高等学校教学用書

高等數學簡明教程

上　册

Н. С. 米海里孫著

高等教育出版社

高等學校教學用書

高等數學簡明教程

上册

Н. С. 米海里孫著
東北工學院數學教研組譯

高等教育出版社

本書係根據蘇聯國營技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико—теоретической литературы）出版米海里孫（Н. С. Михельсон）著“高等數學簡明教程”（Краткий курс высшей математики）1951年初版譯出的。原書經蘇聯高等教育部審定為高等工業學校參考書。

本書原由商務印書館出版，自1955年2月起改由本社出版。

高等数学簡明教程

上　册

Н. С. 米海里孙著

东北工学院数学教研組譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号
（北京市书刊出版业营业許可証出字第054号）

上海大东集成联合印刷厂印刷　新华书店发行

統一书号 13010·74　开本 850×1168 1/32　印張 8 8/16
字数 235,000　印数 193,001—213,000　定价 (4) ¥0.85
1955年2月新1版　1960年3月上海第19次印刷

原　序

這本高等數學簡明教程是根據我的高等數學一般教程的第六版改編的。

改動和補充本書前一版的目的，是要使本書的材料能夠與蘇聯高等教育部的大綱所要求的一致。但是，考慮到要保持這個課本以前的特點，就是只介紹給讀者高等分析的基礎知識，我是依着大綱中對高等工業學校提出的要求，即只須講授精簡的數學知識，來改編本書的。

在新版所作的改動和補充中，首先要指出的是加進了矢量代數的初步知識。我雖然敍述了這些知識作爲分析空間中直線與平面問題的前提，但我還是沒有發現將本篇材料以矢算理論作基礎來研究的可能。我認爲在像本書這樣簡明的高等數學教程中，如果避開坐標法來敍述全部解析幾何的繁複知識，恐怕是一種冒失。但我又不能就這樣使矢量運算在後來得不到適當應用。因此我仍認爲有必要，在立體幾何中一方面繼續發揮以前所敍述的坐標法，同時又引用矢量形式來解決個別問題。這樣作法，我希望在採用矢算法來敍述時可能避免學生在開始時會感到困難的突然轉變，從而也就使學生能漸漸習慣於應用新形式來論述以前研究過的老問題。

定積分這一章也改編過了。在這章開始時，我加入了可以化爲積分和的極限的三個問題，以後，就一直把定積分當作這種和數的極限值來講述。當然在這個問題的討論中，我是不能達到完全的嚴密性的，但是我以爲經過這種方法的敍述後，積分的基本問題，將會大大地增加它的明晰性和目的性。

在本版中，我也加入關於二階和三階行列式的簡短知識。後來我把這些知識應用到解析幾何這一篇中去了。本書也涉及了某種函數補

正值的求法及線積分的初步概念。

本版中又加入了其他一些並非十分基本的問題。此外還應指出：在解析幾何問題的討論中，我比以前強調了投影理論的作用。至於其他方面，關於結構及敘述的方式，我仍保持着以前版本的特色。

米海里孫

目 錄

引 論

對於每一個工作者，無論他是熟練的專家，或是普通的工人，在他所需要的各部門的知識中，就應用範圍的廣泛程度來說，“數學”佔有最重要的地位。宇宙間任何現象，要是從量的方面去研究，或者甚至從質的方面去研究，都不可避免地要牽涉到數學計算的，雖然有時也許只是最簡單的算術計算。

如果我們所研究的現象，其量的關係愈簡單，則為它服務的數學顯然也愈簡單。

算術、初等幾何、代數和三角可以解決許多問題，這些問題都是牽涉到諸量之間的數值關係的。但是單靠這些初等數學，對於更複雜的關係，就無法再加以研究了。

高等數學的任務，就是在需要更完備的方法，而在初等數學不能為力時，去深入研究量的關係。

正如在生產中一樣，工人為了製造完整的成品，他們需要更完善的方法和更有效的工具。在任一種科學中，特別是在數學中，為了深入的探討，我們也需要更完善的方法和更有效的工具。這種方法就是以解析幾何和微積分為主要工具的高等數學。

一般說來，數學分析的來源，就是我們周圍的生活環境中具有一定數值關係的各種各樣現象。但是，產生高等數學的直接來源，可以說有兩個：第一個是關於變量的概念，第二個是關於變量極限的概念。沒有第一個就沒有第二個，沒有第二個也就沒有高等數學。

關於變量的概念,當然並非只是在高等數學中所不可缺少,在代數、幾何、三角中也同樣已經知道有它。但是在初等數學的課目中,變量僅僅在個別場合下加以討論,而在高等數學中,變量是研究的基本對象,也是本科目的主要內容。

高等數學是在十七世紀中,由於數學分析的新方法發現而開端的。這些方法都是由爲了要解決實際問題這個不斷增長的需要所引起的,而這些實際問題又是由當時的生活環境,即生產上一切可能形式的進步,對人類所提出的。

這些新的數學研究方法,都是很有力的,它們使大部分在那時不能解決的主要問題簡易的得到解決,它們的創始者是:笛卡兒(1696—1650),他創造了解析幾何的方法:牛頓(1642—1727)和萊伯尼茲(1646—1716),他們創造了微積分法。

從那時起,數學分析在使新的概念深刻化方面和在擴大新方法的應用範圍與獲得新的結果方面,都是非常迅速的發展。在這些工作中,俄國學者佔着顯著的地位,而且往往是居第一位。

在新的數學方法興起後不久,俄國由它的高等科學機構——彼得堡科學院成立的時候起(1725)就參加了發展這些方法的工作。從那時起,這個科學院就是而且現在還是世界上科學界一切成就的中心,當然也包括數學在內。

我們需要提出來的第一個人就是歐拉(1707—1783)。當他還是一個十九歲的青年的時候,他就到了彼得堡而且積極地參加科學院的科學工作。從那時起,他就完全將他自己的名字和科學院緊密地連在一起,並且把俄國當做了他的第二故鄉。這個偉大人物的名字,即使在最簡短的高等數學教程中,也不能不提起他來。在數學的領域內,他的領導地位,是全世界所公認的。

數學思想的第二個巨匠就是喀山大學教授羅伯切夫斯基(1793—1856)。他敢於打破二千年的傳統,就是打破了以歐幾里得關於平行線

的假設爲基礎的幾何的傳統,而創造了在邏輯上無可非難的新的幾何學。他是以經過一已知點對一已知直線可以引兩條平行線的假定來作根據。他的觀念得到了外國學者的響應,並促使他們向着這個新的方向繼續研究。

在那時的俄國數學家中,還要提起的,是彼得堡科學院院士奧斯特洛格拉得斯基(1801—1862)。除了他的許多重要工作外他的名字是與開始學高等數學時就知道的積分方法與積分中的著名公式分不開的。這些冠有他的名字的公式,不但在數學中而且在實用科學中都有廣泛的應用。

在俄國,作爲世界上第一個出色的並以她自己的科學著作而成名的女數學家是柯娃萊夫斯卡婭(1850—1891)。她的科學功績爲彼得堡科學院所承認;而且因爲她關於剛體轉動作了卓越的著作,科學院把她選爲通訊院士。

在世界科學史中留下不可磨滅的記憶的是科學院院士契伯舍夫(1821—1894)。他也是數學思想中的偉大代表者之一,他的巨大成就是與實際生活的需要相結合的。我們最好用他自己的話來說明他的偉大成就所規定的方向:"理論與實踐的結合,會得出最好的結果;而且不僅實踐因此而進步,卽科學本身在實踐的影響下也向前發展了:實踐爲科學開闢了新的科目,給科學提出了完全新鮮的問題,因而也引起了要探求全新的科學方法的努力。"

契伯舍夫奠定了以他爲中心的俄國數學家的整個學派。這學派的數學家們繼續了他的工作,他們也是俄國數學科學的榮譽:高爾金、馬耳柯夫、李亞邦諾夫、克雷洛夫等等。

在偉大的十月社會主義革命以後,數學的研究更有了廣大的規模。破天荒地創立了規模宏大的數學科學研究院。蘇聯的數學在世界的科學中佔着領導地位。優秀的蘇聯數學家們,他們勝利的發展着數學中的新方向,並且將這些新方向應用到社會主義建設的實踐中去。

第一章　行列式理論初步

§1. 二階行列式

設有二元一次方程組：

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y&=c_1,\\ a_2x+b_2y&=c_2. \end{aligned} \tag{1}$$

用初等代數中已知的規則求它的解，便得到下列表示未知數的式子：

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1},\quad y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}. \tag{2}$$

考察所得的公式，容易看出上式中分子和分母的結構形式是一樣的。分母可用下面的方法得到。

取乘積

$$a_1b_2.$$

交換乘積中文字的下標，同時變更符號，便得

$$-a_2b_1.$$

將這兩個結果加起來，我們就得到（2）式中的分母。（2）式中的分子也是用同樣的方法由乘積

$$cb \quad 和 \quad ac$$

做成的。

一般的，由四個數

$$\begin{matrix} A_1, & B_1 \\ A_2, & B_2, \end{matrix} \tag{3}$$

組成的式子 $A_1B_2-A_2B_1$，叫做由這些數所組成的行列式，並且記成下面的形式：

$$\begin{vmatrix} A_1, & B_1 \\ A_2, & B_2 \end{vmatrix}$$

於是

$$\begin{vmatrix} A_1, & B_1 \\ A_2, & B_2 \end{vmatrix} = A_1B_2 - A_2B_1.$$

包含在行列式裏的數，叫做它的**元素**。在上面的記法裏，把這些元素排成行和列。

包括有兩行和兩列的行列式，叫做二階行列式。

根據已規定的記法，可以說（2）式中的分子和分母是二階行列式，即：

$$a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix};$$

$$c_1b_2 - c_2b_1 = \begin{vmatrix} c_1, & b_1 \\ c_2, & b_2 \end{vmatrix};\quad a_1c_2 - a_2c_1 = \begin{vmatrix} a_1, & c_1 \\ a_2, & c_2 \end{vmatrix}.$$

因此，方程組（1）的解可以表成下面的形式：

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1, & b_1 \\ c_2, & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix}},\quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1, & c_1 \\ a_2, & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix}}. \tag{4}$$

容易看出，兩個未知數 x 和 y 值的分母都是由方程組（1）中未知數的係數所組成的行列式，它叫做方程組的行列式，而分子乃是從方程組的行列式裏以常數項去替換對應的未知數的係數而得到的行列式。

利用公式（4），可以立刻求得二元一次方程組的解。

例 1　解方程組

$$2x - 3y = 9,$$
$$5x + 4y = 11.$$

利用公式（4）便得，

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 9, & -3 \\ 11, & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2, & -3 \\ 5, & 4 \end{vmatrix}}=\frac{9\cdot4-11\cdot(-3)}{2\cdot4-5\cdot(-3)}=\frac{69}{23}=3,$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2, & 9 \\ 5, & 11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2, & -3 \\ 5, & 4 \end{vmatrix}}=\frac{2\cdot11-5\cdot9}{2\cdot4-5\cdot(-3)}=\frac{-23}{23}=-1.$$

§2. 三階行列式

為了將行列式的概念推廣到更多元素的情形上去，我們可取三個數的乘積

$$a_1b_2c_3.$$

還像前面的情形一樣，依次交換任意二個下標，同時每次改變乘積符號，組成另外的乘積，就得到下面的六個乘積：

$$a_1b_2c_3,\ -a_1b_3c_2,\ a_2b_3c_1,\ -a_2b_1c_3,\ a_3b_1c_2,\ -a_3b_2c_1.$$

這六個乘積的和，叫做九個元素

$$\begin{matrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{matrix}$$

所組成的行列式。

這個和記做下面的形式：

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}$$

於是

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}=a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-\\-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1. \tag{5}$$

這個行列式包括有三行和三列，因此叫做三階行列式。

下面所講的方法（沙路方法），使三階行列式有可能輕易地展開爲多項式而計算。卽，將行列式的元素像它們在原行列式中的排列一樣寫出來後，再在下面加上第一列和第二列兩列。然後，如圖（圖 1）所示，將同一對角線上的元素相乘做出六個乘積。

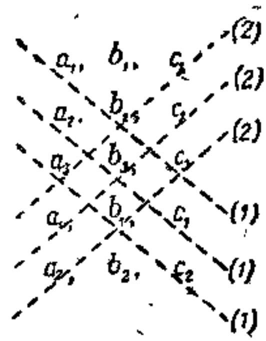

圖 1

如將（1）類中的乘積都取正號，（2）類中的乘積都取負號，再將它們加起來，就得到行列式的展開式。

例 2　計算行列式

$$\begin{vmatrix} 1, & -2, & 0 \\ -3, & 2, & 1 \\ 2, & 3, & -3 \end{vmatrix}.$$

先寫好五列

$$\begin{array}{rrr} 1, & -2, & 0 \\ -3, & 2, & 1 \\ 2, & 3, & -3 \\ 1, & -2, & 0 \\ -3, & 2, & 1 \end{array}$$

作位於對角線上的元素的乘積，於是得到

$$\begin{vmatrix} 1, & -2, & 0 \\ -3, & 2, & 1 \\ 2, & 3, & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot(-3)+(-3)\cdot 3\cdot 0+2\cdot(-2)\cdot 1-2\cdot 2\cdot 0-1\cdot 3\cdot 1- -(-3)\cdot(-2)\cdot(-3)=-6-4-3+18=5.$$

利用沙路的方法，容易證實三階行列式具有下面的性質，這些證明留給讀者去做。

1. 如果將行換成列，而列換成行，但不改變它們的下標，行列式的值仍不變。

2. 在行列式裏無論那兩行互換，或無論那兩列互換，行列式的值只改變符號。

3. 如果

(i)一行或一列的元素都等於零;

或 (ii)一行或一列的元素都和另一行或一列的元素對應相等;

或 (iii)一行或一列的元素和另一行或一列的元素對應成比例,則行列式的值等於零。

4. 如果任意的一行或一列的元素加上另一行或一列已乘有同一的數的對應元素,行列式的值仍不變。

§3. 按照一行或一列的元素展開行列式

將三階行列式的展開式(5)裏的六項,每兩個項作爲一組,再將公因子提到括號外面來,我們就得到行列式更緊湊的展開式,卽:

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 =$$
$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) =$$
$$= a_1\begin{vmatrix} b_2, & c_2 \\ b_3, & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1, & c_1 \\ b_3, & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1, & c_1 \\ b_2, & c_2 \end{vmatrix}.$$

上列公式叫做行列式按照第一行的展開式,因爲上面的情形,二階行列式前面的因子是第一行的元素 a_1, a_2, a_3。

將公式(5)的項另外分組,可以得到行列式依照另一行元素類似的展開式。例如,只要括出第二或第三行的元素,便可把同一個行列式改寫成下面的形式。

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = -b_1\begin{vmatrix} a_2, & c_2 \\ a_3, & c_3 \end{vmatrix} + b_2\begin{vmatrix} a_1, & c_1 \\ a_3, & c_3 \end{vmatrix} - b_3\begin{vmatrix} a_1, & c_1 \\ a_2, & c_2 \end{vmatrix} =$$
$$= c_1\begin{vmatrix} a_2, & b_2 \\ a_3, & b_3 \end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_3, & b_3 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix}.$$

以同樣的方法,在公式(5)裏括出第一、第二或第三列的元素,便得

到行列式按照一列的展開式:

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2, & c_2 \\ b_3, & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2, & c_2 \\ a_3, & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2, & b_2 \\ a_3, & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= -a_2\begin{vmatrix} b_1, & c_1 \\ b_3, & c_3 \end{vmatrix} + b_2\begin{vmatrix} a_1, & c_1 \\ a_3, & c_3 \end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_3, & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= a_3\begin{vmatrix} b_1, & c_1 \\ b_2, & c_2 \end{vmatrix} - b_3\begin{vmatrix} a_1, & c_1 \\ a_2, & c_2 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix}.$$

爲簡寫起見,取下列記法:

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = \varDelta,\quad \begin{vmatrix} b_2, & c_2 \\ b_3, & c_3 \end{vmatrix} = A_1,\ -\begin{vmatrix} b_1, & c_1 \\ b_3, & c_3 \end{vmatrix} = A_2,\ \begin{vmatrix} b_1, & c_1 \\ b_2, & c_2 \end{vmatrix} = A_3.$$

$$-\begin{vmatrix} a_2, & c_2 \\ a_3, & c_3 \end{vmatrix} = B_1,\quad \begin{vmatrix} a_1, & c_1 \\ a_3, & c_3 \end{vmatrix} = B_2,\ -\begin{vmatrix} a_1, & c_1 \\ a_2, & c_2 \end{vmatrix} = B_3. \tag{6}$$

$$\begin{vmatrix} a_2, & b_2 \\ a_3, & b_3 \end{vmatrix} = C_1,\ -\begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_3, & b_3 \end{vmatrix} = C_2,\quad \begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix} = C_3.$$

可將上面按照一行或一列元素的展開式就可以表成下列形式:

$$\begin{aligned} &\varDelta = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 && \varDelta = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1 \\ &\varDelta = b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3 && \varDelta = a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2 \\ &\varDelta = c_1C_1 + c_2C_2 + c_3C_3 && \varDelta = a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3. \end{aligned} \tag{7}$$

我們易知在(6)式中的每個二階行列式全是從那個原來的三階行列式得到的,它就是將一元素所在的行及列劃去後剩下來的元素所組成的行列式,而這個元素就作爲它前面的因子。關於這個行列式的符號是加號還是減號,要看所去掉的行與列所在的行數與列數的和是奇數還是偶數而決定。例如,二階行列式 C_2 是去掉第三行和第二列而得到的,因爲去掉的行數與列數的和等於奇數 $(2+3=5)$,所以它前面的符號是減號。

從原來的行列式裏取去任意的一行和一列後所得到的行列式叫做已知行列式的子行列式。

按照一行或一列來展開行列式是計算行列式的一個簡便方法，我們用下例來說明。

例 3 依照第二行的元素展開行列式 $\begin{vmatrix} 2, & -1, & 3 \\ 1, & 2, & -1 \\ 3, & 6, & -2 \end{vmatrix}$，並計算這個行列式。

$$\begin{vmatrix} 2, & -1, & 3 \\ 1, & 2, & -1 \\ 3, & 6, & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 1, & -1 \\ 3, & -2 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 2, & 3 \\ 3, & -2 \end{vmatrix} - 6\cdot\begin{vmatrix} 2, & 3 \\ 1, & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2+3) + 2\cdot(-4-9) - 6\cdot(-2-3) = 5.$$

如果利用行列式的第四個性質（見第 8 頁），預先變換行列式，使它的某一行或某一列裏有很多的元素等於零，則依照這一行或這一列的元素得到的展開式就可使計算更加簡化。

仍用上面的例子說明，即在依照一行或一列的元素展開行列式之前，將第一行的元素各加以第三行的對應元素，於是根據第四個性質便得

$$\begin{vmatrix} 2, & -1, & 3 \\ 1, & 2, & -1 \\ 3, & 6, & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5, & -1, & 3 \\ 0, & 2, & -1 \\ 1, & 6, & -2 \end{vmatrix}$$

再利用同一個性質，將第三行的元素乘 2 加到第二行上去；於是得

$$\begin{vmatrix} 5, & -1, & 3 \\ 0, & 2, & -1 \\ 1, & 6, & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5, & 5, & 3 \\ 0, & 0, & -1 \\ 1, & 2, & -2 \end{vmatrix}$$

現在把最後這個行列式按照第二列的元素展開，這時展開式中的前兩項等於零，所以我們得到

$$\begin{vmatrix} 5, & 5, & 3 \\ 0, & 0, & -1 \\ 1, & 2, & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 5, & 5 \\ 1, & 2 \end{vmatrix} = 10-5=5.$$

現在我們指出一個對今後很重要的事實：如果在（7）式中將第一個式子裏的因子 a_1，a_2，a_3 換成任意的另一行的元素，例如 b_1，b_2，b_3，立即作出下式：

$$b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3,$$