数学物理方程习题集

[苏] A.B.比察捷
Д.Ф.卡林庆柯 著
向熙廷 向红锋 译

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l \\ u(x.0) = \varphi(x) \\ u(0.t) = u(l.t) = 0 \end{cases}$$

湖南师范大学出版社

数学物理方程习题集

〔苏〕 А.В. 比 察 捷
Д.Ф. 卡林庆柯 著

向熙廷 向红锋 译

湖南师范大学出版社

内 容 提 要

本书作者是著名数学家、苏联科学院院士A.B.比察捷教授等。这是一本很有特色的数学物理方程教学用书，内容丰富、习题典型、问题新颖、类型多样、富有启发性，共收857个题，包括1000多个问题。每章都列有重要概念、定理等基本理论知识，便于读者理解巩固所学知识。书后列有答案、解法或提示。

本书可作为综合大学、师范院校和工科院校的数学、计算数学、物理、力学等专业的数学物理方程教学用书，也可供数学物理专业研究生和工程技术人员参考。

СБОРНИК ЗАДАЧ

ПО УРАВНЕНИЯМ

МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

А.В.Бицадзе, Д.Ф.Калиниченко

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ 1985

МОСКВА «НАУКА»

数学物理方程习题集

[苏] A.B.比察捷 Д.Ф.卡林庆柯 著

向熙廷 向红锋 译

责任编辑：廖建军

湖南师范大学出版社出版发行 湘潭大学印刷厂印刷

787×1092毫米 32开 14印张 327千字

1991年6月第1版 1991年6月第1次印刷

印数：00,001-03,500

书号：ISBN7-81031-084-4/O·003

定价：4.60元

目　录

序言………………………………………………………………………… I

译者的话…………………………………………………………………… 2

第一章　绪论　偏微分方程与偏微分方程组的分类　含两个自变量的二阶偏微分方程化为标准型　数学物理方程的导出

§ 1　偏微分方程及其解　偏微分方程组……………………… 3

§ 2　偏微分方程和偏微分方程组的分类……………………… 6

§ 3　含两个自变量的二阶线性偏微分方程化为标准型………………………………………………………12

§ 4　数学物理中某些现象的数学模型…………………………17

第二章　椭圆型方程

§ 1　调和函数的基本性质……………………………………33

§ 2　关于Laplace方程和Poisson方程的最简单问题………………………………………………………40

§ 3　调和函数的某些问题……………………………………47

§ 4　位势…………………………………………………………54

§ 5　其它类型的椭圆型方程…………………………………61

§ 6　椭圆型方程解的构造性质………………………………66

第三章　双曲型方程

§ 1　波动方程……………………………………………………75

§ 2　双曲型方程的适定性问题………………………………89

§ 3　其它类型的双曲型方程　Laplace 方程的 Cauchy 问题 ……………………………………………95

§ 4　双曲型方程解的光滑性和关于它的不适定
性问题……………………………………………… 105
第四章　抛物型方程
§ 1　热传导方程……………………………………… 110
§ 2　抛物型方程的某些其它例子…………………… 117
第五章　求解偏微分方程问题常用的方法
§ 1　分离变量法（Fourier 方法）…………………… 120
§ 2　特殊函数　渐近展开…………………………… 140
§ 3　积分变换法……………………………………… 162
§ 4　有限差分法……………………………………… 170
§ 5　变分方法………………………………………… 174
答案，提示，解法………………………………… 178
附录………………………………………………… 424
外国人名对照索引………………………………… 443

序　　言

这本数学物理方程习题集是供各高等学校数学系、物理系及工程物理系的大学生用的。书由两部分组成。第一部分叙述问题的条件，并在各章每一节的开头都列有数学物理方程相应部分的一些必备知识。第二部分是问题的答案，并有对较难问题的解法注释。

书中特别注意到对于椭圆型方程、双曲型方程和抛物型方程的基本问题求解时在实际中常用的方法。

在本书的第二版中增加了问题的数量，其中有的包含在一些新的章节内。对一些部分叙述的内容做了改动，并改正了印刷中的错误。

作者对于Л.Д.库亚弗切夫、С.И.波霍扎叶夫、М.Л.克拉斯诺夫、А.А.瓦沙里努和А.И.基谢列夫提出的宝贵意见与帮助改进内容的叙述表示感谢。我们也对Г.В.卡林庆柯在整理手稿与校对书稿时给予的帮助表示感谢。

А.В. 比察捷
Д.Ф. 卡林庆柯

译 者 的 话

1985年春我在给数学专业学生讲授《数学物理方程》课时，参阅了苏联著名数学家A．B．比察捷等教授合著的《数学物理方程习题集》（第一版，1976年）的英译本。深感该书内容丰富、习题典型、问题新颖、类型多样，并选用一些习题给同学们练习，受到同学们的欢迎。由于教学的需要和同学们的要求，我们将该书的英译本翻译成中文。

1986年秋我们得到该书的俄文版（第二版，1985年）。第二版内容比第一版有较大的改动和补充。我们按该书的第二版进行了增补。

在翻译过程中，我们特别注意保持原著的特色与风貌，并将原版中的一些错误进行了更正。在整个工作中，我们得到北京大学姜礼尚教授、吉林大学伍卓群教授、华中理工大学陈庆益教授的热情指导，得到全国高等院校数学物理方程研讨会组委会理事们的大力支持，得到湘潭大学教务处、数学系领导、微分方程教研室同志们以及河南大学赵庆林先生的热情帮助。在此表示深切地感谢。

这本好书拖了几年才得以出版与读者见面，我们应该感谢湖南师范大学出版社同志们的积极工作。

向熙廷

1990年12月 9 日于湘潭大学

第一章

绪论 偏微分方程与偏微分方程组的分类 含两个自变量的二阶偏微分方程化为标准型 数学物理方程的导出

§1 偏微分方程及其解 偏微分方程组

我们用D表示n-维欧几里得空间E_n中点$x=(x_1,\cdots,x_n)$的区域，其中$x_1,\cdots,x_n$，$n\geqslant 2$是笛卡儿正交坐标。

设$F\equiv F(x,\cdots,p_{i_1\cdots i_n},\cdots)$是点$x\in D$和实变量

$$p_{i_1\cdots i_n}\equiv\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}$$

的已知实函数，其中$i_1,\cdots,i_n$，$\left(\sum_{j=1}^n i_j=k,k=0,\cdots,m,m\geqslant 1\right)$是非负的整指标。函数$F$的偏导数

$$\frac{\partial F}{\partial p_{i_1\cdots i_n}},\quad \sum_{j=1}^n i_j=m,$$

至少有一个不为零。

形如

$$F\left(x,\cdots,\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}},\cdots\right)=0,x\in D\qquad(1)$$

的方程称为关于未知函数$u\equiv u(x)$的m**阶偏微分方程**。方程(1)左端F的表示式称为m**阶偏微分算子**，它用符号表示确定的运

算作用在函数u上。

定义在区域D中的任何实函数$u(x)$同它的偏导数都连续，代入方程（1）使之变为恒等式，则称$u(x)$是偏微分方程（1）的**正则解**。

除正则解之外，在偏微分方程理论中也起重要作用的是所谓的**初等解**或**基本解**。

当F是一N-维向量$F=(F_1,\cdots,F_N)$，它的分量$F_i(x,\cdots,p_{i_1\cdots i_n},\cdots)$，$i=1,\cdots,N$，依赖于$x\in D$和$M$-维向量$p_{i_1\cdots i_n}=\left(p^1_{i_1\cdots i_n},\cdots,p^M_{i_1\cdots i_n}\right)$，这时，向量方程（1）称为关于未知函数$u_1,\cdots,u_M$（或关于未知向量$u=(u_1,\cdots,u_M)$）的**偏微分方程组**。

当F是线性地依赖于所有的$\dfrac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}$，$0\leqslant k\leqslant m$，称方程（1）是**线性的**。

线性偏微分方程可以写成

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{i_1\cdots i_n}a_{i_1\cdots i_n}(x)\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}=f(x),\quad \sum_{j=1}^{n}i_j=k,\quad x\in D,$$

或简写为

$$Lu=f(x),\quad x\in D,$$

其中
$$L\equiv\sum_{k=0}^{m}\sum_{i_1\cdots i_n}a_{i_1\cdots i_n}(x)\frac{\partial^k}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}},\quad \sum_{j=1}^{n}i_j=k,$$

是m**阶线性偏微分算子**。

当$f(x)\equiv 0$或$f(x)\not\equiv 0$，则分别称为**齐次**或**非齐次**线性偏微分方程。

当F仅线性地依赖于最高阶导数

$$\frac{\partial^m u}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}},\quad \sum_{j=1}^{n}i_j=m,$$

称方程(1)是拟线性的。

判定下列等式是否为偏微分方程：

1. $\cos(u_x+u_y)-\cos u_x\cos u_y+\sin u_x\sin u_y=0$.

2. $u_{xx}^2+u_{yy}^2-(u_{xx}-u_{yy})^2=0$.

3. $\sin^2(u_{xx}+u_{xy})+\cos^2(u_{xx}+u_{xy})-u=1$.

4. $\sin(u_{xy}+u_x)-\sin u_{xy}\cos u_x-\cos u_{xy}\sin u_x+2u=0$.

5. $\dfrac{\partial}{\partial x}\mathrm{tg}u-u_x\sec^2 u-3u+2=0$.

6. $\ln|u_xu_y|-\ln|u_x|-\ln|u_y|+5u-6=0$.

确定下列偏微分方程的阶：

7. $\ln|u_{xx}u_{yy}|-\ln|u_{xx}|-\ln|u_{yy}|+u_x+u_y=0$.

8. $u_xu_{xy}^2+(u_{xx}^2-2u_{xy}^2+u_y)^2-2xy=0$.

9. $\cos^2u_{xy}+\sin^2u_{xy}-2u_x^2-3u_y+u=0$.

10. $2(u_x-2u)u_{xy}-\dfrac{\partial}{\partial y}(u_x-2u)^2-xy=0$.

11. $\dfrac{\partial}{\partial x}(u_{yy}^2-u_y)-2u_{yy}\dfrac{\partial}{\partial y}(u_{xy}-u_x)-2u_x+2=0$.

12. $2u_{xx}u_{xxy}-\dfrac{\partial}{\partial y}(u_{xx}-u_y)^2-2u_yu_{xxy}+u_x=0$.

判定下列偏微分方程哪些是线性的（齐次或者非齐次），哪些是非线性的（拟线性的）：

13. $u_xu_{xy}^2+2xuu_{yy}-3xyu_y-u=0$.

14. $u_yu_{xx}-3x^2uu_{xy}+2u_x-f(x,y)u=0$.

15. $2\sin(x+y)u_{xx}-x\cos yu_{xy}+xyu_x-3u+1=0$.

16. $x^2yu_{xxy}+2e^xy^2u_{xy}-(x^2y^2+1)u_{xx}-2u=0$.

17. $3u_{xy}-6u_{xx}+7u_y-u_x+8x=0$.

18. $u_{xy}u_{xx}-3u_{yy}-6xu_y+xyu=0$.

19. $a(x,y)u_{xx}+b(x,y)u_{xy}+c(x,y)u_{yy}+d(x,y)u_x$
$$+e(x,y)u_y+h(x,y)=0.$$

20. $a(x,y,u_x,u_{xy})u_{xyy}+b(x,y,u_{yy})u_{yyy}+2uu_{xy}^2$
$$-f(x,y)=0.$$

21. $u_{xy}+u_y+u^2-xy=0.$

22. $u_{xy}+2\dfrac{\partial}{\partial x}(u_x^2+u)-6x\sin y=0.$

23. $2xu_{xy}-6\dfrac{\partial}{\partial x}(u^2-xy)+u_{yy}=0.$

24. $\dfrac{\partial}{\partial y}(yu_y+u_x^2)-2u_xu_{xy}+u_x-6u=0.$

§2 偏微分方程与偏微分方程组的分类

形如

$$K(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=\sum_{i_1\cdots i_n}\frac{\partial F}{\partial p_{i_1\cdots i_n}}\lambda_1^{i_1}\cdots\lambda_n^{i_n},\quad \sum_{j=1}^{n}i_j=m, \tag{2}$$

关于实参数$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$是$m$阶的，称它为对应于偏微分方程(1)的**特征形式**

二阶线性方程

$$\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}B_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+Cu=f \tag{3}$$

的特征形式(2)是二次型

$$Q(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=\sum_{i,j=1}A_{ij}(x)\lambda_i\lambda_j$$

在每一个固定点$x\in D$，二次型Q可以用变量的非奇异（非退化的）仿射变换 $\lambda_i=\lambda_i(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，$i=1,\cdots,n$ 化成它的标准型

$$Q=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\xi_i^2 \tag{4}$$

其中系数 α_i 取值为1，-1，0。当然，二次型(4)的系数中负数和零的个数是不依赖于二次型化为标准型的方法。在这事实的基础上对线性方程（3）进行分类。

如果在每一点$x\in D$，标准型（4）的系数 α_i 都不为零且同号；都不为零且不完全同号或至少有一个（但不是全部）等于零，则分别称为线性方程（3）在区域D内属于**椭圆型**、**双曲型**或**抛物型**。

方程(3)在区域D内属于椭圆型，如果存在同号的实数$k_0\neq 0$和$k_1\neq 0$，使得对所有$x\in D$有

$$k_0\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\leqslant Q(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\leqslant k_1\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2$$

就称它在区域D是一致椭圆型方程。

m阶线性偏微分方程的一般形式为

$$\sum_{i_1\cdots i_n}a_{i_1\cdots i_n}(x)\frac{\partial^m u}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}+L_1u=f(x)\ ,\quad \sum_{j=1}^{n}i_j=m, \tag{5}$$

其中L_1是阶数低于m的**线性偏微分算子**。特征形式(2)为

$$K(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=\sum_{i_1\cdots i_n}a_{i_1\cdots i_n}\lambda_1^{i_1}\cdots\lambda_n^{i_n}\ ,\quad \sum_{j=1}^{n}i_j=m \tag{6}$$

如果对于固定点$x\in D$，有一仿射变换$\lambda_i=\lambda_i(\mu_1,\cdots,\mu_n)$，$i=1,\cdots,n$，使表达式（6）化为标准型仅包含$l$（$0<l<n$）个变量$\mu_i$，我们称方程(5)在这点$x\in D$是**退化抛物型的**。

在不是退化抛物型的情形，如果方程

$$K(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=0 \tag{7}$$

没有异于$\lambda_1=0,\cdots,\lambda_n=0$的实数解，我们称方程（5）在这点

$x\in D$ 属椭圆型的。

如果在变量$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$的$n$-维空间中存在这样的直线，若取它为新变量 $\mu_1,\cdots,\mu_n$ 的坐标轴，得到仿射变换 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，对任意选取其它变量，则关于沿这轴变换的坐标，变换后的方程(7)恰有m个实根（单根或重根）。

m阶的非线性偏微分方程的分类，类似地按照特征形式(2)的方法。然而，对于非线性偏微分方程的特征形式(2)的系数不仅依赖于点$x\in D$,而且还依赖于所求的解和它的导数，因此在这种情况下，仅能对已知的特解按型进行分类。

当方程（1）是关于N个未知数的N个偏微分方程组，即当$M=N$和方程组的每一个方程的阶数等于m。我们借助方阵

$$\left\|\frac{\partial F_i}{\partial p^j_{i_1\cdots i_n}}\right\|,\quad i,j=1,\cdots,N,\quad \sum_{k=1}^{n} i_k=m,$$

能构造Nm阵的关于n个实参数$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$的二次型

$$K(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=det\sum_{i_1\cdots i_n}\left\|\frac{\partial F_i}{\partial p^j_{i_1\cdots i_n}}\right\|\lambda_1^{i_1}\cdots\lambda_n^{i_n},\quad \sum_{k=1}^{n} i_k=m, \tag{8}$$

方程组（1）的分类按照二次型（8）的特征来进行，完全类似于上面考虑的一个m阶偏微分方程的情形。

确定下列方程的类型：

25. $u_{xx}+4u_{xy}+u_{yy}+u_x+u_y+2u-x^2y=0$。

26. $2u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}+2u_x+2u_y-u=0$。

27. $u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}+u_x+u_y+3u-xy^2=0$。

28. $4u_{xx}+2u_{yy}-6u_{zz}+6u_{xy}+10u_{xz}+4u_{yz}+2u=0$。

29. $2u_{xy}-2u_{xz}+2u_{yz}+3u_x-u=0$。

30. $u_{xx}+2u_{xy}+2u_{yy}+4u_{yz}+5u_{zz}-xu_x+yu_z=0$。

31. $u_{xx}-4u_{xy}+2u_{xz}+4u_{yy}+u_{zz}-2xyu_x+3xu=0$。

32. $u_{xy}+u_{yz}+u_{xz}-3x^2u_y+y\sin xu+xe^{-y}=0$.

33. $5u_{xx}+u_{yy}+5u_{zz}+4u_{xy}-8u_{xz}-4u_{yz}-u+yz^2\sin x=0$.

34. $u_{xx}+2u_{xy}+2u_{yy}-2u_{yz}+3u_z-u=0$.

35. $3u_{xx}+4u_{yy}+5u_{zz}+4u_{xy}-4u_{yz}+2u_x-u_y+xye^z=0$.

36. $y^{2m+1}u_{xx}+u_{yy}-u_x=0$，其中$m$是非负整数。

37. $xu_{xx}+yu_{yy}-u=0$.

对于已知解$u(x,y)$，确定下列方程的类型：

38. $u_{xx}^2+(u_{xx}-2)u_{xy}-u_{yy}^2=0$，$u=x^2+y^2$.

39. $u_{xy}^2+u_{xx}u_{yy}+u_{yy}^2=8$，$u=x^2+y^2$，$u=2\sqrt{2}\,xy$.

40. $u_{xx}^2-4u_{xy}+u_{yy}^2=0$，$u=(x+y)^2$，$u=x$，

$$u=x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{17}{16}xy.$$

41. $u_{xx}+u_{xy}u_{yy}+u_{yy}^2-4u_{yy}=0$，$u=2y^2$，$u=5xy$，$u=x$.

42. $3u_{xx}^3-6u_{xy}+u_{yy}-4=0$，$u=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$，$u=2y^2$.

43. $u_{xx}^2u_{xy}-5u_{yy}+u_x-2(x+y)-8=0$，$u=x^2+2xy$.

44. $u_{xx}^4+2u_{xy}^2-3u_{yy}+u_y-2x=0$，$u=2xy-8y$.

45. $2u_{xx}^3+2u_{xy}^5+3u_{yy}-2u_y+2x=0$，$u=xy-\frac{1}{2}x^2$.

46. $5u_{xx}^5-7u_{xy}+25u_{yy}-150y=0$，$u=\frac{x^2}{2}+y^3+\frac{5}{7}xy$.

47. $u_{xx}^2+5u_{xy}^2+6u_{yy}^2=12$，$u=\frac{1}{2}(x+y)^2$，$u=\sqrt{3}\,x^2$.

48. $u_{xx}^3-4u_{xy}^2+7u_{yy}-4u_x+u_y+3x+4y+3=0$，

$$u=\frac{1}{2}x^2+xy.$$

49. $u_{xx}^2-2u_{xy}^2+u_{yy}^2+2u_x-2(x+y)=0$，$u=\frac{1}{2}(x+y)^2$.

50. $u_{xy}^2+u_{xx}u_{yy}+u_{yy}^2+2u_{xx}+2u_{yy}=0, u=x^2-y^2, u=x$.

51. 在方程

$$F(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy})=0$$

中，F关于最后三个变量是连续可微的，且F关于这三个变量的导数至少有一个不为零。求这偏微分方程属于椭圆型、抛物型和双曲型的条件。

确定下列方程组的类型：

52. $2u_x+3u_y-3v_y+u=0$,

$-u_x+u_y+v_x+xy=0$.

53. $2u_x+3v_y+3u_y-6u=0$,

$u_x+u_y+v_x+x^2u=0$.

54. $2u_x+3v_y+3u_y-2u=0$,

$u_x+v_x-u+xy^2=0$.

55. $2u_x-4v_x+3u_y+8v_y-u=0$,

$3u_x-2v_x+6u_y+3v_y+2u=0$.

56. $2u_x+v_x+12u_y-2u=0$,

$v_x+4u_y+v_y+xy=0$.

57. $2u_x+v_x+7u_y-2u=0$,

$3u_x+3v_x+31u_y+v_y-e^y\sin x=0$.

58. $5u_x+22.5v_x+2u_y+v_y-6u=0$,

$5v_x+2u_y+3v_y-2xu=0$.

59. $v_x+12u_y+v_y+3u-32xe^y=0$,

$-5u_x+\frac{5}{6}v_x+u_y+v_y-e^xu=0$.

60. $15u_x+9v_x+12u_y+17v_y-3x\cos y=0$,

$3u_x+2v_x+v_y-6u=0$.

61. $3u_x+3v_x+3u_y+4v_y=0$,

$$2u_x+3v_x-v_y-3u=0.$$

62. $u_x-v_y+2u_z-3v_z-u=0,$

$$u_y+2v_x-2u_z+v_y+2u=0.$$

63. $u_x-u_y+2v_y-3v_z+2u=0,$

$$u_x+2u_z-v_x+v_z-u=0.$$

64. $u_x+u_y+v_y+v_z-xyu=0,$

$$v_x-u_y-v_y+u_z+2u=0.$$

65. $2u_x-3u_y+v_y+f(x,y,u,v)=0,$

$$3v_x+2v_y-u_x+g(x,y,u,v)=0.$$

66. $2u_x+3u_y-v_y+f(x,y,u,v)=0,$

$$3v_x+2v_y-u_x+g(x,y,u,v)=0.$$

67. $3u_x+2u_y-v_y+f(x,y,u,v)=0,$

$$11u_x+2v_x+3v_y+g(x,y,u,v)=0.$$

68. $u_x-2u_y-3v_x+v_y+f(x,y,u,v)=0,$

$$u_x+u_y+2v_x-v_y+g(x,y,u,v)=0.$$

69. $u_y-2u_x+v_x-3v_y+f(x,y,u,v)=0,$

$$u_x+u_y-v_x+2v_y+g(x,y,u,v)=0.$$

70. $u_x+2v_x-u_y+3v_y+f(x,y,u,v)=0,$

$$2u_x-3v_x+u_y-v_y+g(x,y,u,v)=0.$$

确定下列依赖于参数 k 的方程组的类型:

71. $u_x-kv_y=0,$

$$u_y+v_x=0.$$

72. $u_y-kv_x+v_y=0,$

$$u_x+kv_y-u=0.$$

73. $u_y-kv_x+kv_y=0,$

$$u_x+v_y+2v=0.$$

§3 含两个自变量的二阶线性偏微分方程化为标准型

含两个自变量的二阶线性偏微分方程的一般形式为

$$au_{xx}+2bu_{xy}+cu_{yy}+du_x+eu_y+fu+g=0, \qquad (9)$$

其中a,b,c,d,e,f,g是自变量x和y的已知函数。

我们用△表示对应于方程(9)的二次型

$$Q(\lambda_1,\lambda_2)=a\lambda_1^2+2b\lambda_1\lambda_2+c\lambda_2^2, \qquad (10)$$

的判别式b^2-ac。

设Ω是一阶非线性偏微分方程

$$a\Omega_x^2+2b\Omega_x\Omega_y+c\Omega_y^2=0,$$

的解，由形如 $\Omega(x,y)=\text{const}$ 的方程所确定的曲线称为方程（9）的**特征曲线**。特征曲线上每一点(x,y)的切向量 (dx,dy)的分量满足等式

$$ady^2-2bdydx+cdx^2=0 \qquad (11)$$

按照在上一节中对方程(9)的分类是椭圆型、双曲型或抛物型依赖于(10)式（或(11)式）是正定或负定，既不为退化也不为正定或负定，或为退化的，也就是分别取决于它的判别式$\triangle=b^2-a^2$是负的、正的或等于零。

在椭圆型情形，方程(9)能化为标准型

$$v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}+d_1v_\xi+e_1v_\eta+f_1v+g_1=0, \qquad (12)$$

是借助于形如 $\xi=\varphi(x,y)$，$\eta=\psi(x,y)$ (13)

的自变量替换，其中 $\varphi(x,y)$ 和 $\psi(x,y)$ 是一阶线性偏微分方程组

$$a\varphi_x+b\varphi_y+\sqrt{-\triangle}\psi_y=0,\quad a\psi_x+b\psi_y-\sqrt{-\triangle}\varphi_y=0$$

的解，它们的Jacobian$\dfrac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,y)}$不为零。

在双曲型情形，替换(13)的函数 $\varphi(x,y)$和$\psi(x,y)$是偏微