数理化自学丛书

# 平面几何

第二册

## 内容提要

本书介绍了平面几何中的相似形，有关三角形和圆的线段间的度量，多边形的面积，正多边形和圆的周长、面积等。讲解详尽，说理透彻，并配有大量插图和例题，适宜于自学。

本书每节每章之后都配有一定数量的习题，供读者选用。题号前有“*”的要难一些，可暂时不做。正文中用小字排印的部分，初次阅读时可以略去。

本书可供青年工人，知识青年，在职干部或学习过本书第一册的读者自学之用，也可供中等学校青年教师参考。

数理化自学丛书

**平面几何（第二册）**

数理化自学丛书编委会
数学编写小组编
（原上海科技版）

上海人民出版社出版
（上海绍兴路5号）

山东人民出版社重印

山东省新华书店发行　山东新华印刷厂德州厂印刷

开本787×1092　1/32　印张10　字数223,000

1964年4月第1版　1977年11月新1版　1978年3月山东第1次印刷

统一书号：13171·219　定价：0.68元

# 重印说明

《数理化自学丛书》是一九六六年前出版的．计有《代数》四册，《平面几何》二册，《三角》一册，《立体几何》一册，《平面解析几何》一册；《物理》四册；《化学》四册．这套书的特点是：比较明白易懂，从讲清基本概念出发，循序前进，使读者易于接受和理解，并附有不少习题供练习用．这套书可以作为青年工人、知识青年和在职干部自学之用，也可供中等学校青年教师教学参考，出版以后，很受读者欢迎．但是在“四人帮”及其余党控制上海出版工作期间，这套书横被扣上所谓引导青年走白专道路的罪名，不准出版．

英明领袖华主席和党中央一举粉碎了祸国殃民的“四人帮”．我国社会主义革命和社会主义建设进入新的发展时期．党的第十一次全国代表大会号召全党、全军、全国各族人民高举毛主席的伟大旗帜，在英明领袖华主席和党中央领导下，为完成党的十一大提出的各项战斗任务，为在本世纪内把我国建设成为伟大的社会主义的现代化强国，争取对人类作出较大的贡献，努力奋斗．许多工农群众和干部，在党的十一大精神鼓舞下，决心紧跟英明领袖华主席和党中央，抓纲治国，大干快上，向科学技术现代化进军，为实现四个现代化作出贡献，他们来信要求重印《数理化自学丛书》．根据读者的要求，我们现在在原书基础上作一些必要的修改后，重新出版这套书，以应需要．

十多年来，科学技术的发展是很快的．本丛书介绍的虽仅是数理化方面的基础知识，但对于应予反映的科技新成就方面内容，是显得不够的．同时，由于本书是按读者自学的要求编写的，篇幅上就不免有些庞大，有些部分也显得有些烦琐．这些，要请读者在阅读时加以注意．

对本书的缺点，希望广大读者批评指出，以便修订时参考．

一九七七年十一月

# 目 录

# 第一章 相 似 形

## 成比例的线段

### §1·1 线 段 的 比

1. **线段的度量** 为了要知道竹竿的长度，我们就用尺去量．这里所谓“量”，就是把一把尺的一端和竹竿的一端对齐，然后把这把尺紧密地沿着竹竿一尺接一尺地比较，最后得到了竹竿的长度．例如5尺，这表示从长度来讲，竹竿是尺的五倍(图1·1)．

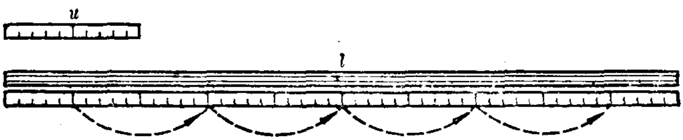
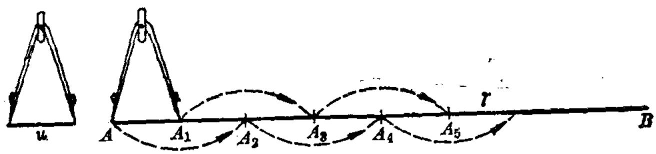


图 1·1

用几何的观点来研究，尺和竹竿可以分别看做是线段 $u$ 和 $l$；用尺量竹竿的过程，可以看做是用线段 $u$ 去量线段 $l$，得出线段 $l$ 含有线段 $u$ 多少倍的过程．这里线段 $u$ 叫做**长度单位**，线段 $l$ 是**被度量的线段**，最后所得的倍数叫做**量数**．说得更确切一些，它是以线段 $u$ 作长度单位去量线段 $l$ 所得的量数．线段的量数和线段的长度是有区别的：量数只是一个正数，量数后面注明了长度单位才是长度．在前面的实例中，

“5”是以尺作长度单位去量竹竿所得的量数，“5 尺”才是竹竿的长度．度量线段的目的就是要得到一个量数．要得到线段的量数首先要选定作为长度单位的线段．用两种不同的长度单位先后去度量同一条线段，所得的两个量数显然是不等的．例如用市尺作单位去量线段 $l$，如果所得的量数是 6，用m(米尺)作单位去量同一线段，所得的量数就是 2 了．

但是，用线段 $u$ 量线段 $l$ 和用尺量竹竿毕竟有些不同．给定了两条线段 $u$ 和 $l$ 的图形之后，我们很难想象，在图形上“拿起”线段 $u$，紧贴着线段 $l$，对齐了两端，一次接一次地进行比较．这里就得利用分割规了．首先把分割规两脚的两个尖端分别放在线段 $u$ 的两个端点上(图 1·2(1))，然后保持分割规两脚张口的大小，把一个脚的尖端放在线段 $l$ 的一个端点 $A$ 上，依着图 1·2(2) 虚线所指的方向，在线段 $l$ 上，连续截取等于 $u$ 的线段 $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \cdots$，这样就在图形上进行了用线段 $u$ 度量线段 $l$ 的过程．



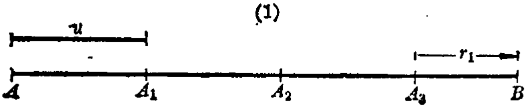

(1)　　　(2)

图 1·2

用尺量竹竿是一件十分简单的事，但不能因此把线段的度量问题也理解为简单的问题．用长度单位 $u$ 去截线段 $l$ 是否一定截得尽？截不尽怎么办？度量线段所得的量数究竟是怎样的数？这些问题都是比较复杂的．下面我们将详细地、精确地来研究它们．

图 1·3 中，线段 $u$ 是长度单位，线段 $AB$ 是要度量的线段. 现在利用分割规在线段 $AB$ 上，从端点 $A$ 起，连续截取等于 $u$ 的线段 $AA_1$，$A_1A_2$，$A_2A_3$，…. 这样截取的结果总不出下面两种情况中的一种：


(1)




(2)

图 1·3

(1) 截了 $m$ 次以后(这里 $m$ 是一个自然数)，恰巧截尽(图 1·3(1))；

(2) 截了 $m$ 次以后，得到了小于 $u$ 的剩余线段 $r_1$(图 1·3(2)).

对于第一种情况，线段 $AB$ 恰巧是线段 $u$ 的整数倍. 所得的量数是一个正整数 $m$. 在图 1·3(1) 里，$m=3$. 度量线段 $AB$ 的过程到此结束.

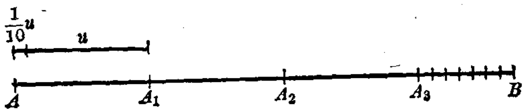
对于第二种情况，线段 $AB$ 的量数还没有确定，只知道它的量数应当大于正整数 $m$，但是小于正整数 $m+1$. 在图 1·3(2) 里，线段 $AB$ 的量数大于 3 而小于 4，度量的过程还没有结束. 我们把它叫做第一回截取. 在第一回截取里所得的剩余线段是 $r_1$. 为了进一步确定线段 $AB$ 的量数，我们可以采用比 $u$ 小的线段作长度单位，继续度量线段 $r_1$.

现在用线段 $u$ 的 $\frac{1}{10}$ 作单位来度量剩余线段 $r_1$，从线段 $r_1$

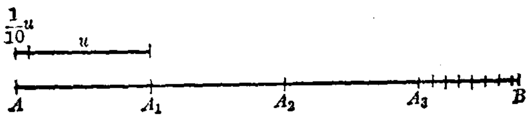
的左端起，用分割规连续截取等于$\frac{1}{10}u$的线段，截取的结果总不出下面的两种情况之一：

(1) 截了$m_1$次以后，线段$r_1$恰巧被截尽(图1·4(1))。

(2) 截了$m_1$次以后，得到了小于$\frac{1}{10}u$的剩余线段$r_2$(图1·4(2))。




(1)




(2)

图 1·4

对于第一种情况，线段$r_1$恰巧是线段$\frac{1}{10}u$的整数$m_1$倍，这里$m_1$可以等于从1到9的任何一个正整数．这时线段$AB$的量数已经确定为有限小数$m+\frac{m_1}{10}$．在图1·4(1)里$m+\frac{m_1}{10}=3.7$．度量线段$AB$的过程到此结束．

对于第二种情况：线段$AB$的量数仍旧没有确定，只知道它的量数大于$m+\frac{m_1}{10}$而小于$m+\frac{m_1+1}{10}$，这里$m_1$可以等于$0\left(如果r_1<\frac{1}{10}u\right)$，也可以等于从1到9的任何一个正整数

$\left(\text{如果 } r_1>\frac{1}{10}u\right)$. 在图1·4(2)里，线段 $AB$ 的量数大于3.7而小于3.8. 度量线段 $AB$ 的过程还没有结束，我们把这一回的截取叫做第二回截取. 在第二回截取里所得的剩余线段是 $r_2$. 为了更进一步确定线段 $AB$ 的量数，我们可以采用比 $\frac{1}{10}u$ 小的线段作长度单位，继续度量线段 $r_2$.

线段的度量就是这样进行的. 从上面的讨论，可以得到度量线段的初步结论：用长度单位 $u$ 去度量线段 $l$. 如果线段 $l$ 恰巧被 $u$ 所截尽，那末线段 $l$ 的量数是一个正整数；如果截不尽，那末再用 $\frac{1}{10}u$, $\frac{1}{100}u$, $\frac{1}{1000}u$, …做长度单位分别去截第一回剩余线段 $r_1$, 第二回剩余线段 $r_2$, 第三回剩余线段 $r_3$, …. 如果某一回的剩余线段恰巧被截尽，那末线段 $l$ 的量数是一个正有限小数.

用线段 $u$, $\frac{1}{10}u$, $\frac{1}{100}u$, …分别去截线段 $l$, 第一回剩余线段 $r_1$, 第二回剩余线段 $r_2$, …, 会不会每截一次总有剩余，线段的度量过程将无限止地进行下去呢？下面的两个例题将说明这个问题.

**例1.** 用线段 $AB$ 作长度单位去量线段 $CD$, 所得的量数是 $+3$, 研究用线段 $CD$ 作长度单位去度量线段 $AB$ 的度量过程（图1·5）.

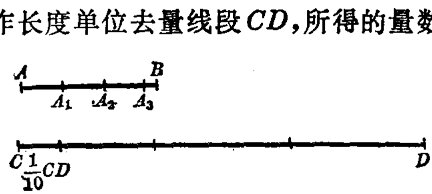



图 1·5

【解】 依照题意，线段 $CD$ 含有线段 $AB$ 的3倍. 显然 $CD>AB$. 用 $CD$ 作长

度单位去度量 $AB$ 时，第一回就得用 $\frac{1}{10}CD$ 去截 $AB$.

因为 $AB-3\cdot\frac{1}{10}CD=AB-3\cdot\frac{1}{10}\cdot3AB=\frac{1}{10}AB$，所以用 $\frac{1}{10}CD$ 去截 $AB$，截了3次而得到第一回剩余线段 $\frac{1}{10}AB$.

因为 $\frac{1}{10}AB-3\cdot\frac{1}{100}CD=\frac{1}{10}AB-3\cdot\frac{1}{100}\cdot3AB=\frac{1}{100}AB$，所以用 $\frac{1}{100}CD$ 去截第一回剩余线段 $\frac{1}{10}AB$，截了3次而得第二回剩余线段 $\frac{1}{100}AB$.

因为 $\frac{1}{100}AB-3\cdot\frac{1}{1000}CD=\frac{1}{100}AB-3\cdot\frac{1}{1000}\cdot3AB=\frac{1}{1000}AB$，所以用 $\frac{1}{1000}CD$ 去截第二回剩余线段 $\frac{1}{100}AB$，截了3次而得第三回剩余线段 $\frac{1}{1000}AB$.

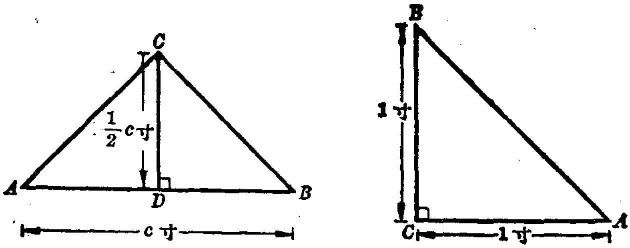
……………………

度量的过程将无限地继续下去，所得的量数是一个循环小数0.333….

**例2.** 在等腰直角三角形 $ABC$ 里，腰 $AC$ 的长度是一寸．现在以寸作长度单位，求斜边 $AB$ 的量数(图1·6).

**【解】** 我们将利用计算三角形面积的方法来求得 $AB$ 的量数①．作斜边 $AB$ 上的高 $CD$ (图1·6(1))．因为三角形

① 在算术里已经学习过计算三角形面积的方法．三角形的面积等于底和高乘积的一半．



(1) (2)

图 1.6

$ABC$ 是等腰的，所以 $CD$ 又是斜边上的中线，从而 $AD=\frac{1}{2}AB$. 容易看出，直角三角形 $ACD$ 也是等腰的，所以 $CD=AD$，$CD=\frac{1}{2}AB$. 设$AB$的长度为 $c$ 寸，这里 $c$ 是它的量数，则 $CD$ 的长度是$\frac{1}{2}c$ 寸. 依据三角形面积公式：

$$\text{三角形 } ABC \text{ 的面积}=\frac{1}{2}\cdot c\cdot\frac{c}{2}=\frac{1}{4}c^2\,(\text{平方寸}).\quad(1)$$

但是直角三角形 $ABC$ 的直角边 $AC$，$BC$ 可以分别做三角形的底边和高(图 1·6(2)). 因为 $AC$，$BC$ 的长度都是一寸，所以

$$\text{三角形 } ABC \text{ 的面积}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1=\frac{1}{2}\,(\text{平方寸}).\quad(2)$$

由(1)，(2)两式，得

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{4}c^2,\quad c^2=2,\quad\therefore\quad c=\sqrt{2}.$$

这里斜边 $AB$ 的量数是一个无理数$\sqrt{2}$，它是一个无限不循环小数，开头几位数字是 1.4142…. 这表示用线段 $AC$

去截 $AB$，截了 1 次而得剩余线段 $r_1$；用线段 $\frac{1}{10}AC$ 去截 $r_1$，截了 4 次而得剩余线段 $r_2$；用线段 $\frac{1}{100}AC$ 去截 $r_2$，截了 1 次而得 $r_3$；…．度量的过程将无限止地继续下去．

从前面的两个例题可以知道：度量线段的过程有时将无限止地继续下去，这时线段的量数可能是一个正的循环小数，也可能是一个正的无理数(无限不循环小数)．

一般地说，在选定了长度单位线段之后，每一条线段总有一个量数，这量数可能是正整数、正有限小数、正循环小数或正无限不循环小数．在代数学里，把整数、分数(有限小数、循环小数)叫做**有理数**，把无限不循环小数叫做**无理数**；有理数和无理数总称**实数**．因此我们有下面的结论：以确定的长度单位线段去度量任意线段，总有一个确定的正实数作为它的量数．

**2．两条线段的比** 给定了两个数 $a$ 和 $b$，要想知道 $a$ 是 $b$ 的多少倍($a>b$)，或者 $a$ 是 $b$ 的几分之几($a<b$)，我们可以用 $b$ 去除 $a$．所得的商叫做 $a$ 和 $b$ 两数的**比**；这里被除数 $a$ 叫做比的**前项**，除数 $b$ 叫做比的**后项**．两个数 $a$ 和 $b$ 的比通常表达为 $\frac{a}{b}$ 的形式，或者 $a:b$ 的形式．

两个数的比的概念可以推广到两条线段的比．

用同一长度单位去量两条线段，所得的两个量数的比叫做这两条线段的比．

在图 1·7 里，线段 $EF$ 是长度单位，用 $EF$ 分别去量线段 $AA'$ 和 $BB'$，必然得到两个量数 $a$ 和 $b$．量数 $a$ 和 $b$ 的比就是线段 $AA'$ 和 $BB'$ 的比，并且表达为 $\frac{AA'}{BB'}=\frac{a}{b}$，或者

$AA':BB'=a:b$. 在图1·7里，显然有 $\frac{AA'}{BB'}=\frac{6}{11}$.

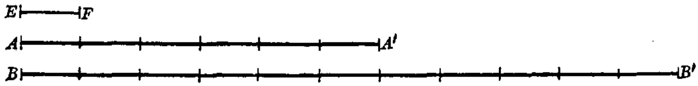


图 1·7

确定线段的量数必须首先确定长度单位．长度单位改变了，一条线段的量数也跟着改变．例如用尺做长度单位量竹竿，如果量数是5；长度单位改用了寸，这根竹竿的量数就变为50了．

线段的量数既由所选的长度单位确定；两线段的比又由两线段的量数确定，那末，改变了长度单位，两线段的比是否也要改变呢？

假设用寸作长度单位，两条线段的量数分别为50和30．改用尺作长度单位后，它们的量数分别改变为5和3了．改用分作长度单位后，它们的量数又分别改变为500和300．我们先后采用尺，寸，分作长度单位，两线段的比先后为：$\frac{5}{3}$，$\frac{50}{30}$和$\frac{500}{300}$，它们是相等的．由此可见，每改变一次长度单位，两条线段的量数各扩大或缩小同样的倍数，对于两线段的比来讲，正好把它的前项和后项扩大或缩小同样的倍数，比的值是不会改变的．因此，两线段的比和所采用的长度单位没有关系．

**例3.** 线段 $AB$ 和 $CD$ 的长度分别为2.1尺和1.4米．求两线段 $AB$ 和 $CD$ 的比．如果用 $CD$ 作长度单位，求出线段 $AB$ 的量数．

【解】 要求 $AB$ 与 $CD$ 的比，首先要使它们的长度单位相同．$CD$ 的长度 1.4 米=4.2尺，所以$\frac{AB}{CD}=\frac{2.1}{4.2}=0.5.$

用 $CD$ 作长度单位去度量线段 $AB$，所得的量数 $a$，就是线段 $AB$ 含有线段 $CD$ 的倍数，所以 $a=\frac{2.1}{4.2}=0.5.$

从这个例题可以知道，两线段 $AB$，$CD$ 的比，也可以理解为以线段 $CD$ 作长度单位去度量线段 $AB$ 所得的量数．

## 习 题 1·1

1．一条线段的量数一定是有理数吗？并举出例子．

2．线段 $a$ 和长度单位 $l$ 分别含有第三线段 $c$ 的 54 倍和 15 倍，求出线段 $a$ 的量数．

3．用圆规和直尺任意作一个正方形和正三角形；再利用分割规截取相等线段的方法，证明：

(1) 以正方形的一边为长度单位，量它的对角线所得的量数，精确到0.1的时候是 1.4．

(2) 以正三角形一边为长度单位，量它的高所得的量数，精确到0.1的时候是 0.8．

4．“线段”和“线段的长度”是一样的吗？为什么？

5．线段 $a$ 和 $b$ 的长度分别是 5 厘米和 4 厘米，求出它们的比．如果改用 1 寸长的线段为长度单位时，它们的量数分别是多少？它们的比有没有变化？

6．什么是两线段之比？它一定是有理数吗？上题中，如果采用线段 $b$ 做长度单位，两线段之比如何？

7．把一条长 56 厘米的线段分成 1:2:3 的三段，然后求出每一个分点把全线段分成两部分的比．

8．点 $C$ 把线段 $AB$ 分成 $AC:CB=2:3$．已知 $AB$ 为 48 厘米，求 $AC$ 和 $CB$ 的长．

9. 如果 $AB=12$ cm, 那末延长几厘米后可以使得 $AC:BC=5:2$? 这里 $C$ 是延长线的终点.

10. 线段 $AB$ 被点 $C$ 分成 $AC:CB=3:2$, 求 $AC$ 和 $AB$ 的比, 以及 $AB$ 和 $CB$ 的比.

## §1·2 成比例的线段

在算术里，我们已经学习过关于比例的概念，比例是表示两个比相等. 如果两个数 $a$ 和 $b$ 的比等于另外两个数 $c$ 和 $d$ 的比，那末我们说四个数 $a, b, c, d$ 组成一个比例 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，或 $a:b=c:d$.

在等式 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 里，$a, d$ 叫比例的**外项**，$b, c$ 叫比例的**内项**，$d$ 叫做 $a, b, c$ 的**第四比例项**.

如果 $a$ 和 $b$ 的比等于 $b$ 和 $c$ 的比，即 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$，那末 $b$ 叫做 $a$ 和 $c$ 的**比例中项**.

四个数组成比例的概念，可以推广为四条线段组成比例的概念.

如果线段 $a$ 和 $b$ 的比等于线段 $c$ 和 $d$ 的比，线段 $a, b, c, d$ 叫做**成比例的线段**.

在图 1·8 中，线段 $a$ 和 $b$ 的比等于 $\frac{4}{7}$，线段 $c$ 和 $d$ 的比也

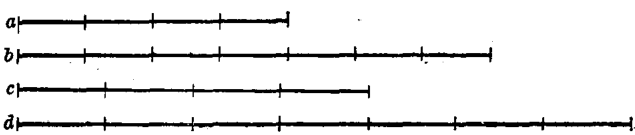



图 1·8

等于$\frac{4}{7}$. 所以线段$a$, $b$, $c$, $d$是成比例的线段.

**例1.** 在图1·9中，$DE$，$D'E'$分别是$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$的中位线. 试证线段$BC$，$DE$，$B'C'$，$D'E'$是成比例的线段.

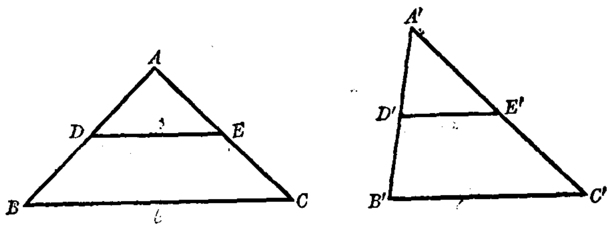



图 1·9

**已知** $DE$，$D'E'$分别为$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$的中位线.

**求证** $\frac{BC}{DE}=\frac{B'C'}{D'E'}$.

【证】 因为$DE$是$\triangle ABC$的中位线，$BC$是底边，所以$BC=2DE$，或$\frac{BC}{DE}=2$.

同理可证：$\frac{B'C'}{D'E'}=2$. 从而$\frac{BC}{DE}=\frac{B'C'}{D'E'}$.

依据两线段的比的定义：两线段的比是用同一长度单位去量两条线段所得的量数的比，四条线段组成的比例实际上是它们的四个量数所组成的比例. 因此关于数的比例的各个性质完全适用于线段的比例.

下面是关于比例的一些主要性质的定理. 在定理里的所有字母都代表不等于零的实数. 有些定理比较简单，读者可参阅括号里的提示，自己证明.