广义逆矩阵引论

Introduction to Generalized Inverses of Matrices

何旭初　孙文瑜　编著

江苏科学技术出版社

南 京 大 学

何旭初　孙文瑜

编　著

广义逆矩阵引论

Introduction to Generalized Inverses of Matrices

江苏科学技术出版社

1991 · 南京

内 容 简 介

本书系统地阐述了广义逆矩阵的基本理论、计算方法及应用. 全书共分六章，第一章概述有限维空间线性算子理论和矩阵理论；第二、三、四章分别介绍广义逆矩阵的基本理论、计算理论和扰动理论；第五章讨论计算广义逆矩阵和最小二乘问题的常用计算方法；第六章研究了广义逆矩阵在数值分析、最优化和数理统计中的应用.

本书可作为高等学校数学系各专业及其他有关专业"广义逆矩阵"课程的教材，也可供从事和研究矩阵论、数值分析、最优化、数理统计、应用数学、计量经济、测量学、高等代数等方面的工程技术人员、高年级学生、研究生及教师自学或参考.

广义逆矩阵引论

何旭初 孙文瑜 编著

出版发行：江苏科学技术出版社

排版：南京大学数学系电脑照排部

印刷：华东工学院印刷厂

开本：850×1168 1/32 印张：16.25 字数：400,000

1990年12月第1版 1990年12月第1次印刷

印数：1—1,500册

ISBN 7-5345-1075-9

O·72 定价：6.50元

责任编辑 沈绍绪

特邀编辑 吴兆金 孙自燕

前　言

广义逆是一门年轻的学科.

广义逆的概念最早是 I.Fredholm 于 1903 年提出的. 他给出了 Fredholm 积分算子的广义逆(Fredholm(1903)). 1920 年，E.H.Moore(1920)首先提出了矩阵的广义逆，他利用投影矩阵定义了唯一的 Moore 广义逆. 1933 年，E.H.Moore 的学生，现南京大学数学系教授曾远荣先生(Y.Y.Tseng)将 Moore 广义逆推广到 Hilbert 空间，提出了 Hilbert 空间线性算子的 Tseng 广义逆(Tseng(1933)等). 然而，广义逆矩阵得到迅速发展，并在应用科学的各个领域获得卓有成效的应用是在 1955 年英国学者 R.Penrose(1955)利用四个矩阵方程(现在称为 Penrose 条件)给出广义逆矩阵的新的更简便实用的定义之后. 近三十年来，广义逆矩阵的理论和应用得到了迅速发展，它在微分积分方程、算子理论、数理统计、最优化、测量学、经济学、计算数学及若干应用科学中发挥了广泛的重要的作用. 在研究最小二乘问题，长方、病态线性、非线性问题，不适定问题，回归、分布估计、马尔可夫链等统计问题，无约束、约束、随机规划问题，控制论和系统识别问题，网络问题等等中间，广义逆更是不可缺少的研究工具

本书是根据我们 1979 年以来为数学系计算数学、应用数学等专业同名课程编写的讲义经多次修改而成的，它介绍了广义逆矩阵的理论、计算方法和应用，反映了近二十年来这个领域中主要的和基本的研究成果. 本书内容丰富，素材充足，力求逻辑系统、叙述严格、语言通俗，可读性强. 从我们给出的章节目录，读者就可对本书内容窥见一斑.

本书各章要点如下:

第一章矩阵论，主要概述有限维空间线性算子理论和矩阵理

论，侧重系统阐述通常线性代数教材中讲述不多而与广义逆矩阵关系密切的矩阵分解方法、投影算子理论和特征值变分原理.

第二章介绍广义逆矩阵的基本理论，讨论若干常用广义逆矩阵的定义、性质及相应的线性系统的解，详细研究各种定义的等价性，强调各种广义逆之间的相互关系. 本章内容是本书的基石.

第三章介绍广义逆矩阵的计算理论，侧重描述广义逆的表示理论，分块与修改理论、微分理论、为广义逆的计算作了理论上的准备.此外，本章还介绍了谱广义逆—Drazin 逆.

第四章研究广义逆矩阵的摄动理论，这一章系统地讨论了广义逆矩阵的连续性和摄动理论，并指出保秩变形方法可以消除亏秩矩阵广义逆的不连续性.

第五章介绍了计算广义逆矩阵和最小二乘问题的常用计算方法，包括主要的直接法和迭代法，并给出了各种算法的计算步骤以及典型的试验矩阵.

第六章研究了广义逆在数值分析、最优化和统计中的应用. 主要介绍了广义逆在解非线性方程组、非线性最小二乘问题、不适定问题、以及区间规划、线性规划、二次规划、无约束极小化、约束极小化、网络分析和统计估计等方面的应用，它是本书的一个特色 我们相信在这些领域学习和研究的同志会对本书有所偏爱. 学习本章不要求读者必须预先具有计算数学和最优化等方面的知识，对于必要的知识，作者作了扼要介绍.

本书还提供了难易程度不等的较丰富的习题，它们是正文内容的消化和补充. 由于我国学者在广义逆方面作出了很多出色的工作，我们除在书末列出一百余篇主要参考文献外，并在附录中列出了国内学者在广义逆方面的主要论著，我们希望这些努力能为进一步从事广义逆研究的读者提供方便.

本书适宜作为高等院校数学、计算数学、应用数学和运筹学及其他有关专业高年级学生和研究生的一学期用教材(约 60 课时)，教师可根据具体情况对某些章节作适当增删或省略. 本书也可供理工科其他专业师生和科技工程技术人员自学参考. 阅读本书仅需具

有高等代数和高等数学的知识

在本书的修改和出版过程中，作者得到了南京大学数学系和江苏科学技术出版社的关心和支持.数学系领导自始至终关心本书的出版. 盛松柏副教授、欧阳梓祥副教授和赵金熙副教授参加了部分工作. 盛松柏副教授还对全书手稿进行了认真审阅. 吴兆金、孙自燕同志进行了认真的编辑加工，江苏科学技术出版社的领导和编辑对本书的出版给予了热情支持，尤其是理科编辑室副主任沈绍绪同志以一丝不苟的精神对全书进行修改和审校. 一些修读本课的学生和研究生对本书讲义提出了很好的建议，并协助作者做了一些工作. 一些兄弟院校的教师也提出了积极的建议，给予了热情的鼓励. 南京大学数学系电脑照排部为本书的激光排版付出了辛勤的劳动. 苏维宜教授为保证本书的出版质量付出了很大心血. 所有这些，是本书能以今天的面貌和大家见面的重要因素. 在此，作者仅向他们，并向一切为本书出版作出过贡献的同志们致以衷心的感谢. 最后，作者还要感谢国家自然科学基金和南京大学出版基金提供的资助.

由于水平有限，书中一定存在不妥和错误之处，欢迎读者批评指正.

作者

1990 年 3 月于南京大学

国家自然科学基金
南京大学出版基金

资助项目

符号说明

C 复数域

R 实数域

C^n 复 n 维线性空间(如果定义内积，也指酉空间)

R^n 实 n 维线性空间(如果定义内积，也指欧几里德空间)

$C^{m\times n}$ 复 mxn 矩阵的全体

$R^{m\times n}$ 实 mxn 矩阵的全体

$C_r^{m\times n}$ 秩为 r 的复 mxn 矩阵的全体

$R_r^{m\times n}$ 秩为 r 的实 mxn 矩阵的全体

$\mathcal{L}(C_n, C_m)$ 从 C^n 到 C^m 的线性算子的线性空间

$\mathcal{L}(R_n, R_m)$ 从 R^n 到 R^m 的线性算子的线性空间

$\mathcal{D}(A)$ A 的定义域

$\mathcal{R}(A)$ A 的象空间(或列空间)

$\mathrm{rank}(A)$ A 的秩

$\mathcal{N}(A)$ A 的零空间

$\mathrm{null}(A)$ A 的零度(零空间的维数)

$\dim(\mathcal{L})$ 子空间 $\mathcal{L}$的维数

e_i 第 i 个单位向量

$\oplus$ 子空间的直接和

$\lambda(A)$ A 的特征值集合

$\sigma(A)$ A 的奇异值集合

$\rho(A)$ A 的谱半径

$\|x\|$，$\|A\|$ 向量 x 的范数，矩阵 A 的范数.如无特别说明，均指 l_2 范数.

$k(A)$ A 的条件数

$\mathrm{tr}(A)$ A 的迹

A^T A 的转置

A^* A 的共轭转置

$\det(A)$ A 的行列式

(x, y) 向量 x 与 y 的内积

$\text{int}(D)$　D 的内部

$d(L, M)$　子空间 L 与 M 之间的距离

$C^{(1)}$，$C^{(2)}$　分别是一阶连续可微和二阶连续可微的函数类

∇　导数算子，∇f 表示 f 的梯度，$\nabla^2 f$ 表示 f 的二阶导数

A^{-1}　A 的逆矩阵

A^{+}　A 的 Moore–Penrose 广义逆

A^{-}，$A^{(1)}$　A 的{1}—逆(或 A 的 g—逆)

A_r^{-}，$A^{(1,2)}$　A 的{1，2}—逆(或 A 的反射广义逆)

A_l^{-}，$A^{(1,3)}$　A 的{1，3}—逆(或 A 的最小二乘广义逆)

A_m^{-}，$A^{(1,4)}$　A 的{1，4}—逆(或 A 的极小范数广义逆)

$\text{diag}(\lambda_1, \cdots \lambda_n)$　以 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为对角元的对角矩阵

$\forall$　对一切

$\square$　证明结束

目　　录