世界数学奥林匹克解题大辞典

组合卷

中国数学奥林匹克委员会
南开大学数学系

河北少年儿童出版社

世界数学奥林匹克解题大辞典

组合卷

本卷主编　李成章

河北少年儿童出版社

图书在版编目（CIP）数据

世界数学奥林匹克解题大辞典. 组合卷/李成章主编. 石家庄：河北少年儿童出版社，2002

ISBN 7-5376-2403-8

Ⅰ. 世… Ⅱ. 李… Ⅲ. 数学课-中学-竞赛题-解题 Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第77372号

世界数学奥林匹克解题大辞典

组合卷

中国数学奥林匹克委员会　南开大学数学系

河北少年儿童出版社出版

河北新华印刷一厂印刷

新　华　书　店　经　销

开本850×1168毫米 1/32　印张32.625

2002年5月第1版　2005年8月第2次印刷

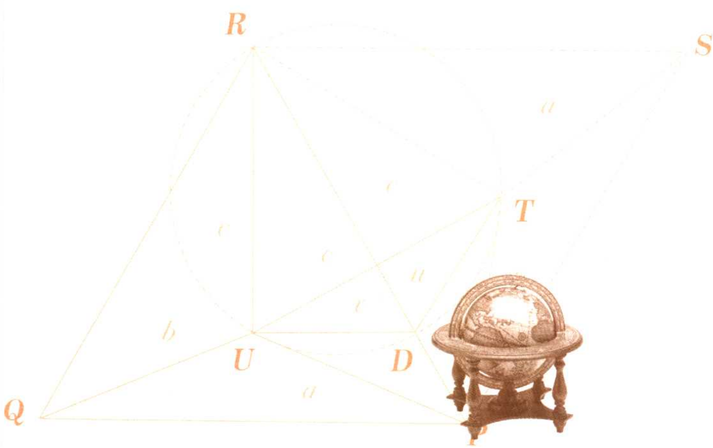
印数:1—3000

ISBN 7-5376-2403-8

G·1287　定价:48.70元

世界数学奥林匹克解题大辞典

中国数学奥林匹克委员会
南开大学数学系



序　言

王元

数学奥林匹克是对青少年极其有益的一项活动.它通过科学与趣味相统一的丰富多彩的题目,使许许多多的优秀学生在中学时期就经受了考验,接受了各种现代数学思想的熏陶,使他们提高了能力,增长了知识,开阔了眼界.数学奥林匹克活动的广泛开展,不仅丰富了中学生的课外活动,促进了中学数学教学的改革,而且发现和培养了一大批有才能的青年,这些青年将成为我国科学界在下个世纪赶超世界先进水平的中坚力量.

数学竞赛中没有失败者.虽然每年参加中国数学奥林匹克的选手百余人,作为国家队出国参加国际数学奥林匹克的选手也只有六人,但是,那些因为运气不佳,培训不足,见识不广或临场发挥不理想等因素而没有获胜的学生也不是失败者.他们在参加竞赛及培训中所培养起来的求解难题的兴趣和欲望,那种永不满足,勇攀高峰的精神,分析问题的严密的逻辑思维,解决问题的灵活多样的应变能力以及对现代数学思想的理解和积累,正是进行成功的科学研究并在将来成为科学家的必要条件.因此说,这远比在一次竞赛中获胜更为宝贵.他们中的许多人进入大学后成为学习尖子,有些人正在攻读硕士和博士学位并成为数学研究队伍中的后起之秀,就是最有力的证明.即使对于那些进入大学后改学其他

专业的学生,他们也将因思维敏捷,头脑灵活,勇于创新和具有较强的数学能力而使自己终身受益.因此,数学奥林匹克必将继续下去.

数学奥林匹克已有一百多年的历史,且越来越受到重视,现在,每年举办数学奥林匹克的国家和地区已超过70个.已有的竞赛题目成千上万,其中构思独特、新颖别致、灵活深邃的题目有几千道之多,而且还在以每年几百道的速度继续增长.这些题目散载于国内外的各种书籍与杂志之中,任何个人手中的资料都很不完整,使用起来极不方便.这次河北少年儿童出版社邀请国内数学奥林匹克界的专家、教授和高级教练员共同精选了国内外数学奥林匹克的试题并给出精辟、准确的解答,编写了这套《世界数学奥林匹克解题大辞典》.这是一次很有意义的壮举,是一项艰苦而又巨大的工程,是我国数学奥林匹克事业的一项基本建设.本书的出版,必将推动我国的数学奥林匹克事业稳步地向前发展,有助于我国在国际数学奥林匹克中保持优势,立于世界数学强国之林,就此我以兴奋的心情对这套解题大辞典的出版表示热烈的祝贺,并对在此书编写过程中付出辛勤劳动的各位作者和出版过程中做出多方面努力的编辑人员及支持本书出版的各位领导表示衷心的感谢.

近10年来,我国学生在国际数学奥林匹克中不断取得好成绩,我国所提供的候选题也接连被选为试题,这是值得高兴的事情.但是,我们也应清醒地看到,与一些先进国家相比,我国开展数学奥林匹克和参加国际数学奥林匹克的时间毕竟不长,这方面的资料也不很完全.因此,这套辞典的内容也是不很完全的.此外,以后每年新出现的竞赛题目也要补充进来.希望大家继续努力,不断完善这套大辞典的内容,为数学奥林匹克事业做出新贡献.

目　录

组合卷

第一章　计　数

1·1　在 1,2,3,4,5 的排列 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 中,满足 $a_1 < a_2, a_2 > a_3, a_3 < a_4, a_4 > a_5$ 的排列 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 共有多少种.

(中国上海市数学竞赛,1992 年)

[解]　满足要求的排列,5 只能在第二或第四个位置,即 $5 = a_2$ 或 $5 = a_4$.

(1) 当 $5 = a_2$ 时,$a_1 < a_2, a_2 > a_3$,因此 a_1 可以是 1,2,3,4 中的任一个,a_3,a_4,a_5 是另三个数,其中 a_4 是最大的,a_3,a_5 有两种选法. 所以共有

$$C_4^1 \cdot C_2^1 = 8(\text{种}).$$

(2) 当 $5 = a_4$ 时,同样有 8 种.

所以共有 16 种排列.

1·2　如果一个非负整数有序对(m,n)在求和 $m+n$ 时无需进位(十进制),则称它为"简单"的. 求所有和为 1492 的简单的非负整数有序对的个数.

(第 5 届美国数学邀请赛,1987 年)

[解]　因为在求和时各位都没有进位,所以个位加至 2 的方法有 3 种:

$$0+2,1+1,2+0.$$

十位加至 9 的方法有 10 种:

$$0+9,1+8,2+7,3+6,4+5,$$
$$5+4,6+3,7+2,8+1,9+0.$$

同理,百位加至 4 和千位加至 1 的方法分别有 5 种和 2 种.

综上，由乘法定理便知，满足要求的数对共有 $3\times10\times5\times2=300$ 个.

1·3 如果一个至少有两位的十进制正整数中，它的每一位数总比其右边位置的数小，则称之为“上升数”. 求上升数的总数.

（第 10 届美国数学邀请赛，1992 年）

[解] 按已知，上升数的各位数字互不相同. 又因首位数字不能为 0，故上升数至多有 9 位数字. 所以，上升数的各位数字一定是集合

$$S=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

的一个至少有两个元素的子集中的各数从小到大排列而成的.

因 S 有 9 个元素，故它的所有至少有两个元素的子集的总数为 $2^9-C_9^0-C_9^1=502$. 从而知共有 502 个上升数.

1·4 用 2，4，6 三个数字来构造六位数，但是不允许有两个连着的 2 出现在六位数中（例如 626442 是允许的，226426 就不允许），问这样的六位数共有多少个？

（中国上海市数学竞赛，1990 年）

[解 1] (1) 若六位数中没有 2，则每一位只能从 4 或 6 中选一个，这时有 $2^6=64$ 个.

(2) 若六位数中只有 1 个 2，则 2 有 $C_6^1=6$ 种位置选择，其余 5 个位置从 4 或 6 中选取，因此有 $6\cdot2^5=192$ 个.

(3) 若六位数中有 2 个 2，这时有 $2^4\cdot C_5^2=160$ 个.

(4) 若六位数中有 3 个 2，这时有 $2^3\cdot C_4^3=32$ 个.

由题意，不可能在六位数中出现 4 个或 4 个以上的 2.

于是共有

$$64+192+160+32=448\text{ 个}.$$

[解 2] 设用 2，4，6 三个数字能构造出 a_n 个符合题意的 n 位数，则

$$a_1=3,\quad a_2=8\begin{pmatrix}24,42,26,62,\\46,64,44,66.\end{pmatrix}.$$

若首位数 Y 是 2，则第二位数 Y 只能是 4 或 6，所以这样的 n 位数有 $2a_{n-2}$ 个.

若首位数 Y 不是 2，则首位数 Y 是 4 或 6，这样的 n 位数有 $2a_{n-1}$ 个.

于是有递推式

$$a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2} \quad (n = 3,4,\cdots).$$

由此推出

$$a_3 = 2(a_1 + a_2) = 22,\ a_4 = 2(a_2 + a_3) = 60,$$
$$a_5 = 2(a_3 + a_4) = 164, a_6 = 2(a_4 + a_5) = 448,$$

即这样的六位数共 448 个.

1·5 当将写有数码的纸倒过来看时,数码 0,1,8 不变,数码 6 与 9 互变,其他数码在倒过来看时都没有意义.求将写有九位数的纸倒过来看时不变的九位数的个数.

(第 22 届莫斯科数学奥林匹克,1959 年)

[解] 当把写有九位数的纸倒过来时,首位数字变成末位,第 2 位数字变成第 8 位 … 第 5 位数字不动.故可将 9 位数字分成 5 组:首位与末位一组,第 2,8 两位一组,第 3,7 两位一组,第 4,6 两位一组,第 5 位自己一组.易见,第 1 组有 4 组不同值:(1,1),(8,8),(6,9),(9,6);第 2,3,4 三组各有 5 组不同值:(0,0),(1,1),(8,8),(6,9),(9,6);第 5 组有 0,1,8 三个不同值.故知满足题中要求的九位数的个数为 $4 \times 5^3 \times 3 = 1500$.

1·6 1447,1005,1231 这三个数有许多相同之处:它们都是四位数,最高位都是 1,都恰有两个相同的数字,一共有多少个这样的数?

(第 1 届美国数学邀请赛,1983 年)

[解] 首先,考察相同数字是 1 的正整数.由于首位是 1,故另一个 1 有 3 种位置可以选择.另两位数字不能是 1 且不能相同,故有 P_9^2 种不同排法.因而有

$$m_1 = 3P_9^2 = 216.$$

其次,考察相同数字不是 1 的正整数.这时,相同数字有 9 种不同选法,这两个相同数字在后 3 位有 3 种不同排法.另一位数字既不能是 1,又不能与相同数字相同,故有 8 种不同取法.因而有

$$m_2 = 9 \times 3 \times 8 = 216.$$

综上可知,满足要求的四位数共有 $m = m_1 + m_2 = 432$ 个.

1·7 任给 n 个互不相同的正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$,用它们组成一切可能的和(分别有 1 至 n 个加数).求证在这些和数中最少存在$\frac{1}{2}n(n+1)$

个互不相同的数.

(第3届全俄数学奥林匹克,1963年)

[证] 不妨设 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.考察下列各数

$$
\begin{array}{l}
a_1, \quad a_2, \quad \cdots, \quad a_{n-2}, \quad a_{n-1}, \quad a_n, \\
a_1+a_n, \quad a_2+a_n, \quad \cdots, a_{n-2}+a_n, \quad a_{n-1}+a_n, \\
a_1+a_{n-1}+a_n, \quad a_2+a_{n-1}+a_n, \quad \cdots, a_{n-2}+a_{n-1}+a_n, \\
\quad \cdots \qquad\qquad \cdots \\
a_1+a_2+\cdots+a_n.
\end{array}
$$

显然,其中每一个数都大于它前面的一个数.所以这些数互不相同.这些数共有 $n+(n-1)+\cdots+1=\frac{1}{2}n(n+1)$ 个,故知所组成的和数中至少有 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 个互不相同.

另一方面,当 $a_i=i(i=1,2,\cdots,n)$ 时,由它们所组成的每个和数 s 都满足 $1 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}n(n+1)$.可见它们至多有 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 个互不相同的数.

综上可知,在由 n 个互不相同的正数所组成的一切和数中,最少有 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 个互不相同的数.

1·8 设 $a<b<c<d$ 且 (x,y,z,t) 是 (a,b,c,d) 的任意排列,问表达式

$$n=(x-y)^2+(y-z)^2+(z-t)^2+(t-x)^2$$

可以取多少种不同的值?

(匈牙利数学奥林匹克,1946年)

[解1] 因为 n 的表达式关于 (x,y,z,t) 是轮换对称的,故可设 $x=a$.又因表达式关于 y 和 t 是对称的,故对于 (b,c,d) 的6种不同排列,n 至多能取3个不同的值.

另一方面,因为 $a<b<c<d$,故有

$$
\begin{aligned}
& n(a,b,c,d)-n(a,b,d,c) \\
=& (b-c)^2+(d-a)^2-(b-d)^2-(c-a)^2 \\
=& 2(bd+ac-bc-ad)=2(b-a)(d-c)>0, \\
& n(a,c,b,d)-n(a,b,c,d)
\end{aligned}
$$

$$=2(ab+cd-ac-bd)=2(c-b)(d-a)>0,$$

由此可得

$$n(a,c,b,d)>n(a,b,c,d)>n(a,b,d,c),$$

即 n 可取 3 个不同的值.

[解 2] 注意,表达式

$$\begin{aligned}&n(x,y,z,t)+(x-z)^2+(y-t)^2\\=&n(x,y,z,t)+(x^2+y^2+z^2+t^2)-2(xz+yt)\end{aligned}$$

关于(x,y,z,t)是对称的,故其值与(x,y,z,t)是(a,b,c,d)的何种排列无关.又因上式右端第 2 项也是关于(x,y,z,t)对称的,故 $n(x,y,z,t)$ 的不同值的个数与 $xz+yt$ 所能取得的不同值的个数相等.

表达式 $v=xz+yt$ 的值取决于将(a,b,c,d)分成两对的分法,而这种分法恰有 3 种$\{a,b;c,d\}$,$\{a,c;b,d\}$,$\{a,d;b,c\}$,因此 v 有 3 个值:

$$v_1=ab+cd,v_2=ac+bd,v_3=ad+bc.$$

容易验证 $v_1>v_2>v_3$,故知 n 可以取 3 种不同的值.

1·9 设 s 是所有满足下列条件的有理数 r 的集合:

(1)$0<r<1$;

(2)$r=0.abcabcabc\cdots=0.\dot{a}b\dot{c}$,其中 a,b,c 不一定互异.

问当将 s 中的数 r 写成最简分数时,共有多少个不同的分子?

(第 10 届美国数学邀请赛,1992 年)

[解] 因为 $0.\dot{a}b\dot{c}=\frac{abc}{999}$,又因 $999=3^3\times37$,所以,当正整数 abc 既不能被 3 整除又不能被 37 整除时,$\frac{abc}{999}$ 就是最简分数,分子就是 abc.在从 1 到 999 这 999 个正整数中,能被 3 整除的共有$\frac{999}{3}=333$个;能被 37 整除的共有$\frac{999}{37}=27$个;能被 3×37 整除的共有 9 个.由容斥原理知,这样的不同分子共有 $999-333-27+9=648$ 个.

再考察在上面排除掉的那些或是 3 的倍数或是 37 的倍数或二者都是的数中还有哪些可以作为最简分数的分子.

因为 $37^2>999$,所以凡是 37 倍数的 abc,与分母约去 37 之后不会再是 37 的倍数.因此,凡是 37 的倍数都不能是最简分数的分子.

但在 3 的倍数的 abc 中，却有一些可以在约去 3^3 后化出新的分子，即下列 12 个数：

$$\{81k \mid k = 1,2,\cdots,12\}$$

它们分别与 999 约去 27 后，得到的最简分数分别为

$$\frac{3k}{37}, k = 1,2,\cdots,12.$$

它们的分子分别为 3,6,9,…,36. 它们都是 3 的倍数，当然与前面的不同. 故知满足要求的不同分子共有 660 个.

1·10 在前 1000 个正整数中，有多少个可以表示成 $[2x]+[4x]+[6x]+[8x]$ 的形式？其中 x 是某个实数.

（第 3 届美国数学邀请赛，1985 年）

[解 1] 令

$$f(x) = [2x]+[4x]+[6x]+[8x],$$

于是有 $f\left(x+\frac{1}{2}\right) = f(x)+10$. 因此，当某正整数可以用 $f(x)$ 之值表达时，该整数加 10 也可用 $f(x)$ 的值来表达. 因而只须考虑前 10 个自然数用 $f(x)$ 表达的情形就够了.

注意，$f\left(\frac{1}{2}\right) = 10$. 当 $x \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$ 时，$[2x] = 0$，故有

$$f(x) = [4x]+[6x]+[8x].$$

容易看出

(1) 当 $x \in \left(0,\frac{1}{8}\right)$ 时，$f(x) = 0$；

(2) 当 $x \in \left[\frac{1}{8},\frac{1}{6}\right)$ 时，$f(x) = 1$；

(3) 当 $x \in \left[\frac{1}{6},\frac{1}{4}\right)$ 时，$f(x) = 2$；

(4) 当 $x \in \left[\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right)$ 时，$f(x) = 4$；

(5) 当 $x \in \left[\frac{1}{3},\frac{3}{8}\right)$ 时，$f(x) = 5$；

(6) 当 $x \in \left[\frac{3}{8},\frac{1}{2}\right)$ 时，$f(x) = 6$.

可见，当 $x \in \left(0,\frac{1}{2}\right]$ 时，$f(x)$ 可表达 1,2,4,5,6,10 这 6 个自然数. 因此，在前 1000 个自然数中，$f(x)$ 可表达其中的 600 个数.

[解 2] 令

$$f_1(x)=[2x],f_2(x)=[4x],f_3(x)=[6x],f_4(x)=[8x],$$
$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+f_4(x).$$

当 $f_j(x)$ 的值在 x 从小向大变化达到某点而增加1时，我们就把该点称为增值点，并把 $f_j(x)$ 在 $(0,50]$ 中的所有增值点的集合记为 M_j，$j=1,2,3,4$. 容易看出

$$M_1=\left\{\frac{i}{2}\mid i=1,2,\cdots,100\right\},$$
$$M_2=\left\{\frac{i}{4}\mid i=1,2,\cdots,200\right\},$$
$$M_3=\left\{\frac{i}{6}\mid i=1,2,\cdots,300\right\},$$
$$M_4=\left\{\frac{i}{8}\mid i=1,2,\cdots,400\right\}.$$

由此可见，$M_1\subset M_2\subset M_4$，$M_1\subset M_3$，$M_2\cap M_3=M_1=M_3\cap M_4$.

显然，当且仅当某点同时是两个 $f_j(x)$ 的增值点时，$f(x)$ 的值将增加 2，即跳过 1 个自然数不能表达. 同理，当某 x 同时是 3 个或 4 个 $f_j(x)$ 的增值点时，$f(x)$ 的值将跳过 2 个或 3 个自然数. 由上述分析可知 M_1 中每点恰是 4 个 $f_j(x)$ 的增值点，它们共跳过 300 个自然数. 此外，M_2-M_1 中的点同时是 $f_2(x)$ 与 $f_4(x)$ 的增值点，它们共跳过 100 个自然数. 易见，$f(x)$ 没有别的跳值点. 所以 $f(x)$ 可表达 600 个自然数.

1·11 对于 $0\leqslant x\leqslant 100$，求函数 $f(x)=[x]+[2x]+\left[\frac{5x}{3}\right]+[3x]+[4x]$ 所取的不同整数值的个数.

（第 29 届国际数学奥林匹克候选题，1988 年）

[解] 以 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 来分别表示函数 $[x],[2x],[3x],[4x]$ 和 $\left[\frac{5x}{3}\right]$ 的所有间断点的集合，则易知 $A_1\subset A_2\subset A_4$ 且

$$A_3=\left\{\frac{n}{3}\mid n=1,2,\cdots,300\right\},$$
$$A_4=\left\{\frac{n}{4}\mid n=1,2,\cdots,400\right\},$$
$$A_5=\left\{\frac{3n}{5}\mid n=1,2,\cdots,166\right\}.$$

由此可得

$$A_3 \cap A_4 = \{n \mid n = 1,2,\cdots,100\},$$

$$A_3 \cap A_5 = A_4 \cap A_5 = A_3 \cap A_4 \cap A_5$$

$$= \{3n \mid n = 1,2,\cdots,33\}.$$

由容斥原理知 $f(x)$ 的间断点的个数为

$$|A_3| + |A_4| + |A_5| - |A_3 \cap A_4| - |A_3 \cap A_5| - |A_4 \cap A_5|$$

$$+ |A_3 \cap A_4 \cap A_5|$$

$$= 300 + 400 + 166 - 100 - 33 - 33 + 33 = 733.$$

故知 $f(x)$ 所取的不同整数值的个数为 734.

1·12 考察一个仅由数字 1 和 2 组成的 100 位数,允许挑出任意 10 个连续的数字,并将前 5 个与后 5 个数字的位置互换. 如果一个 100 位数可以由另一个经过若干次上述操作而得到,则称这两个数是合同的. 问至多可以选出多少个两两不合同的仅由数字 1 和 2 组成的 100 位数?

(第 36 届莫斯科数学奥林匹克,1973 年)

[解] 因为每次操作时,都是将取出的 10 个数字中的前 5 个数字后移 5 位,后 5 个数字前移 5 位. 故在操作过程中,无论操作了多少次,一个数字的所处位数与它开始时的位数之差一定是 5 的倍数. 换句话说,当把 100 个数分成下列 5 组时

$S_j = \{5k + j \mid k = 0,1,2,\cdots,19\}, j = 1,2,3,4,5$,在操作过程中,每个数字的位数只能在组内变化,而且只要适当安排操作顺序,每个数字可以移到组内任何另一位置. 因此,在合同的意义下,每组内的 20 位数字的相互位置无关,即无论怎样交换位置总是合同的,仅与其中 1 的个数有关,即只要 5 组数字中有一组中 1 的个数不同,两个数一定不是合同的.

对于每一组数来说,其中 1 的个数可为 0,1,2,…,20 个. 故由乘法定理知,互不合同的由数字 1 和 2 组成的 100 位数至多有 21^5 个.

1·13 设正整数 M 在 n 进位表示之下的各位数字互不相同,并且除去最左边的数字外,每个数字都与它左边的某个数字相差 ± 1,试求所有这样的正整数 M 的个数.(答案用 n 的显函数以最简形式给出)

(第 19 届美国数学奥林匹克,1990 年)