数学方法解中学物理问题》，以中学数学各个分支为线索，结合教学实践经验精心挑选恰当例题，阐述其在中学物理中的应用，有机地将数学与物理结合起来，培养学生运用数学解决物理问题的能力。本书体例新颖，颇具特色。内容可说得上丰富，有较为典型的一般题目，也有难度大一些的题目，各类学生或可均有所得。此书对于中学物理老师和数学老师也有一定参考价值。不过，由于工作性质的关系，我对中学数学和物理的教学不甚了了，所以读者比我更能作出公允的评价。

梁 昆 森

1984年6月

编者的话

虽然在中学数学和物理方面已有不少的专门著作，我们仍然感到，编写如何帮助中学生把数学与物理有机结合，并运用数学去分析、解决物理问题之类的参考书还是很需要的。以此作为努力目标，我们根据教育部新编《中学数学教学大纲》和《中学物理教学大纲》的精神，结合自己的数学、物理课的教学实践，参考国内外有关资料，编写了这本书。

全书内容共计两篇五章，以代数、平面三角、平面几何、平面解析几何、导数这些中学数学各个分支为线索，比较系统地介绍它们在物理学中的应用。全书突出数学的工具作用，注重数学与物理两者有机结合，并力图使本书成为中学“数学物理方法”的读物（仅就“数学物理方法”的泛泛含意而言，非指它的特定含意）。

关于本书的编写，有几点说明如下：

1. 由于本书的任务是探讨如何运用数学去解算物理问题以及如何使两者有机结合，因而书中所述数学知识都只给结论而不予证明。这也是为了节省篇幅。

2. 为了避免冗长的文字说理，本书均用物理学上的典型例题进行阐述。书中有少量例题超出了现行《中学物理教学大纲》的要求，这些知识可供成绩较好、并有兴趣的学生阅读。

3. 对于有多种解法的物理题，本书一般只给出本章本节数学知识所要求的解法，其余解法以及有关事项一并编写在“附注”中。

4. 书中有少量例题在不同的章节中重复出现，并给出了不同的解法，目的是供对比，以培养读者运用数学解决物理问题的能力。

5. 为方便某些读者查阅，书末编有物理方面的两个附录。

本书初稿写出以后，南京大学梁昆森教授在百忙中挤出时间，对书稿提了十分中肯的意见。我们对梁教授的指教表示由衷的感谢。

本书的编写乃是初步尝试。编者深感限于水平，书中可能有不少的缺点和错误，敬请专家、老师、同学们批评指正。

一九八五年二月

目 录

第一篇 初等数学在物理学中的应用

第一章 代数	(1)
第一单元 方程与方程组	(2)
1 一元二次方程	(2)
2 二元一次方程组	(28)
3 三元一次方程组	(37)
4 二元二次方程组	(50)
第二单元 函数及其图象	(56)
5 一次函数	(57)
6 二次函数	(63)
第三单元 数列与极限	(79)
7 等差数列	(80)
8 等比数列	(84)
9 极限	(89)
第四单元 组合与二项式定理	(94)
10 组合	(94)
11 牛顿二项式定理	(95)
第五单元 矢量代数初步	(102)
12 矢量的加减运算	(103)
第六单元 复数	(113)

12	复数与复数运算	(113)
第二章	平面三角	(130)
14	三角函数式的变换	(130)
15	正弦定理	(158)
16	余弦定理	(162)
17	正弦函数和余弦函数的图象	(165)
第三章	平面几何	(171)
18	三角形的相似与全等	(172)
19	三角形和圆的有关性质应用举例	(182)
20	常用规则图形的面积	(186)
第四章	平面解析几何	(190)
21	直角坐标系	(191)
22	直线	(199)
23	二次曲线	(210)
24	参数方程	(219)

第二篇 高等数学在中学物理中应用初步

第五章	导数	(228)
25	速度与加速度	(231)
26	电场强度	(235)
27	感生电动势	(237)
28	纯电路	(241)
29	极值问题	(244)
30	近似计算与误差估计	(260)
附录 1	中学物理公式与定律	(267)
附录 2	几个典型物理问题的求解方法	(281)

第一篇 初等数学在物理学中的应用

初等数学的知识是异常丰富的。本篇是以中学数学知识为线索，按代数、平面三角、平面几何、平面解析几何四章进行编写的。在编写时，首先将数学中的有关的主要内容提纲挈领地写在各个专题之首，然后列举典型的物理问题，并较详细地介绍如何运用数学进行求解。

希读者在阅读本篇时，不要单从数学角度来对待物理问题，而是运用数学这一工具去解算物理问题。所以要十分重视物理概念和规律，尤其是概念的物理意义和规律的适用范围。

本篇所拟例题，凡超出现行《中学物理教学大纲》的均以“*”号表示。

第一章 代 数

代数法是物理计算中最基本、最主要的方法。利用代数法求解物理题，言简意明，思路清晰，这是读者熟知的。正因为如此，编者将本章列为本书重点。在代数诸内容中，尤

以方程和函数的理论在物理中应用最广，所以笔者把这两个单元作为本章重点进行较详细地编写。

关于数列、极限、组合、二项式定理、矢量代数和复数，本章只是初步介绍其应用。

第一单元 方程与方程组

方程是代数的重要内容之一，它在物理中有着广泛的应用。本单元内容包括：一元二次方程，二元一次方程组，三元一次方程组，二元二次方程组。

1 一元二次方程

一元二次方程是许多方程的基础。对于形式为 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的方程的主要理论有如下三点：

①求根公式：
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

②根与系数间的关系（即韦达定理）：

设 α 、 β 为方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根，则有

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a},$$

$$\alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}.$$

③根的判别式： $\Delta = b^2 - 4ac.$

- i. 当 $\Delta > 0$ ，方程有相异的两实根；
- ii. 当 $\Delta = 0$ ，方程有相等的两实根；
- iii. 当 $\Delta < 0$ ，方程有两虚根（共轭虚根），

首先，应用一元二次方程的求根公式计算几道力学、热学、电学等方面的习题（见例1—例7）。有时，也用分解因式法和配方法求根。

这里最重要的是，要善于运用有关的物理原理，找出等量关系，建立好方程，从而将物理问题转化为数学问题（绝非纯数学题！），最后应注意结果的物理意义。

例1 质量为0.5千克的小球，从2米高处落到一个轻弹簧上（图1—1）。如果这个弹簧的倔强系数为550牛顿/米，试求弹簧被压下的最大距离。

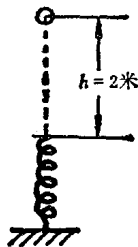


图 1—1

解 设弹簧被压下的最大距离为 x 米。根据功能关系，小球重力势能的减少等于弹簧的弹性势能的增加，即

$$mg(h+x) = \frac{1}{2}kx^2$$

代入数字并化简，得 $55x^2 - x - 2 = 0$

由一元二次方程的求根公式得

$$x_1 = 0.2 \text{ 米}, x_2 = -\frac{2}{11} \text{ 米 (舍去)}$$

答：弹簧被压下的最大距离是0.2米。

附注： i. 望读者细心领会题中“轻”字的微妙作用。

ii. 从这道简单的力学题可察知，力学问题的求解总可分为问题的物理方面和数学方面。依据某一个力学原理列方程，属于问题的物理方面；而数学方面乃是解算方程，求出结果。其实，不仅力学问题是如此，其它物理问题亦是如此。

我们再研究物理现象稍为复杂的一道力学题：

例2 质量为 $M=0.2$ 千克的盘子用一弹簧悬挂，这时弹簧伸长 0.1 米。今有质量为 $m=0.2$ 千克的物块自 $h=0.3$ 米高的地方由静止落至盘上（图1—2（甲））。试求此盘向下运动的最大距离。假设物块与盘相碰系完全非弹性碰撞。

未挂盘子 已挂盘子 物块和盘子的
最终位置

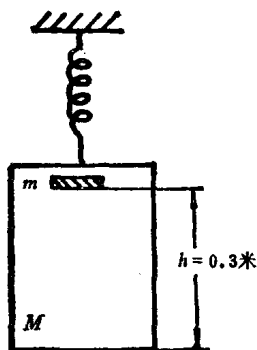


图1—2（甲）

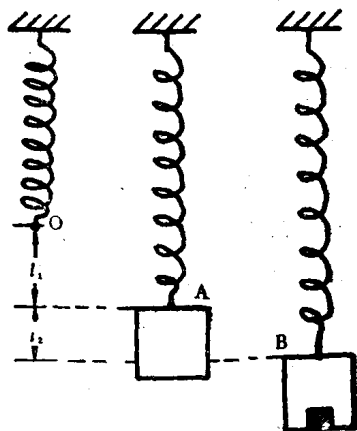


图1—2（乙）

解 本题是由三个物理过程组成：物块自由落至盘上，与之相碰，然后物块与盘子以同一速度向下运动且拉伸弹簧。

i. 物块自由下落，由机械能守恒，得

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\therefore v = \sqrt{2gh}$$

①

式中 v 为物块落到盘底时的速度。

ii. 物块与盘底作完全非弹性碰撞，

由动量守恒得

$$mv = (m + M)u$$

$$\therefore u = \frac{mv}{m + M} \quad (2)$$

式中 u 为物块和盘子的共同速度。

iii. 物块与盘底一同下落：

令它们一道下落的最大距离为 l_2 ，又假设重力势能的零点选在这一位置上；弹性势能的零点选在未挂盘子时弹簧末端的位置上（注意：弹性势能的零点应该选在弹簧的自由长度的地方）；挂上盘子后弹簧的伸长量为 l_1 （图1—2（乙））。

由机械能守恒得

$$E_A = E_B$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{2}(m + M)u^2 + (m + M)gl_2 + \frac{1}{2}kl_1^2 \\ = \frac{1}{2}k(l_1 + l_2)^2 \end{aligned} \quad (3)$$

而伸长量 l_1 与弹簧的倔强系数 k 之间关系是

$$Mg = kl_1 \quad (4)$$

将①、②、④三式和 m 、 M 、 l_1 、 h 之值一起代入③式中，化简后，得

$$l_2^2 - 20l_2 - 300 = 0$$

$$\text{解得} \quad \begin{cases} l_{21} = 30(\text{厘米}) \\ l_{22} = -10(\text{舍去}) \end{cases}$$

答：此盘向下运动的最大距离为30厘米。

附注：本题的物理方面比较复杂，因为它包含有自由落体、碰撞等多个力学过程。对于初学者，解决这一类问题是最感困难的。但只要分析清楚了各个物理过程以及各个过程所遵从的物理原理，而且把握住各个过程间的内在联系，问题也不难解决。本题的三个过程的联系是：第一个过程的末速度 v 是第二个过程中 m 碰撞前的速度；第二个过程中 m 与 M 碰撞后的速度 u 是第三个过程的初速度。

例3 一个气球自地面以2米/秒²的加速度竖直上升，5秒末从气球上落下一物体，问经多少时间物体才落回地面（ g 取10米/秒²）？

解 本题有多种解法，但用位移的观点来解较简便。

5秒末气球的速度 V_0 为

$$V_0 = at = 2 \times 5 = 10 \text{ (米/秒)}$$

5秒内气球上升的高度 h 为

$$h = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 5^2 = 25 \text{ (米)}$$

物体离开气球后，作竖直上抛运动（必须注意，物体不是自地面抛出，而是从离地25米高处抛出）。令 V_0 的方向为正方向。

$$\text{由} \begin{cases} h = V_0 t + \frac{1}{2}gt^2 \\ h = -25 \\ V_0 = 10 \\ g = -10 \end{cases}$$

得 $t^2 - 2t - 5 = 0$

按一元二次方程的求根公式有

$$t_1 = 3.45 \text{秒}, t_2 = -1.45 \text{秒} (\text{舍去}).$$

答: 经3.45秒后物体落回地面。

附注: 此类问题的解算, 大都是用这种方法。但有一点是要谨慎小心的, 即位移的符号。若是这一点弄错了, 则往后的分析和计算便是徒劳。

下面有两题, 供读者思考:

①以3米/秒的速度竖直上抛一球, 试问在何时球的位移的大小恰为它能上升的最大高度之半?

(答案: 0.9秒或5.2秒)

②如图1—3所示,

$m_1 = 0.52$ 千克, $m_2 = 0.48$ 千克, $H = 1.16$ 米, m_1 和 m_2 原在同一水平线上, 然后由静止开始运动, 经1秒绳子裂断。试求 m_1 和 m_2 落地时间之差 ($g = 10$ 米/秒²)。

提示: 先按隔离法或连结体法求出它们的加速度, 再计算出绳断时 m_1 和 m_2 的即时速度 v_1 、

v_2 , 这两个速度等值反向。绳断后, m_1 以速度 v_1 作竖直下投运动; m_2 以速度 v_2 作竖直上抛运动。本题答案是 $\Delta t = 0.16$ 秒。

例4 蓄电池的电动势 $\epsilon = 12$ 伏特, 内电阻 $r = 1$ 欧姆, 与外电路相连时, 在外电路中释放的功率 $P = 11$ 瓦特, 求此时蓄电池的路端电压。

解 由闭合电路欧姆定律, 得蓄电池的路端电压 U 为

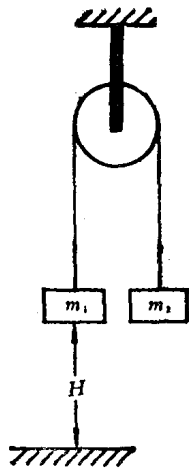


图1—3

$$U = \varepsilon - V_{\text{内}} = \varepsilon - Ir \quad \text{①}$$

蓄电池输出的功率P为

$$P = IU \quad \text{②}$$

由②式得 $I = \frac{P}{U}$ ，并代入①式，经化简后

得 $U^2 - \varepsilon U + Pr = 0$

将 ε 、P值代入得

$$U^2 - 12U + 11 = 0$$

这个一元二次方程或按求根公式解算，或按因式分解求得

$$U_1 = 11 \text{ 伏}, U_2 = 1 \text{ 伏}$$

答：蓄电池的路端电压或为11伏特，或为1伏特。

附注：i. 此题有两个解的说明。

我们从外电阻R的具体数值来说明：

$$\text{当 } R = 11 \text{ 欧时，则 } I = \frac{\varepsilon}{R + r} = \frac{12}{11 + 1} = 1 \text{ (安)}$$

$$P = I^2 R = 11 \text{ (瓦)}$$

$$\text{当 } R = \frac{1}{11} \text{ 欧时，则 } I = 11 \text{ 安， } P = I^2 R = 11 \text{ 瓦}$$

ii. 建议读者思考：要使蓄电池的路端电压有唯一的值的条件是什么？

例5 将一个 $R_1 = 600$ 欧的电阻器与一个 $R_2 = 400$ 欧的电阻器串联后接在90伏特的线路上，现把一伏特计跨接在 R_1 的两端，其读数为45伏(图1—4)。试求这个伏特计的电阻。

解 令伏特计的内阻为 R_v ，电路中的总电阻 R 为

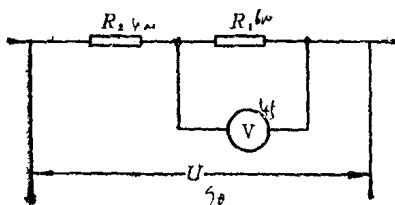


图 1-4

$$R = \frac{R_1 R_v}{R_1 + R_v} + R_2 = \frac{600 R_v}{600 + R_v} + 400$$

由部分电路欧姆定律得

$$I = \frac{90}{\frac{600 R_v}{600 + R_v} + 400} \quad (1)$$

另一方面，干路中的电流 I 为流过 R_1 与伏特计的电流之和，即

$$I = \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_1}{R_v} = \frac{45}{600} + \frac{45}{R_v} \quad (2)$$

由①、②两式得

$$\frac{90}{\frac{600 R_v}{600 + R_v} + 400} = \frac{45}{600} + \frac{45}{R_v}$$

化简后，有 $R_v^2 - 600 R_v - 720000 = 0$

解此一元二次方程得 $R_v = 1200$ 欧

$R_v = -600$ (舍去)