

数理化基础知识丛书

初中数学基础知识

代 数

第一册

北京实验中学数学教研室编

北京教育出版社

数理化基础知识丛书
初中数学基础知识代数第一册
北京实验中学数学教研室编

北京教育出版社出版
(北京北三环中路6号)
新华书店北京发行所发行
北京市房山区印刷厂印刷

787×1092毫米 32开本 4.625印张 97,000字

1988年8月第1版 1988年8月第1次印刷

印数 1—8,300

ISBN 7-5303-0034-2/G·29

定 价 1.35 元

编写说明

为了帮助广大青年和在校学生学好数、理、化，我社约请了北京市人大附中、北大附中、清华附中、北京实验中学等校的有经验的教师共同编写数理化基础知识丛书。

《初中数学基础知识》共分六册与课本相对应。各册均分章编写，每章包括内容提要，重点、难点解析，典型例题，练习和自我检查题，最后附答案或提示。书中对初中数学基础和概念作了由浅入深的剖析，对学生学习初中数学中不易理解之处，易出差错、常混淆的内容，作了详尽的讲解和辅导。对解题的思路、方法，技巧进行了全面的介绍。

本书是《初中数学基础知识代数第一册》，可以作为在校学生学习数学的辅导书，也可以作为中学数学教师的教学参考书。

《初中数学基础知识》编写组成员是北京师范大学附属实验中学蔡晓东、杨淑云、金元、张春条、李芳宜、张继林、任幸娟、储瑞年。

由于我们的水平有限，难免出现一些错误和缺点，欢迎读者批评指正。

目 录

第一章 有理数	1
一、内容提要.....	1
二、重点、难点解析.....	1
1. 正数和负数.....	1
2. 整数概念的扩充.....	3
3. 有理数.....	3
4. 数轴.....	6
5. 相反数.....	7
6. 绝对值.....	9
7. 有理数大小的比较.....	11
8. 有理数的加法和减法.....	14
9. 有理数的乘除法.....	19
10. 有理数的乘方.....	23
11. 有理数的混合运算.....	24
三、典型例题.....	32
习题一.....	41
自我检查题一.....	44
第二章 整式的加减	48
一、内容提要.....	48
二、重点、难点解析.....	48
1. 用字母表示数.....	48
2. 代数式.....	50

3. 代数式的值	54
4. 整式中的有关概念	55
5. 合并同类项	57
6. 去括号与添括号法则	58
7. 整式的加减	59
8. 本章的知识结构	60
三、典型例题	60
习题二	67
自我检查题二	69
第三章 一元一次方程	72
一、内容提要	72
二、重点、难点解析	72
1. 等式与等式的性质	72
2. 方程与方程的解	74
3. 同解方程与方程的同解原理	76
4. 一元一次方程及其解法	79
5. 字母系数一元一次方程的解法	82
6. 怎样列方程解应用题	83
7. 应用题中几种常见类型	90
三、典型例题	97
习题三	110
自我检查题三	113
第四章 一元一次不等式	116
一、内容提要	116
二、重点、难点解析	116
1. 不等式与不等式的性质	116
2. 不等式学习中的几个常用知识	119

3. 不等式的解与不等式的解集	120
4. 同解不等式与不等式的同解原理	121
5. 一元一次不等式及解法	123
三、典型例题	126
习题四	130
自我检查题四	131
答案或提示	133

第一章 有理数

一、内容提要

本章主要内容是有理数的有关概念和有理数的运算。有理数的有关概念主要包括：有理数、数轴、相反数、倒数、绝对值和有理数的大小比较；有理数的运算主要包括：运算法则、运算定律和运算顺序。

本章的重点是有理数的运算。它是代数中一切运算的基础，因此要很好地掌握。主要难点是建立负数的概念、理解有理数的意义和掌握有理数的四则运算法则。

二、重点、难点解析

1. 正数和负数

在小学，我们已经学过了整数（自然数和零）、小数、分数和百分数，这些数我们可以统称为算术数。这些数都是为了解决现实生活中的问题而产生的。

在现实世界中，存在着大量具有相反意义的量。例如：收入80元和支出80元；向东走3里和向西走3里都是具有相反意义的量。要确切表示这种具有相反意义的量，仅仅用原来的数（算术数）就不够了。因为这些数无法将这两个具有相反意义的性质表示出来。另外就数字本身而言，还存在着

像 3-5 这样的减法运算在小学所学过的数中无法进行的问题，因此必须引入新数，这样正数和负数便产生了。

规定：在非零算术数的前面写上“+”号（读作正号）的数，叫做正数（这个“+”号也可以省略不写）；在非零算术数的前面写上“-”号（读作负号）的数，叫做负数；零既不是正数，也不是负数。

例如：像 $+80$ 、 $+5\frac{1}{2}$ 、 2.5 等都是正数， -80 、 $-5\frac{1}{2}$ 、

-2.5 等都是负数。

在理解和运用正负数概念时还应注意以下两点：

（1）弄清符号“+”和“-”的意义。

在小学，符号“+”和“-”表示相加和相减，它们仅是一种运算符号。而这里却不同，它们分别表示了数的两种不同的性质。例如：规定收入为正，那么收入80元可以写作 $+80$ 元，支出80元可以写作 -80 元。这里“ $+80$ 元”和“ -80 元”前面的“+”“-”号就揭示出了收入和支出这两种完全相反的性质。此时，我们把符号“+”和“-”叫做 $+80$ 和 -80 的性质符号。

关于符号“+”和“-”的问题，我们还将将在有理数的运算中详细学习。

（2）正确理解性质符号在表示具有相反意义的量时的作用。

例如：规定上升为正，那么下降5000米怎样记出？下降了 -3000 米又是什么含义？

分析：因为规定上升为正，所以下降5000米应记作 -5000 米。同样，下降了 -3000 米也可以记作 $-(-3000)$ 米，那么它表示什么含义呢？我们知道， $-(-3000)$ 米是与

-3000米意义完全相反的量，而-3000米的意义在此规定下是下降3000米，因而它的相反意义的量-(-3000)米就表示是上升3000米。

2. 整数概念的扩充

在小学，零和自然数统称为整数。由于引入了负数，使得整数的概念也扩充了。正整数、零和负整数统称为整数。即整数包括： 0 、 ± 1 、 ± 2 、 ± 3 、……。其中把正整数和零合称为非负整数。

奇数和偶数的概念也随着整数概念的扩充而扩充了。

能够被2整除的整数叫做偶数，不能被2整除的整数叫做奇数。偶数的一般表达式为 $2n$ (n 为整数)，奇数的一般表达式为 $2n-1$ (n 为整数)。

例如： -4 、 -2 、 0 、 2 、 4 等都是偶数， -3 、 -1 、 1 、 3 等都是奇数。

3. 有理数

到目前为止，我们所学过的数应包括这样五种：正整数（自然数）、零、负整数（这三种数合称为整数）、正分数、负分数（这两种数合称为分数，这里我们把有限小数与无限循环小数也归入了分数之中）。

整数和分数统称为有理数。有理数的全体所组成的集合，叫做有理数集。任何有理数都可以表示成 $\frac{p}{q}$ (p 、 q 为互质的整数，且 $q \neq 0$) 的形式。

例如：整数 $100 = \frac{100}{1}$ 。

有限小数 $-0.3 = -\frac{0.\dot{3}}{1} = -\frac{3}{10}.$

而象 $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}$ 已是 $\frac{p}{q}$ 的形式.

那么, 无限循环小数是否也能化为分数形式呢? 回答是肯定的.

例如: 把纯循环小数 $0.\dot{7}$ 化成分数.

$$\begin{array}{rcl} \text{解} & 0.\dot{7} \times 10 & = 7.777\cdots \\ & -) 0.\dot{7} & = 0.777\cdots \\ \hline & 0.\dot{7} \times 9 & = 7 \end{array}$$

$$\therefore 0.\dot{7} = \frac{7}{9}.$$

又例如: 把混循环小数 $3.\dot{4}1$ 化成分数.

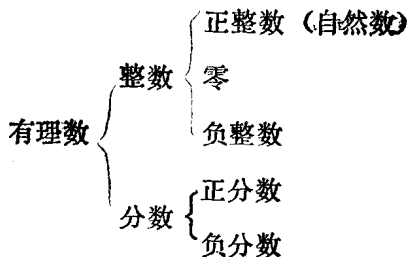
$$\begin{array}{rcl} \text{解} & 0.\dot{4}1 \times 100 & = 41.111\cdots \\ & -) 0.\dot{4}1 \times 10 & = 4.111\cdots \\ \hline & 0.\dot{4}1 \times 90 & = 37 \end{array}$$

$$\therefore 0.\dot{4}1 = \frac{37}{90},$$

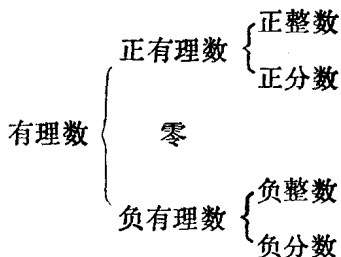
$$\therefore 3.\dot{4}1 = 3\frac{37}{90}.$$

由以上几例可知, 任何一个有理数都可以化为分数的形式.

在有理数的概念中, 有理数的分类占有重要地位, 因此对以下两种分类都应理解和记住.



或



在有理数的学习中，弄清以下两个问题是很有好处的。

(1) 关于数“0”。

我们已经知道，用“0”可以表示没有的意思。当某一个十进制的数位上一个单位也没有时，也可以用“0”表示这一位是缺位。比如103表示出了十位是缺位。除此之外，“0”还有很丰富的含义。

例如：“0”具有确定的内容。比如 0°C 不表示没有温度，而是象零上 1°C 或零下 1°C 一样，有着一个确定的温度。

又例如：“0”还可以作为具有相反意义的量的基准。比如 0°C 就是零上若干度与零下若干度的一个基准。

“0”是正数和负数的分界数，是唯一的中性数。

在有理数的运算中，“0”具有独特的运算法则，这一

点我们将在后面谈到。

(2) 正确区分“正数与整数”、“非负数与正数”。

正数与整数：正数相对负数而言，整数相对分数而言，它们互有包含。就是说，正数中包含有整数，整数中也包含有正数。

非负数与正数：正数和零统称为非负数。可见非负数并不只是正数。

例如：在 $+5$ ， -0.16 ， -3 ， $+\frac{7}{9}$ ， 210 ， $-3\frac{1}{2}$ ， 0

中，找出满足下列条件的数：正数；整数；正整数；非负数。

解 正数有： $+5$ ， $+\frac{7}{9}$ ， 210 ；

整数有： $+5$ ， -3 ， 210 ， 0 ；

正整数有： $+5$ ， 210 ；

非负数有： $+5$ ， $+\frac{7}{9}$ ， 210 ， 0 。

4. 数 轴

数轴是一条规定了原点、正方向和单位长度的直线。其中原点、正方向和单位长度是数轴的三要素，缺一不可。

例如：用下面几种图形来表示数轴都是不完整的：

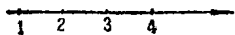


图 1-1

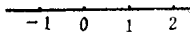


图 1-2



图 1-3

图1-1缺原点；图1-2没有方向；图1-3缺少单位长度。

数轴的建立，使得数与形（点）建立起了对应关系。全

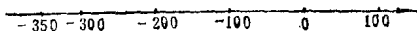
体有理数都可以用数轴上的点来表示。一般地，正有理数用原点右边的点表示，负有理数用原点左边的点表示，零用原点表示。

根据题目要求，正确而又灵活地画出数轴，能熟练地由点读出它所对应的有理数，由有理数描出对应的点，是学习数轴应当掌握的基本技能。所谓正确地画出数轴，就是画数轴时三个要素缺一不可；所谓灵活地画数轴，就是要根据题目要求，合理地选择原点位置、单位长度和正方向的朝向。

例如：画一条数轴，并在数轴上记出下列各数： -350 ， -200 ， 0 ， 100 。

分析：根据题目特点，在建立数轴时，原点的位置应适当偏右，并取100做为一个单位长度。

解



5. 相反数

相反数的意义，课本上是这样叙述的：“只有符号不同的两个数，我们说其中一个是另一个的相反数，零的相反数是零”。

在学习相反数的概念时，对以下两个问题要认识清楚。

(1) “互为”的含义。

例如： -1 与 1 互为相反数，就是说 -1 是 1 的相反数， 1 也是 -1 的相反数。可见，相反数是指一对数而言的。笼统地说 1 是相反数是不正确的。

(2) “只有符号不同的两个数”的含义。

任何一个非零有理数，总可以看成是由“符号”和“符

号后面的数字”这两部分构成的。例如：“-5”的符号是“-”号，而符号后面的数字是“5”；0.3的符号“+”省略了，而符号后面的数字是“0.3”。因此，“只有符号不同的两个数”这句话的含义，可以理解为：这两个数的符号相反，而符号后面的数字相等。

例如：+6和-6互为相反数，但+7和-6就不是相反数。

从数轴上看相反数的意义是：表示这两个数的点，分别在原点的两旁，并且离开原点的距离相等。如图1-4所示。

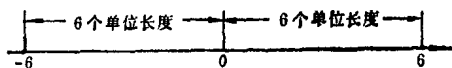


图1-4

相反数有如下特性：如果 a 和 b 互为相反数，那么 $a+b=0$ 。

反之，如果 $a+b=0$ ，那么 a 和 b 互为相反数。用这个结论可判断两个数是否是相反数。

例如：+6与-6互为相反数， $(+6)+(-6)=0$ 。而由 $\frac{1}{2}$

$+(-0.5)=0$ 就可以知道 $\frac{1}{2}$ 与-0.5互为相反数。

怎样表示一个数的相反数呢？

要表示一个数的相反数，只要在这个数前面添上一个“-”号（负号）。

这里“-”号的作用是把一个数变成它的相反数。

在一个数的前面添上一个“+”号（正号），仍与原数相同。即 $+a=a$ 。

特别地 $+0=0$; $-0=0$.

例如: 3 的相反数表示为 -3 ;

$+2.5$ 的相反数表示为 $-(+2.5)$, 即 -2.5 ;

$-4\frac{1}{3}$ 的相反数表示为 $-(-4\frac{1}{3})$, 即 $4\frac{1}{3}$;

由上例, 我们容易得出下面的符号化简法则: $-(-a)$
 $=a$; $-[-(-a)]=-a$.

例如: 化简 $-[+(-5)]$ 和 $-[-(-3)]$

解 $-[+(-5)]=-[-5]=5$;

$-[-(-3)]=-[-3]=-3$.

一般地, a 的相反数可以用 $-a$ 来表示.

这里应特别注意: a 既可以代表任何一个正有理数(如代表 $+3$), 也可以代表任何一个负有理数(如代表 -5), 还可以代表数 0 . 所以不能认为 a (或 $+a$) 一定是正数, $-a$ 一定是负数.

例如: 若 $+a$ 代表 -5 , 那么带 “ $+$ ” 号时的 a 就是一个负数, 而 $-a=-(-5)=5$ 是个正数; 若 a 代表 0 , 那么 $+a=+0=0$, $-a=-0=0$.

把 “普通语言” 化为 “数学语言”, 在今后的数学学习中是十分常见的, 因此, 我们应当从现在开始熟悉它.

例如: 普通语言叙述的 a 为正数, a 为零和 a 为负数, 用数学语言就可以分别表示为: $a>0$, $a=0$ 和 $a<0$. a 为非负数就可以表示为 $a\geq 0$.

6. 绝对值

我们先来看这样一个实际问题: 甲乙两车从某地出发(规定向东为正), 甲车向东走了 4 里, 记作 “ $+4$ 里”,

乙车向西走了5里，记作“-5里”。如果我们不考虑它们行驶的方向，而只考虑它们各自行驶的里程，那么我们可以说：甲车走了4里，乙车走了5里。显然，对于只考虑里程的这两个量“4里”和“5里”，与又考虑到方向的这两个量“+4里”和“-5里”从意义上说是不尽相同的。在数学上，为了对它们加以区别，就要有新的名称。我们称这个“4”叫“+4”的绝对值，“5”叫“-5”的绝对值。

绝对值的意义：一个正数的绝对值是它本身；一个负数的绝对值是它的相反数；零的绝对值是零。即

若 a 为正数，则 $|a| = a$ ；

若 a 为负数，则 $|a| = -a$ ；

若 a 为0，则 $|a| = 0$ 。

用数学语言可以简单的叙述为：

$$|a| = \begin{cases} a & (a > 0) ; \\ 0 & (a = 0) ; \\ -a & (a < 0) . \end{cases}$$

例如： $|+4| = 4$ ； $|-5| = -(-5) = 5$ ；

$$|0| = 0 .$$

又例如：若 $|x| = \frac{1}{3}$ ，则 $x = ?$

$$\text{解} \quad \because \left| \frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3}, \quad \left| -\frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3},$$

$$\therefore x = \frac{1}{3} \text{ 或 } x = -\frac{1}{3} .$$

注意：如果某数的绝对值等于一个正数，那么某数的值一定是两个，一个是这个正数，另一个是这个正数的相反

数.

从数轴上看, 一个数的绝对值就是表示这个数的点离开原点的距离. 如图1-5所示.

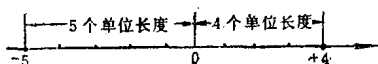


图 1-5

例如: 在数轴上 $|-5|$ 的含义是: 表示 -5 这个数的点离开原点有 5 个单位长度.

绝对值有如下重要性质: 任何一个数的绝对值是一个非负数. 即 $|a| \geq 0$.

这个性质揭示出了绝对值概念的实质, 应用也很广泛, 所以要透彻理解并很好地掌握它.

在绝对值概念的学习和应用中, 经常用到下面的一些结论:

(1) 若 a 与 b 互为相反数, 则 $|a| = |b|$; 反之, 若 $|a| = |b|$, 则 $a = b$ 或 a 与 b 互为相反数.

(2) 如果 $|a| + |b| = 0$, 那么 $a = 0$ 且 $b = 0$.

例如: 已知 $|2a - 1| + |3b - 1| + |4c - 1| = 0$, 求: a, b, c 的值.

解 $\because |2a - 1| + |3b - 1| + |4c - 1| = 0$,

$\therefore 2a - 1 = 0, 3b - 1 = 0, 4c - 1 = 0$,

$\therefore a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{3}, c = \frac{1}{4}$.

7. 有理数大小的比较

在小学, 我们已掌握了零与正数、正整数和正分数大小比较的方法. 在学习有理数的大小比较之前, 对这些内容做个回忆, 是很有好处的.