启迪思维　拓展视野　培养能力

华罗庚金杯赛培训教程

（初中篇）

施储　马茂年　主编

浙江大學出版社

华罗庚金杯赛培训教程

（初中篇）

主　编　施　储　马茂年

编　委　（按姓氏笔画为序）

马茂年　叶天碧　孙厚康　陈雄杰

施　储　娄保征　虞同军

浙江大學出版社

图书在版编目（CIP）数据

华罗庚金杯赛培训教程．初中篇／施储，马茂年主编．
杭州：浙江大学出版社，2005.7
ISBN 7-308-04278-2

Ⅰ.华...　Ⅱ.①施...②马...　Ⅲ.数学课－初中－
教学参考资料　Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 066184 号

出版发行：浙江大学出版社
（杭州浙大路 38 号　邮政编码 310027）
（E-mail:zupress@zju.edu.cn）
（网址:http://www.zjupress.com）
责任编辑：石国华　王建英
排 版 者：杭州好友排版工作室
印　　刷：杭新印务有限公司
开　　本：787mm×960mm　1/16
印　　张：17
字　　数：420 千
版　　次：2005 年 7 月第 1 版
印　　次：2006 年 2 月第 3 次印刷
书　　号：ISBN 7-308-04278-2/G·898
定　　价：20.00 元

前　言

1986年，由中国少年报社、中央电视台、中国数学会、中国优选法统筹法与经济数学研究会、中国科协青少部五个单位，联合举办了“华罗庚金杯”少年数学邀请赛(以下简称“华杯赛”)，此后每两年举办一届，参赛对象为小学高年级和初中一年级的学生。

“华杯赛”的宗旨是弘扬华罗庚教授的爱国主义精神，学习华老勤奋学习、献身科学的优秀品质，激发广大中小学生学习数学的兴趣，开发智力，普及数学知识，培养科学的思维能力、创新能力和实践能力，引导更多的学生走向热爱数学、热爱科学的道路。

“华杯赛”的赛程分为初赛、复赛和决赛三个阶段。

初赛：由主试委员会提供参考题12～15题，中央电视台第一套节目播放试题20分钟，每道题的思考时间只有30～50秒。虽然参赛的有初中一年级的学生，但是解答试题所需要的知识并不超过小学数学的范围，要求参赛的少年选手有良好的计算能力和敏捷的思维能力。题目难度不大，但富有趣味性，以提高学生学习数学的兴趣和信心。

复赛：从第六届起分小学组和初一组，由主试委员会提供参考题，各参赛城市组织比赛、阅卷，评出全国一、二、三等奖，并从中选拔决赛选手。

决赛：参赛选手分小学组和初一组，经过初赛、复赛的选拔，从获复赛一等奖的选手中选拔参加决赛的选手，名额为中、小学生各两名，由参赛城市组成代表队参加决赛。选手经过两次笔试，决出个人金、银、铜牌，团体总分取前十名，其中前四名队的选手参加口试，最后决出团体冠、亚、季军。获冠军的代表队，将金杯保存至下届杯赛。团体冠军和金牌榜首者的名字将刻在金杯上。

“华杯赛”的命题原则：按照“普及性、趣味性、新颖性”的原则命题。

普及性：全部试题的解答方法不超出初中一年级和小学六年级教学内容。其中要求小学生做的试题的解答方法不超出小学六年级教学大纲。题目活而不难，巧而不偏、不怪，富于启发性。

趣味性：能让学生增强学习数学的兴趣和信心，启发他们用新学的知识去观察和解答现实生活中许许多多的数学问题。寓科学于趣味之中，赋知识、能力的考查于数学的美育之中。

新颖性：每届比赛都有若干新颖、不落俗套的题目，以考查和区分选手们灵活思考的能力及掌握知识的熟练程度。题目既富于思考性，又体现了时代性，力求培养青少年的创造思维能力、解决实际问题的应用能力。

为了帮助青少年朋友参加“华杯赛”,我们组织编写了这套《华罗庚金杯赛培训教材》,分小学、初中(专题方法、实践演练),共四册。

本培训教材不仅对参赛的学生适用,对不参赛的学生,在提高科学素质、应试能力方面也都有实实在在的好处,同时可作为小学、初中数学教师日常教学和指导参加“华杯赛”及各类竞赛的参考资料或数学培训班、数学兴趣小组的培训教材。

本套《华罗庚金杯赛培训教材》丛书,由浙江省数学特级教师、杭州市正教授级高级教师、杭州市教育局教研室副主任施储老师和杭州第十四中学特级教师、浙江师范大学教学教育硕士生导师、中国数学奥林匹克高级教练马茂年老师主编。

由于涉及题目和知识点众多,难免有所疏漏,恳请读者指正。

目　　录

第 1 讲　数的二进位制和多进位制 …… 1
第 2 讲　有趣的数字迷宫 …… 9
第 3 讲　丰富多彩的图形 …… 19
第 4 讲　整数的整除性 …… 29
第 5 讲　带余数的除法 …… 35
第 6 讲　奇数与偶数 …… 40
第 7 讲　质数与合数 …… 45
第 8 讲　约数与倍数 …… 50
第 9 讲　整数的分解与分拆 …… 56
第 10 讲　完全平方数 …… 62
第 11 讲　不定方程 …… 67
第 12 讲　数列求和 …… 72
第 13 讲　估计与估算 …… 81
第 14 讲　绝对值与非负数 …… 87
第 15 讲　新命题的运算 …… 92
第 16 讲　方程与不等式 …… 98
第 17 讲　列不等式(组)解应用题 …… 103
第 18 讲　列不定方程(组)解应用题 …… 110
第 19 讲　利用综合法和分析法解应用题 …… 116
第 20 讲　巧用比例法和画图法解应用题 …… 122
第 21 讲　建立数学模型求解应用题 …… 128
第 22 讲　图形的计算问题 …… 136
第 23 讲　图形的切拼问题 …… 144
第 24 讲　简单的空间图形 …… 152
第 25 讲　计数方法和原理 …… 159
第 26 讲　探索与归纳 …… 163
第 27 讲　包含与排除 …… 169
第 28 讲　抽屉原理 …… 174

第 29 讲 逻辑推理 …… 179
第 30 讲 整体思想 …… 188
第 31 讲 极端原理 …… 194
第 32 讲 分类与反证 …… 199
第 33 讲 离散最值 …… 204
第 34 讲 操作性问题 …… 209
第 35 讲 策略与规划 …… 217
第 36 讲 染色问题与赋值方法 …… 227

练习题解答 …… 232

第 1 讲　数的二进位制和多进位制

知识点拨

大家比较熟悉十进位制的数，如 5，16，287，3094，…，这样的正整数有无穷多个，你想过没有，这样的十进位制的数有什么特征？

(1)这些数可以用如下十个数字表示：0，1，2，3，4，5，6，7，8，9；

(2)这些数可以比较大小，也可以进行加、减、乘、除的四则运算；

(3)这些数的进位规则是"逢十进一"，10 是十进位制的进位单位，可以用 10 的幂的形式表示($10^0=1$)：

5 表示成：5×10^0；

16 表示成：$1\times10^1+6\times10^0$；

287 表示成：$2\times10^2+8\times10^1+7\times10^0$；

3094 表示成：$3\times10^3+0\times10^2+9\times10^1+4\times10^0$.

因此，这些数的一般式为：

$a_1a_2\cdots a_n$ 表示成：$a_1\times10^{n-1}+a_2\times10^{n-2}+\cdots+a_n\times10^0$.（$a_n$ 取 0，1，…，9；n 取正整数）

二进位制的数怎样表示呢？它有什么特征呢？它与十进位制的数之间有什么关系？

(1)二进位制的数只用 0，1 两个数字表示，如 1，10，110，1011，…，这样的正整数有无穷多个；

(2)二进位制的数的进位规则是"逢二进一"，2 是二进位制的进位单位，即 $0+0=0$，$0+1=1+0=1$，$1+1=10$；$0\times0=0$，$0\times1=1\times0=0$，$1\times1=1$；

(3)二进位制的数可以比较大小，也可以进行加、减、乘、除的四则运算；

加法：　$10+1=11$，　$10+10=100$，　$110+1011=10001$；

$$\begin{array}{r} 10 \\ +)\quad 1 \\ \hline 11 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 10 \\ +)\quad 10 \\ \hline 100 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 110 \\ +)\quad 1011 \\ \hline 10001 \end{array}$$

减法：　$10-1=1$，　$101-10=11$，　$1011-110=101$；

$$\begin{array}{r} 10 \\ -)\quad 1 \\ \hline 1 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 101 \\ -)\quad 10 \\ \hline 11 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 1011 \\ -)\quad 110 \\ \hline 101 \end{array}$$

乘法：　$10\times1=10$，　$10\times10=100$，　$1011\times110=1000010$；

```
   10          10          1011
×)  1       ×) 10       ×)  110
-----       -----       -------
   10          00          0000
              10          1011
             ----        1011
             100        -------
                        1000010
```

除法：　$10\div1=10$，　$1111\div11=101$，　$1000010\div110=1011$.

```
    10          101             1011
 1) 10      11) 1111      110) 1000010
    1           11              110
    --          ---             ----
     0            11             1001
                  11              110
                  --              ----
                   0               110
                                   110
                                   ---
                                     0
```

通过上述具体数字的计算，能归纳出二进位制数的加、减、乘、除的四则运算的方法吗？请读者自己归纳小结，掌握其四则运算的方法.

(4)由于二进位制数的进位规则是“逢二进一”，所以可以用 2 的幂的形式表示($2^0=1$)：

1 表示成：1×2^0；

10 表示成：$1\times2^1+0\times2^0$；

110 表示成：$1\times2^2+1\times2^1+0\times2^0$；

1011 表示成：$1\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+1\times2^0$.

因此，二进位制数的一般式为：

$a_1a_2\cdots a_n$ 表示成：$a_1\times2^{n-1}+a_2\times2^{n-2}+\cdots+a_n\times2^0$.($a_n$ 取 0,1；n 为正整数)　　　　(＊)

上述这种表示法，反映了十进位制的数与二进位制的数之间的关系.

二进位制的数	十进位制的数	关系
1	1	相等
$10=1\times2^1+0\times2^0$	2	相等
$110=1\times2^2+1\times2^1+0\times2^0$	6	相等
$1011=1\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+1\times2^0$	11	相等

上述相等关系可以表示成：$1_2=1_{10}$，$10_2=2_{10}$，$110_2=6_{10}$，$1011_2=11_{10}$. 由于十进位制的数大家比较熟悉，今后凡是十进位制的数，在该数的右下标不再标注进位制的单位 10，可写成：$1_2=1$，$10_2=2$，$110_2=6$，$1011_2=11$. 而其余多进位制的数，必须在该数的右下方标注进位制的单位. 如 2_3，12_3，201_3 表示三进位制的数；5_7，11_7，106_7 表示七进位制的数，等等.

显然，利用二进位制数的表达式(＊)，可以把任意一个二进位制的数转换成与其相等的十进位制的数. 而反过来，一个十进位制的数如何转换成与其相等的二进位制的数呢？只要用 2 去除，把所得的余数从低位到高位排序即可.

$5=101_2$,

2 | 5　…1(第 1 位余数)
2 | 2　…0(第 2 位余数)
　　1　…1(第 3 位余数)

$14=1110_2$,

2 | 14　…0(第 1 位余数)
2 | 7　…1(第 2 位余数)
2 | 3　…1(第 3 位余数)
　　1　…1(第 4 位余数)

$25=11001_2$.

2 | 25　…1(第 1 位余数)
2 | 12　…0(第 2 位余数)
2 | 6　…0(第 3 位余数)
2 | 3　…1(第 4 位余数)
　　1　…1(第 5 位余数)

这样,你已经掌握了任意一个十进位制的数转换成与其相等的二进位制的数的方法了.已知一个二进位制的数,就可以利用一般式(*),转化成与其相等的十进位制的数,做到心中有数;如果一个十进位制的数转化成与其相等的二进位制的数,可以采用以 2 去除的余数排序法.

例题精析

例 1　下列多进位制的数中,表示正确的是(　　).

(A)110201_2　　(B)121012_3

(C)143402_4　　(D)428103_5

分析　一个多进位制的数表示是否正确,首先看这个数的进位制的单位,然后看这个数中的各个数字都是小于该单位,则这个多进位制的数表示是正确的;如果这个数中,有一个数字不小于该单位,则这个多进位制的数表示是错误的.

解

(A)中第 3 位数字 2 等于该数的进位制的单位 2,所以不正确;

(B)中的各位数字都小于该数的进位制的单位 3,所以是正确的;

(C)中第 3,5 位数字 4 等于该数的进位制的单位 4,所以不正确;

(D)中第 4 位数字 8 大于该数的进位制的单位 5,所以不正确.

应选择(B).

例 2　把下列二进位制的数转化成与其相等的十进位制的数:

(1)11_2;　　(2)1100_2;

(3)110101_2;　　(4)11001101_2.

分析　利用二进位制数的一般式(*)进行转化.

解　(1)$11_2=1\times2^1+1\times2^0=2+1=3$;

(2)$1100_2=1\times2^3+1\times2^2=8+4=12$;

(3)$110101_2=1\times2^5+1\times2^4+1\times2^2+1\times2^0=32+16+4+1=53$;

(4)$11001101_2=1\times2^7+1\times2^6+1\times2^3+1\times2^2+1\times2^0=128+64+8+4+1=205$.

例 3　把下列十进位制的数转化成与其相等的二进位制的数:

(1)7;　　(2)29;　　(3)74;　　(4)365.

分析　可以采用以 2 去除的余数排序法.

(1)$7=111_2$;　(2)$29=11101_2$;　(3)$74=1001010_2$;　(4)$365=101101101_2$.

```
2|7  … 1        2|29 … 1        2|74 … 0        2|365 … 1
 2|3 … 1         2|14 … 0        2|37 … 1        2|182 … 0
    1 … 1         2|7 … 1         2|18 … 0        2|91 … 1
                  2|3 … 1         2|9  … 1        2|45 … 1
                     1 … 1         2|4  … 0        2|22 … 0
                                   2|2  … 0        2|11 … 1
                                      1 … 1        2|5  … 1
                                                   2|2  … 0
                                                      1 … 1
```

例 4　试写出三进位制的数的表示方法,并建立与十进位制数的关系.

(1)把三进位制的数 12_3,212_3,1201_3 转换成十进位制的数;

(2)把十进位制的数 25,395,1085 转换成三进位制的数.

分析　已掌握二进位制数的表示方法,并建立与十进位制数的关系,因此可以仿照二进位制数的方法,建立三进位制的数的表示法.

解　三进位制数的进位规则是"逢三进一",进位单位是 3,以 3 的幂的形式表示($3^0=1$),三进位制数的一般形式为:

$a_1a_2\cdots a_n$ 表示成:$a_1\times3^{n-1}+a_2\times3^{n-2}+\cdots+a_n\times3^0$.($a_n$ 取 0,1,2;n 取正整数)

任意一个十进位制的数要转换成与其相等的三进位制的数,只要把该数用 3 去除,其余数从低位到高位排序即可.

(1)$12_3=1\times3^1+2\times3^0=3+2=5$,

$212_3=2\times3^2+1\times3^1+2\times3^0=18+3+2=23$,

$1201_3=1\times3^3+2\times3^2+0\times3^1+1\times3^0=27+18+1=46$.

(2)$25=221_3$,　$395=112122_3$,　$1085=1111012_3$.

```
3|25 … 1        3|395 … 2        3|1085 … 2
 3|8 … 2         3|131 … 2         3|361 … 1
    2 … 2         3|43 … 1          3|120 … 0
                  3|14 … 2          3|40  … 1
                  3|4  … 1          3|13  … 1
                     1 … 1          3|4   … 1
                                       1  … 1
```

例 5　试比较下列 4 个数的大小,并把它们用"<"号连结起来:

11110_2,1002_3,111_5,45_7.

分析　由于这 4 个数不是同一进位制的数,所以必须化为同一种十进位制的数进行比较,这样才能比较这 4 个数的大小.

解　$11110_2=1\times2^4+1\times2^3+1\times2^2+1\times2=16+8+4+2=30$;

$1002_3=1\times3^3+2\times3^0=27+2=29$;

$111_5=1\times5^2+1\times5^1+1\times5^0=25+5+1=31$;

$45_7=4\times7^1+5\times7^0=28+5=33$.

因为 $29<30<31<33$，

所以 $1002_3<11110_2<111_5<45_7$.

例 6　请用线段把下列两列数中对应相等的数连结起来：

101111_2	110000_2
1211_3	1202_3
143_5	200_5
101_7	100_7

分析　本题有 8 个数，用 4 种不同的进位制的数表示，要把相等的数用线段连结起来，只有把它们都化为同为十进位制的数.

解　$101111_2=2^5+2^3+2^2+2^1+2^0=32+8+4+2+1=47$；

$110000_2=101111_2+1_2=47+1=48$；

$1211_3=1\times3^3+2\times3^2+1\times3^1+1\times3^0=27+18+3+1=49$；

$1202_3=1211_3-2_3=49-2=47$；

$143_5=1\times5^2+4\times5^1+3\times5^0=25+20+3=48$；

$200_5=143_5+2_5=48+2=50$；

$101_7=1\times7^2+1\times7^0=49+1=50$；

$100_7=101_7-1_7=50-1=49$.

则按下列相等的两个数连结：

$101111_2=1202_3$；$110000_2=143_5$；

$1211_3=100_7$；$200_5=101_7$.

例 7　(1)把 1101_4，1101_8 转化成二进制的数；

(2)把 10110_4，10110_8 转化成二进制的数.

从上述两例的转化中，对于同一个数用二进制表示，四进制表示，八进制表示，它们之间有什么关系；按照上述关系，请直接写出 11011_4，11101_8 的二进位制数.

分析　由于进位制的单位分别是 2，4，8，按 2 的幂的形式可表示成 $8=2^3$，$4=2^2$，因此，按其多进位制的一般表示法，可以找到一定的关系.

解　(1)$1101_4=4^3+4^2+4^0=2^6+2^4+2^0=1010001_2$；

$1101_8=8^3+8^2+8^0=2^9+2^6+2^0=1001000001_2$.

对照 1101_2，对于 1101_4，只要把 1101_2 四个数字中，每相邻两个数字之间插一个“0”；

对于 1101_8，只要把 1101_2 四个数字中，每相邻两个数字之间插两个“0”.

(2)$10110_4=4^4+4^2+4^1=2^8+2^4+2^2=100010100_2$；

$10110_8=8^4+8^2+8^1=2^{12}+2^6+2^3=1000001001000_2$.

对照 10110_2，对于 10110_4，只要把 10110_2 五个数字中，每相邻两个数字之间插一个“0”；对于 10110_8，只要把 10110_2 五个数字中，每相邻两个数字之间插两个“0”.

根据上述两例可知，对于任意一个四进位制的数要转化成二进位制的数，只要把该数中的每相邻两个数字之间插一个“0”；对于任意一个八进位制的数要转化成二进位制的数，只要把该数

中的每相邻两个数字之间插两个“0”.

根据上述关系,很容易,得 $11011_4=101000101_2$,$11101_8=1001001000001_2$.

注意 上述这些关系,只能在用 0,1 这两个数字表示的四进位制或八进位制的数适用;除了 0,1 这两个数字之外,还有其他数字出现,首先通过加减法,化为只含有 0,1 这两个数字的四进位制数或八进位制数,再插“0”.

如 $3021_4=1011_4+2010_4=1011_4+1010_4+1000_4$

$=1000101_2+1000100_2+1000000_2$

$=11001001_2$

或者 $3021_4=3\times4^3+2\times4^1+1\times4^0$

$=192+8+1$

$=201$

$=11001001_2$

2	201	… 1
2	100	… 0
2	50	… 0
2	25	… 1
2	12	… 0
2	6	… 0
2	3	… 1
	1	… 1

又如 $514_8=111_8+403_8=111_8+101_8+302_8$

$=111_8+101_8+101_8+201_8$

$=111_8+101_8+101_8+101_8+100_8$

$=1001001_2+1000001_2+1000001_2+1000001_2$

$+1000000_2$

$=101001100_2$

或者 $514_8=5\times8^2+1\times8^1+4\times8^0$

$=320+8+4$

$=332$

$=101001100_2$

2	332	… 0
2	166	… 0
2	83	… 1
2	41	… 1
2	20	… 0
2	10	… 0
2	5	… 1
2	2	… 0
	1	… 1

例 8 用多种方法比较 723_9 与 210211_3 的大小,并小结多进位制的数的表示方法及它们与十进位制的数的关系.

分析 不同进位制的两个数要比较大小有多种方法:都化为十进位制的数的方法加以比较;都化为同一进位制的数的方法加以比较;化为十进位制的数后用余数排序法加以比较.

解 方法一(都化为十进位制的数)

$723_9=7\times9^2+2\times9+3=567+18+3=588$;

$210211_3=2\times3^5+3^4+2\times3^2+3+1=486+81+18+4=589$.

因为 $588<589$,所以 $723_9<210211_3$.

方法二(都化为三进位制的数)

$723_9=222_9+501_9=222_9+201_9+300_9$

$=222_9+201_9+200_9+100_9$ (加减运算)

$=20202_3+20001_3+20000_3+10000_3$(插“0”法)

$=210210_3$.

因为 $210210_3<210211_3$,所以 $723_9<210211_3$.

方法三(余数排序法)

$723_9 = 7\times 9^2 + 2\times 9 + 3 = 567 + 18 + 3 = 588$

$= 210210_3$(余数排序法)

所以 $723_9 = 210210_3 < 210211_3$.

$$\begin{array}{r|l} 3 & 588 \quad \cdots \quad 0 \\ 3 & 196 \quad \cdots \quad 1 \\ 3 & 65 \quad \cdots \quad 2 \\ 3 & 21 \quad \cdots \quad 0 \\ 3 & 7 \quad \cdots \quad 1 \\ & 2 \quad \cdots \quad 2 \end{array}$$

小结

1. k(k 取 $2\leqslant k\leqslant 9$ 的整数)进位制数 $a_1a_2\cdots a_n$ 表示法:

$a_1k^{n-1}+a_2k^{n-2}+\cdots+a_nk^0$($a_n$ 取 $0\leqslant a_n<k$ 的所有整数,n 取正整数)

这种表示法可以把任意一个 k 进位制的数转化为与其相等的十进位制数.

2. 一个十进位制的数要转化为与其相等的 k 进位制的数,则要用 k 去除,把每一位数字的余数从低位到高位排序即可.

3. 比较两个不同进位制数的大小的主要方法:

(1)都化为十进位制的两个数;

(2)都化为同一进位制的两个数;

(3)把其中的一个化为十进位制的数后,用余数排序法转化为与另一个数相同的进位制的数.

4. 四进位制的数、八进位制的数都可以转化为与其相等的二进位制的数:

(1)当这些数用 0,1 两个数字表示时,可以用插“0”法. 四进位制数中的每相邻两个数字之间,插一个“0”;八进位制数中的每相邻两个数字之间,插两个“0”;

(2)当这些数除了 0,1 这两个数字外,还有其他数字,首先用同一进位制数的加减运算,转换成只用 0,1 两个数字表示,然后再用插“0”法.

5. 九进位制的数都可以转化为与其相等的三进位制的数:

(1)当这些数用 0,1,2 三个数字表示时,可以用插“0”法,只要把这些数中的每相邻两个数字之间,插一个“0”;

(2)当这些数除了 0,1,2 这三个数字外,还有其他数字,首先用同一进位制数的加减运算,转换成只用 0,1,2 三个数字,然后再用插“0”法.

6. 多进位制的数,主要是指二进位制的数、三进位制的数、五进位制的数、六进位制的数、七进位制的数,共 5 种情况. 在实际应用中有广泛的用途,二进位制的数主要用于研究 2 个元素的问题,如电子线路的信号:开、关,展览馆内许多门的进、出等;三进位制的数主要用于研究 3 个元素的问题,如交通通行讯号:直行、左转、右转,讯号灯:红、绿、黄等;四进位制的数主要用于研究 4 个元素的问题,如防汛用的彩色旗:红、黄、蓝、白等. 在现实问题中,某事件发生的独立元素不多的话,都可以通过相应的多进位制数予以数字化处理,而不必都要转化为十进位制的数来处理.

练习题 1

1. 下列多进位制的数中,表示不正确的是(　　).

(A)10111_2　　(B)21012_3

(C)45231_5　　(D)63504_7

2. 把下列二进位制的数，化成与其相等的十进位制的数：

(1)110_2；　(2)1101_2；　(3)10110_2；

(4)110101_2；　(5)1010110_2；　(6)110110011_2.

3. 把下列十进位制的数化为与其相等的二进位制的数：

(1)13；　(2)82；　(3)407；　(4)596.

4. (1)把三进位制的数 21_3，210_3，2102_3 化为与其相等的十进位制的数；

(2)把十进位制的数 74，319，2658 化为与其相等的三进位制的数.

5. 试比较下列各数的大小，并把它们用"<"号连接起来：

1011101_2，10101_3，330_5，225_6，161_7.

6. 请把 105_6 化为与其相等的二进位制数与三进位制数.

7. 计算：

(1)$1101010_2+101011_2$；　(2)$1101010_2-101011_2$；

(3)$1101_2\times1101_2$；　(4)$10001111_2\div1101_2$.

8. 计算：

(1)$210122_3+20211_3$；　(2)$430123_5-42342_5$；

(3)$1221_3\times201_3$；　(4)$20021_5\div23_5$.

9. 计算：

(1)25304_6+2123_6；　(2)10625_7-5366_7；

(3)$5201_6\times213_6$；　(4)$36011_7\div605_7$.

10. 请用线段把下列两列数中对应相等的数连结起来：

1011001_2	156_7
10100_3	231_6
331_5	324_5
232_6	10110_3
162_7	1011100_2

11. 把下列各数化为与其相等的二进位制的数：

1011001_4，11010_8，32012_4，4065_8.

12. 用多种方法比较 201011_3 与 633_9 的大小.

第 2 讲　有趣的数字迷宫

知识点拨

这一讲主要研究数字问题，包括列式填数、列表排序、幻方变换、数阵图等．一般都带有规律性，要注意已给出数字的特征，这种形式在华罗庚数学金杯赛中占有一定的地位，要熟悉这种题型的思考方法，摸索解题思路，找出解题规律．

在处理十进位制的数字问题时，要注意下列几点：

1．由 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 这十个数字可建构成无穷多个自然数．

2．一个十进位制的数字有多大，和这个数字的数位及相应的单位有关，如 $23=2\times10+3\times10^0=2\times10+3\times1$；$457=4\times10^2+5\times10+7\times10^0=4\times10^2+5\times10+7\times1$．因此，抽象地看，两位数 $a_1a_2=a_1\times10+a_2(a_1\neq0)$，三位数 $a_1a_2a_3=a_1\times100+a_2\times10+a_3(a_1\neq0)$，$n$ 位数 $a_1a_2\cdots a_n=a_1\times10^{n-1}+a_2\times10^{n-2}+\cdots+a_n(a_1\neq0)$．

3．注意在加、减、乘、除四则运算中，数字的位数发生变化，如一个 m 位数，一个 n 位数，($m\geqslant n\geqslant1$，m、n 是整数)，其和最多 $m+1$ 位，最少 n 位；其差最多 m 位，最少 1 位；其积最多 $m+n$ 位，最少 $m+n-1$ 位；其商(自然数时)最多 $m-n+1$ 位，最少 $m-n$ 位．

4．注意乘数与积的个位数字的变化．

5．注意偶数(0,2,4,6,…)与奇数(1,3,5,7,…)在运算中的一些基本性质．

6．注意素数与合数的概念及运算中的一些基本性质．

例题精析

例 1　下面的算式里，每个方框代表一个数字，求这 7 个方框中的数字和．

$$\begin{array}{r} \square\square\square\square \\ +\quad \square\square\square \\ \hline 2\quad0\quad0\quad5 \end{array}$$

分析　这是一个四位数与三位数相加，显然有多种情况，如何着手分析，可以从三位数的最小数 100 开始讨论，也可以从三位数的最大数 999 开始讨论．另外还要注意个位数字 5，有两种情况，一种是其个位数字的和不进位，另一种是其个位数字的和出现进位，那么其数字和是发生变化，还是没有变化，若发生变化其规律是什么？

从三位数中的最小数 100 分析起：

(1) $\begin{array}{r} 1905 \\ +\quad 100 \\ \hline 2005 \end{array}$　(2) $\begin{array}{r} 1895 \\ +\quad 110 \\ \hline 2005 \end{array}$　(3) $\begin{array}{r} 1899 \\ +\quad 106 \\ \hline 2005 \end{array}$

可以得到下列 4 点结论：

1. 四位数的第 4 个数字(千位)必定是 1，而且两个数的第 4 位数字和为 2，则这两个数字的第 4 位数字(千位)和必是"1 + 1".

2. 两个数的第 3 位数字(百位)和必须要进位，而且两个数的第 3 位数字和为 0，则这两个数的第 3 位(百位)数字和必定是"0 + 9".

3. 两个数的第 2 位数字(十位)和可能进位(第(2)、(3)种列式)，可能不进位(第(1)种列式)，而且两个数的第 2 位数字(十位)和为 0，则这两个数的第 2 位(十位)数字和必定是"0 + 9"(进位)，或者"0 + 0"(不进位).

4. 两个数的第 1 位数字(个位)和可能进位(第(3)种列式)，可能不进位(第(1)、(2)种列式)，而且两个数的第 1 位数字(个位)和为 5，则这两个数的第 1 位(个位)数字和必定是"5 + 9"(进位)，或者"5 + 0"(不进位).

解　其和为 2005 的一个三位数与一个四位数相加，其数字和有下列三种情况：

类别	第 4 位数字	第 3 位数字	第 2 位数字	第 1 位数字	数字和
(1)	1 + 1	进位(0 + 9)	不进位(0 + 0)	不进位(5 + 0)	2 + 9 + 0 + 5 = 16
(2)	1 + 1	进位(0 + 9)	进位(0 + 9)	不进位(5 + 0)	2 + 9 + 9 + 5 = 25
(3)	1 + 1	进位(0 + 9)	进位(0 + 9)	进位(5 + 9)	2 + 9 + 9 + 14 = 34

则所求的 7 个方框中的数字和为 16 或 25 或 34.

例 2　将 1,2,3,4,5,6,7,9 这八个数字填在下列圆圈内使等式成立，每个数字恰好出现一次，问有几种不同的情况.

$$⑧ \div ○ + ○ = ○ \times ○ - ○$$

分析与解　为便于讨论，将需要填的 5 个数字注上 A,B,C,D,E 五个字母.

设　$$⑧ \div A + B = C \times D - E$$

这 5 个数字中，哪一个是最关键的，显然是 A，因为 A 是除数，在数字问题中，必须被 8 整除，而 8 的约数，除 8 外，还有 1,2,4，因此要分类讨论. 还有一个情况是 C 与 D，因为这两个数是相乘，其积相同，但由于顺序位置不同，要属于不同情况.

当 $A = 1$ 时，$B = 2$，无数字可填；$B = 3$ 时，$C = 2, D = 9, E = 7$，或者 $C = 4, D = 5, E = 9$；$B = 4$ 时，$C = 2, D = 9, E = 6$，或者 $C = 3, D = 7, E = 9$；$B = 5$ 时，无数字可填；$B = 6$ 时，$C = 2, D = 9, E = 4$；$B = 7$ 时，$C = 2, D = 9, E = 3$，或者 $C = 4, D = 6, E = 9$；当 $B = 9$ 时，$C = 3, D = 7, E = 4$，或者 $C = 4, D = 5, E = 3$，或者 $C = 4, D = 6, E = 7$，到此为止，当 $A = 1$ 时的情况讨论完了，共有 20 种情况，为清楚起见，可列表 2.1 说明.

用同样的方法，讨论当 $A = 2$ 时，共有 $8 \times 2 = 16$ 种情况(不妨请读者自行完成)；当 $A = 4$ 时，共有 $13 \times 2 = 26$ 种情况(不妨请读者自行完成). 则总共有 $20 + 16 + 26 = 62$ 种情况.

小结

解这类数字问题，首先要抓住关键的数字，然后加以分类讨论. 在讨论过程中，数字从小到大逐步分析，要全面，不可遗漏，重复，要有细心和耐心，学会全面讨论问题的方法和提高分类讨论问题的能力.