数学基础知识丛书

三角函数

毛毓球 周焕山 毛学春

江苏人民出版社

三 角 函 数

毛鋆球　周焕山　毛学春

江苏人民出版社

三角函数

毛毓球　周焕山　毛学泰

*

江苏人民出版社出版
江苏省新华书店发行
扬州印刷厂印刷
1980年6月第1版
1980年6月第1次印刷
印数：1—75,500册
书号：13100·052　定价：0.58元
责任编辑　何震邦

内 容 提 要

这套《丛书》共二十四册，系统介绍数学基础知识和基本技能，供中学数学教师、中学生以及知识青年、青年工人阅读。

《丛书》根据现行全日制十年制学校《中学数学教学大纲》（试行草案）精神编写，内容上作了拓宽、加深和提高。《丛书》阐述的数学概念、规律，力求符合唯物辩证法，渗透现代的数学观点和方法，以适应四个现代化的需要。为了便于读者阅读，文字叙述比较详细，内容由浅入深，由易到难，循序渐进，习题、总复习题附有答案或必要的提示。

本书共分五个部分，主要介绍了三角函数和反三角函数的定义、性质、图象及其相互关系，三角函数式的恒等变形，三角方程的种种解法。

目　录

一、任意角的三角函数

三角函数是初等函数之一，它不仅是进一步学习数学的重要基础知识，而且在科学技术和生产实践中有着极其广泛的应用。

为了讲述三角函数概念，这一部分首先简要地介绍向量、函数等必要的基本知识，以及角与弧的度量，然后引入三角函数的定义，讨论在 0 到2π之间的三角函数的数值变化，同角三角函数关系与诱导公式。

透彻地理解三角函数的概念，是学好三角函数其它部分内容的前提。

§1 向量及其在轴上的射影

在现实世界中，有一类量，例如力、速度等，只用它们的数值大小表示是不够的，要完全表示它们必须同时说明它们的方向。这类量叫做**向量**。

向量可以用具有一定长度和一定方向的线段来表示。在书写中，常用带有箭头的两个字母来表示。例如$\overrightarrow{AB}$表示起点为A，终点为B的向量。

在直角坐标系中，如果以坐标原点O为起点，向已知点P引向量OP，这个向量称为P对于点O的**向径**，经常用一个黑体字$\boldsymbol{r}$表示，即$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}$。

设已知$\overrightarrow{AB}$在直线l上，$\overrightarrow{AB}$的始点A将直线l分成两条射线，其中一条包含$\overrightarrow{AB}$的终点B，我们说：这条射线和$\overrightarrow{AB}$的方向相同；另一条不包含B，我们说：这第二条射线和$\overrightarrow{AB}$方向相反（图 1 ）。如果点A和B重合，就说$\overrightarrow{AB}$是零向量。

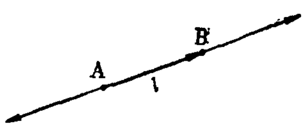

图 1

以某个线段u为长度单位，线段AB的长叫做向量AB的模，用$|AB|$来表示。

确定了正方向并选定了单位线段的直线叫做轴。

两向量只有在相互平行、或者位于同一直线上，方向相同，且长度相等时，才认为是相等的。

在平面上，自点A向轴l引垂线，垂足A_1叫做A在轴l上的射影（图 2 ）。在平面上向量$\overrightarrow{AB}$，若它的始点A在轴l上的射影是A_1，它的终点B在轴l上的射影是B_1，则线段A_1B_1叫做**向量$\overrightarrow{AB}$在轴l上的射影**（图 3 ）。记作：

$$A_1B_1 = \text{射影}_l\overrightarrow{AB}.$$

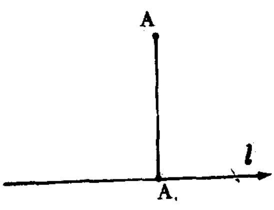

图 2

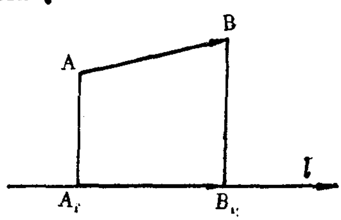

图 8

如果从A_1到B_1的方向与轴的正方向一致，射影以正数表示，如果从A_1到B_1的方向与轴的正方向相反，射影以负数表示。

某一向量用和它相等的向量代替它，叫做**向量的平移**。**向量平移时，它在已知轴上的射影不变**（图 4 ）。

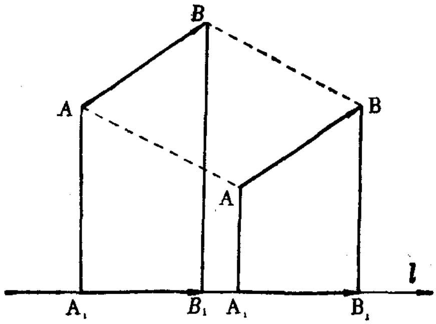

图 4

§2　角（弧）及其度量

在几何学中，把由一点引出的两条射线所组成的图形叫做角。但是，这样来定义角还不能全面地反映客观实际中的角的概念。从运动的观点来理解角，我们还可以把角看作**平面上的一条射线绕着它的端点旋转所成的图形**。射线的初始位置叫做角的**始边**，射线的终止位置叫做角的**终边**。在图 5 中 OA 是始边，OB是终边，O点叫做角的**顶点**。

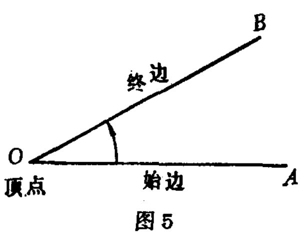

图 5

角的度量按照数量量度的一般原理进行，采取某一个角作为量度单位，使每一个已知角与单位角相比，得出一个比值，这个数便是已知角的量数。我们已经学过的以圆周角的$\frac{1}{360}$作为角的度量单位，这就是**角度制**。除了采用角度制以外，在生产和科学研究中，还广泛地采用**弧度制**（也叫弪制）。军事上还常用**密位***作为量角的单位。

弧度制里，**把同圆上等于半径的长的弧叫做含有1弧度的弧；而1弧度的弧所对的圆心角叫做1弧度的角。**

在几何学里可以证明：凡是长度等于半径的弧所形成的扇形都相似，所以这样的圆心角都相等，与圆的半径无关。

弧和角的度量单位如何选法，视用途而异。弧度制是一种方便的单位，许多三角函数的公式，在弧度制中，可以取得比较简单的形式。

在习惯上，表示弧度时，并不标出度量单位的名称，如$\alpha=\frac{\pi}{2}$弧度，可写成$\alpha=\frac{\pi}{2}$；$\alpha=3$弧度，可写成$\alpha=3$，等等。

因为圆周是360度的弧，圆周长等于2π个半径。所以

$$360^\circ = 2\pi\text{弧度}.$$

由此得出一些特殊角的角度与弧度之间的对应关系：

角　度	360°	270°	180°	90°	60°	45°	30°	0°
弧　度	2π	$\frac{3\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

* 把圆周分成6000等分，每一等分弧所对的圆心角就叫做一个密位。1密位圆心角所对的弧长$=\frac{2\pi R}{6000}\approx\frac{R}{1000}$。

这些角的角度和弧度的对应关系必须记熟。

因为　　$360° = 2\pi$弧度，

所以　　$1° = \frac{\pi}{180}$弧度≈ 0.01745弧度，

$$1\text{弧度} = \frac{180°}{\pi} \approx 57°17'44.8''.$$

一般地，圆心角α（弧度）与半径R、弧长l之间的关系式是

$$\alpha = \frac{l}{R}\text{或}l = R\alpha.$$

例 1　把$\frac{3\pi}{5}$弧度，$\frac{7\pi}{4}$弧度，$-\frac{5\pi}{6}$弧度化为度。

解　$\frac{3\pi}{5}$弧度$= \frac{180°}{\pi} \times \frac{3\pi}{5} = 108°$，

$\frac{7\pi}{4}$弧度$= \frac{180°}{\pi} \times \frac{7\pi}{4} = 315°$，

$-\frac{5\pi}{6}$弧度$= \frac{180°}{\pi} \times \left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -150°$.

例 2　把$120°$，$240°$，$18°20'$化为弧度。

解　$120° = \frac{\pi}{180}$弧度$\times 120 = \frac{2\pi}{3}$弧度，

$240° = \frac{\pi}{180}$弧度$\times 240 = \frac{4\pi}{3}$弧度，

$18°20' \approx 0.01745$弧度$\times 18.33 \approx 0.3199$弧度。

实际上，我们还会遇到不同方向的旋转，如两个啮合的齿轮转动方向恰恰相反。因此角和弧可以看作是有方向的量。在习惯上，把逆时针方向的旋转看作正方向旋转，顺时针方向的旋转看作负方向的旋转。我们规定逆时针方向转动

所形成的角叫做正角，顺时针方向转动所形成的角叫做负角。

为了研究方便，我们借助于直角坐标系，把角的顶点放在原点，角的始边和X轴正方向重合，终边落在第几象限，就叫第几象限的角。在图 6 中，α_1是第一象限的角，α_2是第二象限的角，α_3是第三象限的角。如果终边落在轴上，如 0、$\frac{\pi}{2}$、π、$\frac{3\pi}{2}$等角，不属于任何象限，它们可以叫做象限间的角，一般地叫做特殊角。

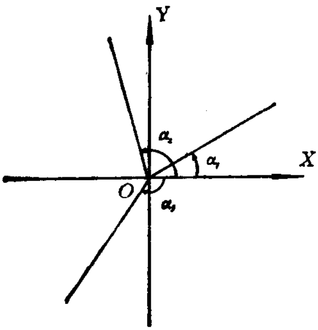

图 6

如果一个角的终边由始边位置（始边位置永远和X轴正方向重合）逆时针旋转，经过第一、第二、第三、第四等象限而回到始边位置，这就生成了 0 到2π的一切角。同样，终边可以继续逆时针旋转两周、三周等等而生成任何大小的正角。如果终边顺时针方向旋转，经过第四、第三、第二、第一象限等而到达始边位置，就生成 0 到 -2π的一切角。同样，终边还可以继续顺时针旋转而生成小于-2π的一切负角。这样，我们可以得到任意大小的角。

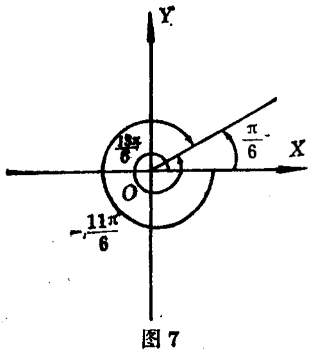

图 7

在图 7 中，可以看到$\frac{\pi}{6}$，

$\frac{13\pi}{6}$，$-\frac{11\pi}{6}$这些角它们具有相同的终边，但是它们旋转的方向和大小是不同的。

我们把具有相同终边的角叫做**终边相同的角**。终边相同的角它们是具有内部联系的。$\frac{13\pi}{6}$我们可以表示为$2\pi+\frac{\pi}{6}$，$-\frac{11\pi}{6}$可以表示为$-2\pi+\frac{\pi}{6}$。与$\frac{\pi}{6}$终边相同的角还有：

$$2\times2\pi+\frac{\pi}{6},\qquad -2\times2\pi+\frac{\pi}{6},$$

$$3\times2\pi+\frac{\pi}{6},\qquad -3\times2\pi+\frac{\pi}{6},$$

$$\cdots\cdots\qquad\qquad \cdots\cdots$$

因此，所有和$\frac{\pi}{6}$终边相同的角连同$\frac{\pi}{6}$角在内，可以用下面式子来表示：

$$2k\pi+\frac{\pi}{6}.\ (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$

一般地，所有和角α具有相同终边的角，连同α在内，可以用下面式子来表示：

$$2k\pi+\alpha.\ (k\text{是整数})$$

例 3 把与$-\frac{\pi}{2}$，$\frac{5\pi}{2}$，$-\frac{50\pi}{3}$的角的终边相同的一切角写成$2k\pi+\alpha$的形式，且使$0\leqslant\alpha<2\pi$。

解 它们分别可表示为：$2k\pi+\frac{3\pi}{2}$，$2k\pi+\frac{\pi}{2}$，

$2k\pi+\frac{4\pi}{3}$.

引进了任何大小的角以后，就可以使**一切实数的集合和平面上所有角的集合间建立一一对应的关系**。由此，平面上的每一个角与某个实数对应；同样每个实数也与某个角对应。

现在我们来研究，如何用实数来表示圆周上的点。

我们知道圆心角及其所对的弧的度量与圆的半径无关。为了研究的方便，把以原点为中心，以单位长为半径的圆叫**做单位圆**。我们把单位圆上的点$A(1,0)$取作量弧的起点。用XOY平面上既定的旋转正向为圆周上的正向。这样，每一个实数α，可以用单位圆上的一点几何地表示出来。其方法如下：

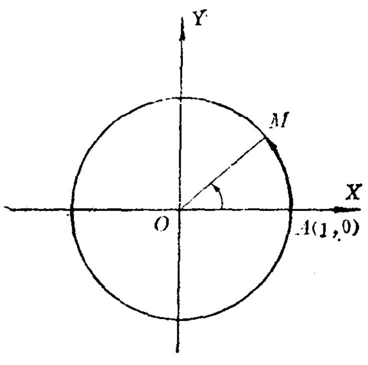

图 8

自起点A截取（按正向或负向）其量等于α的弧，这个弧的长度等于$|\alpha|$。这弧的终点M看作数α在单位圆上的对应点（图 8）。因此，**每一个实数可以和单位圆上唯一的一点对应**。反过来，单位圆上每一点，不是对应于一个实数，而是

对应于无限多个实数，其中任两数之差是2π的整数倍。若k为任意整数，而$x_2 = x_1 + 2k\pi$，则x_1和x_2两数与圆上同一点对应。例如点$A(1, 0)$对应于数0，$\pm 2\pi$，$\pm 4\pi$，$\cdots \pm 2k\pi$ $\cdots$，点$A(-1, 0)$对应于数$\pm\pi$，$\pm 3\pi$，$\cdots \pm (2k+1)\pi$，$\cdots$（k是任意整数）。

我们来比较一下，用圆周上的点和直线上的点表示实数的方法。

实数闭区间$0 \leqslant x \leqslant 2\pi$和数轴上以$0$和$2\pi$作端点的线段对应；这一闭区间与单位圆的全圆周对应，而闭区间的起点$x = 0$和终点$x = 2\pi$和圆周上的同一点（起点）对应。闭区间$0 \leqslant x \leqslant 4\pi$，则与实数轴上$0$和$4\pi$两点所限的线段对应，而这闭区间与单位圆的两全周对应。

图9里单位圆上Ⅰ至Ⅳ各象限，和直线上标有同样数字的线段对应。单位圆的点与数轴的点之间的对应，可以借下述直观方法加以解释。想象数轴是无限长而没有伸缩性的丝线，将原来是数轴上的O点与单位圆周上的始点$A(1, 0)$重合而使原来是数轴上的正数沿着逆时针方向绕在圆周上，则数轴上的点与单位圆上的对应点重合。

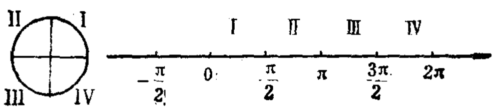

图 9

§3 函数的一般概念

为了便于学习任意角三角函数，我们从已学过的一般函数概念谈起。

定义 设在某变化过程中有两个变量x和y，变量y依赖于x，如果对于x的每一个确定的值，按某个对应法则，y都有一个确定的值和它对应，y就叫做x的**函数**，x叫做**自变量**。

例如，速度一定时，运动的路程是时间的函数。$S = vt$，这里变量S的值是依赖于t的值变化而变化的。

定义域 自变量的取值范围叫做函数的**定义域**。用数学式子表示时，它的定义域是使数学式子有意义的x的取值范围。

例如 $y = \dfrac{x^2 - 5}{x - 1}$ 只有在$x \neq 1$时才有意义，所以函数的定义域为$(-\infty, 1)$和$(1, \infty)$。

但在实际问题中，函数的定义域还可根据客观事物具体情况决定，例如正方形面积是它的边长的函数$A = x^2$，对这一具体问题，这里的x只能取正值。

值域 对应于函数定义域的全体函数值叫做这个函数的**值域**。

例如，圆面积$S = \pi r^2$的定义域是$r > 0$即$(0, +\infty)$；值域是$S > 0$即$(0, +\infty)$。

又如函数$y = ax^2$，它的定义域是全体实数即$(-\infty, +\infty)$，值域是当$a \geqslant 0$时$y \geqslant 0$即$[0, +\infty)$；当$a \leqslant 0$时，$y \leqslant 0$

即$(-\infty, 0]$。

函数$y=\frac{x}{a}(a\neq 0)$它的定义域和值域都是$(-\infty, +\infty)$。这说明了函数的定义域和值域可能相同，也可能不相同。函数值与自变量数值之间的对应也未必是一对一的，因为对于自变量的每一个数值，固然函数有唯一的值和它对应；但是对于函数的一个确定值，可能对应于好几个（甚至是无限多个）自变量数值。上述$A=x^2$中，在$x_1=2$，及$x_2=-2$时，所得的值都是4。所以函数值4所对应的自变量值就有2和-2两个。

有界函数 如果函数$f(x)$在所设区间（定义域）上，对于x的每一个值，不等式$|f(x)|<N$成立，那么就说函数$f(x)$在所设区间上**有界**（图10）。

如果适合这个条件的数N不存在，便说这函数$f(x)$**无界**。

如果在所设区间上，不等式$f(x)<M$常成立，其中M是某个数（不一定是正的），便说函数$f(x)$在所设区间上**有上界**。

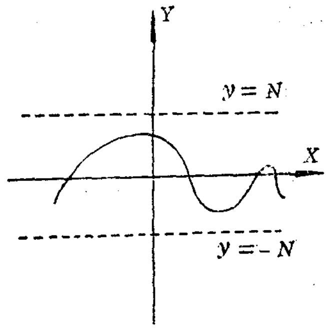

图10

如果在所设区间上，不等式$f(x)>N$常成立，其中N是某个数，便说函数$f(x)$在所设区间上有**下界**。

增函数和减函数 如果函数$y=f(x)$在区间$[a, b]$上，任意取两个自变量x_1和x_2。当$x_1<x_2$时而有$f(x_1)$