家庭辅导丛书

初中几何家庭辅导

黄儒霖　陈敏成
谭　干　李统塘　编著

第二册

科学普及出版社广州分社

家庭辅导丛书

初中几何家庭辅导

（第二册）

黄霭霖　陈敏成
谭　干　李统塘　编著

科学普及出版社广州分社

初中几何教学辅导

（第二册）

黄蔼霖　陈敏成　编著

谭 [illegible]　李[illegible]

科学普及出版社广州分社出版发行

（广州市应元路大华街兴平里3号）

广东省新华书店经销

肇庆新华印刷厂印刷

开本　787×1092毫米　1/32　印张：5.75　字数：140千字

1989年2月第1版　　1989年2月第1次印刷

印数：1～8,000册

ISBN　7-110-00882-7/G·222

定价：2.30元

前　言

为了帮助学生家长关注和辅导子女学好数学，我们编写了一套初中数学《家庭辅导丛书》（共六册）。本书是丛书的几何第二册，它与初中数学课本几何第二册配合使用，内容包括相似形和圆。

本书紧扣教材的基本内容，并依其顺序分章进行编写，每章由以下四个部分组成：

一、辅导要求。这部分首先概述全章的主要内容，然后提出家庭辅导时的注意事项，作为辅导的主抓方向。

二、检查与辅导。这部分取材于课本的陈述和习题，通过检查学生作业的方式，设计了具有典型性和广泛性的若干问题和例子，以正反两面的分析手法，帮助家长指导子女分清是非，加速他们对数学知识的领会、巩固和应用过程。

三、习题的答案或提示。这部分除了给出每道习题的答案之外，对较难或易混淆的问题还作了提示，注意揭示知识的地位和作用。

四、辅导效果检查。这部分给家长提供一份检查性试题（附有答案）。检查时可视子女的实际情况作取舍。

本书给出分辨是非的问题多达60个，说理也不忌反复，对几何入门和逻辑推理的方法、手段、规律、技巧等方面都做了甚为详尽的分析和总结，目的在于指导家长如何辅导子女去掌握数学概念，形成合理的思考方法，提高解题能力。本书是学生家长进行家庭辅导的有力助手，也适合于学生和青年教师阅读。

限于水平，本书不足或错误之处一定不少，我们诚恳地欢迎读者批评指正。

编　者

目 录

第六章 相似形

一、辅导要求

本章的主要内容是比例的性质、比例线段的有关定理、相似三角形及相似多边形的概念、判定和性质以及位似图形的一些初步知识和应用。本章的重点内容是相似三角形，其中又以相似三角形的判定与性质为重点。本章的难点是相似三角形的基本定理——平行线分线段成比例定理及其逆定理的应用，以及有关相似三角形问题的证题思想方法。虽然相似形的知识是直线形知识的继续，且在解决实际问题和研究几何图形的性质中，相似形知识的应用是较广泛的，但从学生的学习认识上来说却是一个由全等到相似的飞跃，开始学习相似形需要有个认识上的适应过程。因此，本章的辅导中应注意下面几点：

1.学习一开始，就要掌握好比例的基本定理与比例的性质，并能熟练地进行简单的比例变形。对重点知识以及有关线段成比例的定理要理解并能熟练地应用。

2.在检查与辅导中，应注意采取逐步加深、提高的办法使孩子掌握本章常用的证明方法与技巧。其证明方法与技巧主要有以下几种：

（1）利用添加辅助平行线段转移两线段的比的方法（例如课本第20页的三角形角平分线性质定理的证明方法）；

（2）利用移动三角形的方法（例如课本第30页的三角

形相似的判定定理1的证明方法：先作全等三角形，再证平行；第31页的直角三角形相似的判定定理的证明方法：先作平行线，再证三角形全等）；

（3）证明比例或等积式等有关线段成比例时找相似三角形，尤其是利用“中间比”的方法找过渡的相似三角形，是有关相似形问题中比较难掌握的方法和技巧，也是证题的关键。本章在检查与辅导一节中，重点介绍了解决这个问题的思路和思考方法。但辅导时，应注重分析的方法和思路，注意启发和指导子女随时总结证题方法与技巧，把被动的模仿转化为自觉地运用。

（4）注意采用类比引出、探索所要辅导的内容，使学生了解如何利用类比去探索、发现新问题，逐步养成研究问题的习惯，提高分析问题的能力。

二、检查与辅导

为了使孩子能理解和掌握本章的主要内容，我们把本章的重点知识、疑难的问题和典型的习题等，按知识发展次序编成系列，以说明知识规律及其内在联系、解题规律和解题方法。

【问题1】从$ad=bc$（a、b、c、d为实数）一定能够得出$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$吗？为什么？

孩子可能会回答：

一定能够从$ad=bc$推出$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$。因为在$ad=bc$的两边

同时除以bd，就得$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$。

分析：答案是错误的。因为在比例的性质定理$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ $\Longleftrightarrow$ $ad=bc$中，只有全部字母都不等于零，定理才能成立。但是，本问题的题设中有a、b、c、d是实数，因此，a、b、c、d各数均有为零的可能。如果b或d为零时，我们就不能用bd（为零）为除数去除$ad=bc$的两边了。为什么孩子没有考虑到这一情况呢？根源在于他在解题中没有充分利用已知条件，即a、b、c、d为实数这一条件没有用上。一般地说来，题目所给与的条件，既不多余也不会缺少。否则，题目本身便有错误或缺陷了。因此，在解题时，凡是题目所给的条件必须充分用上，否则解答必会有缺陷或差错。

正确答案是：

不一定能够由$ad=bc$推出$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$。因为，a、b、c、d都是实数，而当b或d为零时，我们就不能用bd（为零）为除数去除$ad=bc$的两边，亦即此时$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$是不成立的。

【问题2】练习检查　课本第6页第2题。

已知：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$。写出其它七个比例式，并提出其中哪些是以a和d为外项，以b和c为内项的比例式，哪些是以b和c为外项，以a和d为内项的比例式。

如果孩子觉得作业有困难，可先辅导他复习课本第3页

的讲述："根据比例的性质定理，一个比例可以得出多种不同的比例变形。"然后指出：把比例由一种形式变形成另一种形式，可以先把比例化为等积式，再把等积式化成所需要的比例。最后把写出的七个比例式进行对比，总结变形规律，并根据规律回答本问题。

已知$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$…①

单独交换外项，得$\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$…②

单独交换内项，得$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$…③

同时交换外项和内项，得$\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$…④

分别交换①、②、③、④各式的左右两边，可得下面各式：$\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$…⑤； $\frac{c}{a}=\frac{d}{b}$…⑥； $\frac{b}{d}=\frac{a}{c}$…⑦； $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$…⑧。其中①、②、③、④是以a和d为外项，以b和c为内项的比例式；⑤、⑥、⑦、⑧是以b和c为外项，a和d为内项的比例式。

变形后的比例式是否正确，可根据比例的性质定理来检查，看其内项的积是否等于外项的积，即由变形后的比例能否得到ad=bc。如果变形后所得的比例中有相同的，我们只能取其中一个。

本问题中所用的比例的各部名称，可用下图来理解和记忆：

$$\overbrace{a:b}^{\text{前比}}=\overbrace{c:d}^{\text{后比}}$$

$$\underbrace{a:\underbrace{b=c}_{\text{比例的内项}}:d}_{\text{比例的外项}}$$

a、b、c的第四比例项

（如果 $b=c$，那么 $a:b=b:d$ 或 $\frac{a}{b}=\frac{b}{d}$，b叫做a、d的比例中项）

【问题3】检查作业　课本第11页第1～4题。

其中第3题：把下列各式写成比例的形式：

（1）$mn=pq$；（2）$a^2=bc$；（3）$x=\frac{bc}{a}$。

可能有各种不同的答案。例如（2）的答案有：$\frac{a}{b}=\frac{c}{a}$；$\frac{a}{c}=\frac{b}{a}$；有的孩子还可能会写出八个比例式，等等。到底哪一种答案是对的呢？不管写成一个比例或写成几个比例，只要能还原得到 $a^2=bc$，就说明所写成的比例式是正确的。课文中题意并不要求我们都写出八种形式，而是写出其中一种就可以了。当然，多写几个（正确的）也没有错。

【问题4】练习检查　课本第11页第8、9题。

如果孩子觉得有困难，可先辅导其复习课本第4页“等比性质”及其证明，然后做作业第8题。

已知：$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$，求（1）$\frac{x+y+z}{x}$；

（2）$\frac{x+y+z}{x+y-z}$；（3）$\frac{y+z-x}{z+x-y}$

解一：利用证明等比性质的方法（比例k法）来求。

设$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}=k$，那么$x=2k$，$y=3k$，$z=4k$

于是：

（1）$\frac{x+y+z}{x}=\frac{2k+3k+4k}{2k}=\frac{9k}{2k}=\frac{9}{2}$

（2）$\frac{x+y+z}{x+y-z}=\frac{2k+3k+4k}{2k+3k-4k}=\frac{9k}{k}=9$

（3）$\frac{y+z-x}{z+x-y}=\frac{3k+4k-2k}{4k+2k-3k}=\frac{5k}{3k}=\frac{5}{3}$

解二：直接利用等比性质来求。

（1）$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}\Longrightarrow\frac{x+y+z}{2+3+4}=\frac{x}{2}\Longrightarrow$

$\Longrightarrow\frac{x+y+z}{x}=\frac{9}{2}$

（2）$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}\frac{x+y+z}{2+3+4}=\frac{x}{2}\\ \frac{x+y-z}{2+3-4}=\frac{x}{2}\end{array}\right\}\Longrightarrow$

$\Longrightarrow\frac{x+y+z}{9}=\frac{x+y-z}{1}\Longrightarrow\frac{x+y+z}{x+y-z}=9$

（3）$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}\frac{y+z-x}{3+4-2}=\frac{x}{2}\\ \frac{z+x-y}{4+2-3}=\frac{x}{2}\end{array}\right\}\Longrightarrow$

$\Longrightarrow\frac{y+z-x}{5}=\frac{z+x-y}{3}\Longrightarrow\frac{y+z-x}{z+x-y}=\frac{5}{3}$

符号“$\Longrightarrow$”读作推出，它的意义是表示从左边可以推出右边；符号“$\Longleftrightarrow$”读作“等价于”，它表示从左边可以推

出右边，并且从右边也可以推出左边。

本问题的解二，是用"双箭头"的证明格式来表达的。双箭头的证明格式，其过程简明严谨，它对于培养孩子的逻辑思维能力和培养孩子使用符号来表达与记忆定理是很有利的。但是，孩子刚开始使用这种证明格式时，可能不大习惯，或可能有困难，因此，在辅导中应以它与传统的证明格式（即"∵……，∴……的格式）相对照，使孩子明白每一推理过程的意思，从而能在传统的证明格式基础上顺利过渡到双箭头的证明格式。

"比例k法"（即解一），是解答有关比例问题的非常有效的一般方法，必须掌握好，辅导时可以再举两个例子。

（1）证明合比性质：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Longrightarrow\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$

证明：设$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$，则$a=bk$，$c=dk$。

于是，$\frac{a\pm b}{b}=\frac{bk\pm b}{b}=\frac{b(k\pm 1)}{b}=k\pm 1$

$$\frac{c\pm d}{d}=\frac{dk\pm d}{d}=\frac{d(k\pm 1)}{d}=k\pm 1$$

$\therefore\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$

（2）课本第5页例2（2）。

已知：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$（$b\pm d\neq 0$）

求证：$\frac{a+c}{a-c}=\frac{b+d}{b-d}$

证明：设$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$，则$a=bk$，$c=dk$，

于是，$\frac{a+c}{a-c}=\frac{bk+dk}{bk-dk}=\frac{k(b+d)}{k(b-d)}=\frac{b+d}{b-d}$

还可以让孩子用“比例k法”和直接利用合比、等比性质解课本第12页第10题。

【问题5】两条线段的比与比例线段是同一个概念吗？为什么？

孩子可能会回答：

是同一个概念。因为它们都是在同一单位下线段长度的比。

分析：答案是错误的。因为他既说不出什么是比例线段，也无法说出比例线段与两条线段的比不是同一个概念。

正确答案是：在同一单位下，两条线段长度的比叫做两条线段的比。而在四条线段a、b、c、d中，如果a和b的比等于c和d的比，那么，这四条线段叫做成比例线段。很明显，两条线段的比与比例线段是两个完全不同的概念。线段的比是对两条线段而言，而比例线段一般是对四条线段而言；两条线段的比中有前项与后项之分，而在比例中有内项、外项之分。

【问题6】三条平行线截两条直线可得几组线段的比例式？

孩子可能会回答：

设平行线l_1、l_2、l_3分别截直线a和b，交点分别为A、B、C和D、E、F（如图6—1）。根据平行线分线段成比例定理

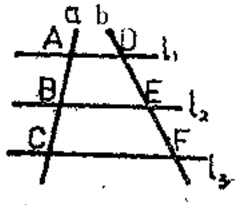

图6—1

"三条平行线截两条直线，所得的对应线段成比例"可得，$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$或$\frac{AB}{AC}=\frac{DE}{DF}$。

分析：所写出来的两个比例都正确，但答案却不完整。因为有许多对应线段所组成的比例还没有写出来。

正确答案是：可得三组四条线段对应成比例。而对其中每一组又可写出四个不同形式的比例，共计可得十二个比例，即：

$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$…（1）　$\frac{AB}{AC}=\frac{DE}{DF}$…（2）

$\frac{BC}{CA}=\frac{EF}{FD}$…（3）

由（1）式可变得$\frac{BC}{AB}=\frac{EF}{DE}$，$\frac{DE}{AB}=\frac{EF}{BC}$，$\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}$，

由（2）式可变得$\frac{AC}{AB}=\frac{DF}{DE}$，$\frac{DE}{AB}=\frac{DF}{AC}$，$\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}$，

由（3）式可变得$\frac{CA}{BC}=\frac{FD}{EF}$，$\frac{EF}{BC}=\frac{FD}{CA}$，$\frac{BC}{EF}=\frac{CA}{FD}$。

平行线分线段成比例定理是研究相似形最重要、最基本的理论，它在以后将被广泛应用在证线段成比例的问题上，如果我们熟悉这三组成比例线段和十二个比例，在应用时将感到很方便。我们可用一些"直观形象化"的语言来帮助记忆，如（1）式可说成"上比下等于上比下"，（2）式可说成"上比全等于上比全"（3）式可说成"下比全等于下比全"，或"右比左等于右比左"等等。这种"语言"不仅能按照对应的要求准确而迅速地写出比例，而且也容易检查所写出的比例是否正确。

书写时要防止出现下面错误的写法：① $\frac{AB}{BC}=\frac{EF}{DE}$；② $\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{BE}$ ①式和②式都没有满足“对应”的要求，因而是错误的。在应用相似形和成比例线段知识时，要特别注意“对应”问题。

为了使孩子熟悉掌握平行线分线段成比例定理，可让其思考下列问题，看看能否正确回答。

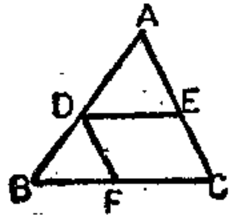

图 6—2

（1）已知：如图 6—2，DE∥BC，DF∥AC。判断下列比例是否正确，不对的加以改正：

ⓐ $\frac{AD}{BD}=\frac{DE}{BC}$，ⓑ $\frac{AE}{EC}=\frac{BF}{FC}$，

ⓒ $\frac{DF}{AC}=\frac{DE}{BC}$

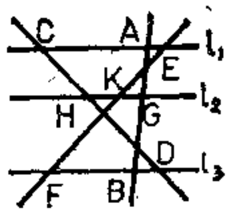

图 6—3

（2）如图 6—3，$l_1 /\!/ l_2 /\!/ l_3$，试回答：AG：GB＝？＝？；AG：AB＝？；CH：EK＝？

答案：（1）ⓐ不正确。应改为：

$\frac{AD}{BD}=\frac{AE}{EC}$（∵DE∥BC）或 $\frac{AD}{BD}=\frac{CF}{FB}$（∵DF∥AC）

或 $\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$（∵DE∥BC）

ⓑ不正确，应改为：$\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DB}=\frac{CF}{FB}$

或$\frac{BF}{FC}=\frac{BD}{DA}=\frac{CE}{EA}$

ⓒ不正确。应改为：$\frac{DF}{AC}=\frac{BD}{BA}=\frac{BF}{BC}$

或$\frac{DE}{BC}=\frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}$

（2）$AG:GB=EK:KF=CH:HD$

$AG:AB=EK:EF=CH:CD$

$CH:EK=HD:KF$

【问题7】检查作业　课本第23页第3～6题。

其中第5题，已知：如图，$FE\parallel BC$，$FD\parallel AB$，$AE=1.8$厘米，$BE=1.2$厘米，$CD=1.4$厘米，求BD。

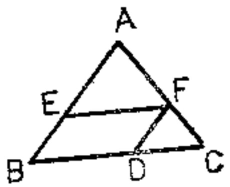

图6－4

孩子可能会回答：

$$\left.\begin{array}{l} EF\parallel BC \Longrightarrow \frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC} \\ FD\parallel AB \Longrightarrow \frac{AF}{FC}=\frac{CD}{DB} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{AE}{EB}=\frac{CD}{DB}$$

$\because AE=1.8$ 厘米，$BE=1.2$厘米，$CD=1.4$厘米

$\therefore \frac{1.8}{1.2}=\frac{1.4}{BD}$　$\therefore BD=\frac{1.4\times1.2}{1.8}\approx0.933$（厘米）

又如第6题（2）　已知：$\triangle ABC$中，$DE\parallel BC$，DE和AB相交于点D，和AC相交于点E。如果$AE:EC=3:5$，求$DE:BC$。

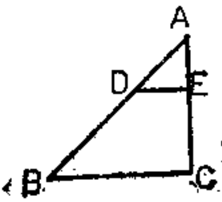

图6－5

孩子可能会回答：

$$\left.\begin{array}{r}DE\parallel BC\Longrightarrow DE:BC=AE:EC\\ AE:EC=3:5\end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow DE:BC=3:5。$$

分析：两道题的解答都是犯同一性质的错误。因为，在第5题解答中，“$FD\parallel AB\Longrightarrow\frac{AF}{FC}=\frac{CD}{DB}$”，但实际上，$\frac{AF}{FC}\neq\frac{CD}{DB}$。在第6题（2）的解答中，“$DE\parallel BC\Longrightarrow DE:BC=AE:EC$”，但实际上，$DE:BC\neq AE:EC$。这些都是由于弄错了线段的比例关系，即所列出的比例不满足“对应”要求，因而得出错误的计算结果。由此可见，运用已知条件列出比例时要特别注意线段“对应”成比例问题。

正确解答是：

第5题解：$$\left.\begin{array}{r}EF\parallel BC\Longrightarrow\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}\\ FD\parallel AB\Longrightarrow\frac{AF}{FC}=\frac{DB}{CD}\end{array}\right\}\frac{AE}{EB}=\frac{DB}{CD}$$

$\because AE=1.8cm$，$BE=1.2cm$，$CD=1.4cm$，

$\therefore\frac{1.8}{1.2}=\frac{DB}{1.4}$，$\therefore DB=\frac{1.8\times1.4}{1.2}=2.1$（cm）

第6题（2）解：$$\left.\begin{array}{r}DE\parallel BC\Longrightarrow DE:BC=AE:AC\\ AE:EC=3:5\Longrightarrow\frac{AE}{AE+EC}=\frac{3}{3+5}\end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow\frac{DE}{BC}=\frac{3}{8}$$